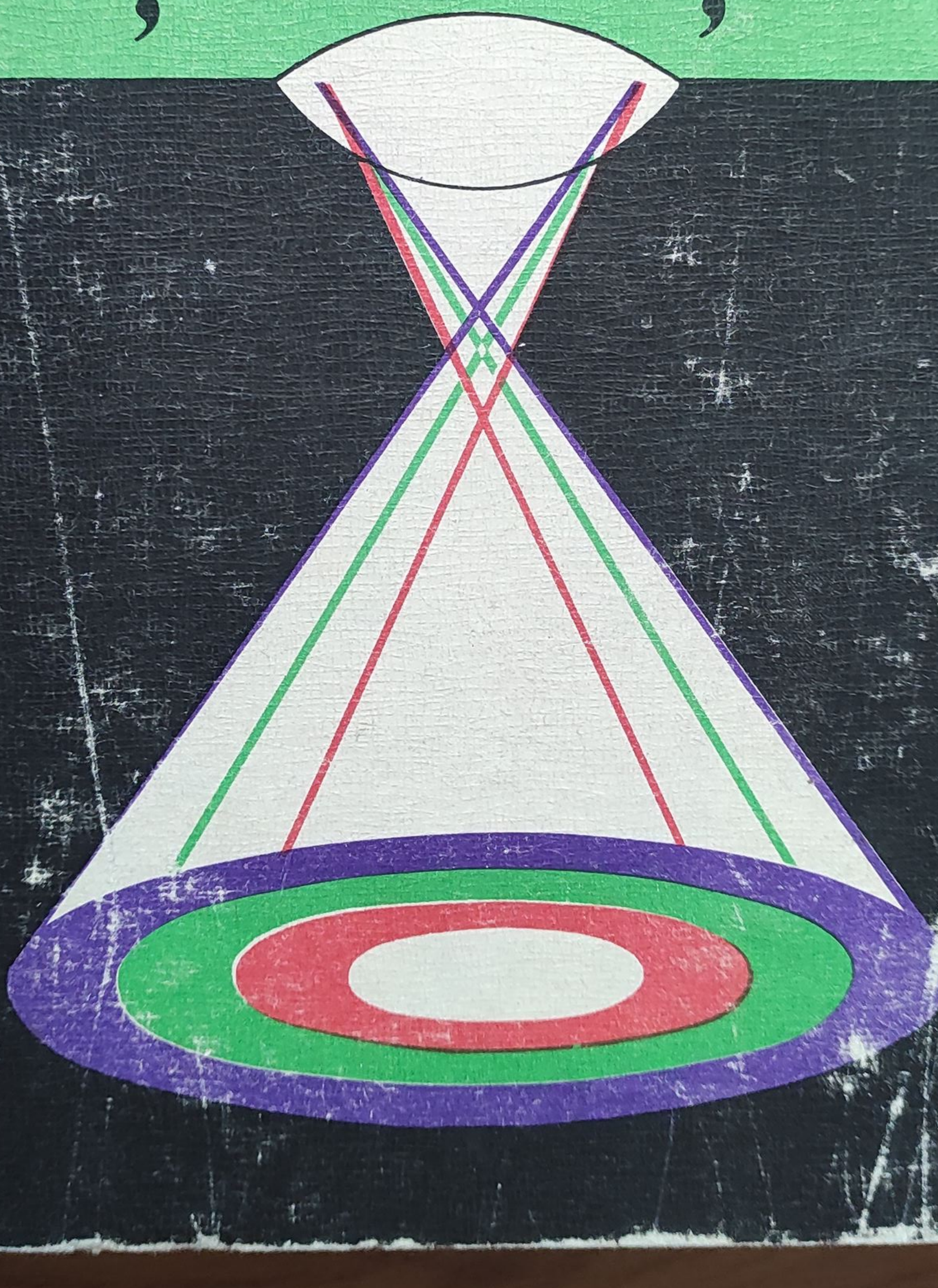
53.550

III 8205

George C. Moisil • Eugen Curatu

OPTICA

TEORIE ȘI APLICAȚII



GEORGE C. MOISIL EUGEN CURATU

OPTICĂ

Teorie și aplicații

303977
B.C.U. IASI

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI, 1986

PREFAȚĂ

Lumina constituie un sistem fizic foarte potrivit pentru obținerea, stocarea și transmisia informației, precum și pentru comanda diverselor instalații, iar dispozitivele optice se numără printre cele mai sensibile și mai practice. Cu toate acestea, de-abia în ultimele decenii, optica a intervenit masiv în aplicațiile tehnice. În prezent, dispozitivele optice sau optoelectronice sînt utilizate în tot mai multe instalații și procese tehnologice, astfel încît inginerii de toate specialitățile sînt confruntați cu o varietate mereu crescîndă de probleme ale opticii clasice sau cuantice.

Elaborarea în limba română a unei cărți de optică aplicată, destinată să devină un instrument de lucru în mîna inginerului, constituie în momentul de față o sarcină pe cît de stringentă, pe atît de dificilă. Prin selecția materialului teoretic, pe de o parte, și a aplicațiilor, pe de altă parte, autorii acestei lucrări s-au străduit să poată introduce cititorul într-un larg evantai de probleme, fie actuale, fie de perspectivă, beneficiind, în ceea ce privește modul de tratare a temelor, de faptul că în prezent toți inginerii posedă solide cunoștințe de matematici speciale, electrotehnică și mecanică cuantică.

Lucrarea cuprinde două părți distincte, dar interdependente ; prima, redactată de George C. Moisil, tratînd aspectele teoretice de bază ale opticii, iar cea de a doua parte, redactată de Eugen G. Curatu, fiind dedicată aspectelor aplicative.

Expunerea fenomenelor optice fundamentale admite explicit faptul că propagarea cîmpului electromagnetic este un proces relativist, electrodinamica relativistă constituind baza absolut necesară construcției opticii teoretice. S-a dat o extindere mai mare analizei detaliate a stărilor de polarizare a luminii, precum și propagării luminii în mediile anizotrope, deoarece, în prezent, înțelegerea funcționării a numeroase dispozitive tehnice necesită cunoștințe din aceste domenii. S-au introdus, de asemenea, unele elemente de teoria cuantică a radiației absolut necesare interpretării corecte atît a structurii microscopice a luminii, cît și a interacțiunii dintre radiație și substanță. Dimpotrivă, întrucît spectroscopia constituie astăzi un capitol relativ independent al fizicii, informația dată în acest domeniu este destul de redusă, cu atît mai mult cu cît în literatura română de specialitate există cîteva cărți foarte bune.

În partea a doua a lucrării se prezintă capitolele cele mai importante ale opticii aplicate, începînd cu fotometria și colorimetria, sursele și receptorii de lumină, precum și materialele, dispozitivele și instrumentele optice. O extindere mai mare a fost dată componentelor optice (lentile, prisme polarizoare, componente optoelectronice), precum și aparatelor optice de importanță fundamentală, cum ar fi interferometrele, laserii, filtrele optice, aparatele spectrale, dispozitivele elipsometrice, dispozitivele holografice etc. În ce privește formarea imaginilor prin sistemele optice, se utilizează, pe lîngă metodele opticii geometrice, și cele difracționale, pe baza analizei Fourier, reliefîndu-se rolul funcției de transfer în aprecierea calității sistemelor optice.

GEORGE C. MOISIL
EUGEN G. CURATU

București, decembrie 1985.

CUPRINS

PARTEA I

1. Propagarea cîmpului electromagnetic 9

1.1. Mărimi electromagnetice de stare și forma lor 4-dimensională 9
1.2. Forma 4-dimensională a ecuațiilor electrodinamicii 13
1.3. Mărimi energetice în electrodinamica relativistă 14
1.4. Relativitatea mărimilor electromagnetice 17

2. Conceptul de undă electromagnetică în fizica clasică 19

2.1. Clasificarea mediilor în care se propagă undele electromagnetice 19
2.2. Propagarea undelor electromagnetice 20
2.3. Unde armonice. Ecuația lui Helmholtz 24
2.4. Unde armonice plane 27
2.5. Unde electromagnetice armonice plane 30
2.6. Domeniul undelor electromagnetice 32
2.7. Propagarea perturbațiilor de durată finită 33
2.8. Efectul Doppler-Fizeau 38

3. Stările de polarizare a luminii 40

3.1. Stări de polarizare pure 40
3.2. Descrierea stărilor de polarizare. Matricea de polarizare și parametrii Stokes . 43
3.3. Descrierea stărilor de polarizare pure 44
3.4. Descrierea stărilor de polarizare mixte 48
3.5. Schimbarea stării radiației electromagnetice 49

4. Interferența 51

4.1. Interferența microundelor 51
4.2. Conceptul de coerență 52
4.3. Studiul interferenței undelor luminoase 55

5. Difracția 57

5.1. Principiul lui Huygens 57
5.2. Relația Helmholtz-Kirchhoff 58
5.3. Difracția prin deschideri 60
5.4. Teorema lui Babinet 62
5.5. Difracția Fresnel și difracția Fraunhofer 63
5.6. Difracția Fraunhofer printr-o fantă 65
5.7. Difracția Fraunhofer printr-o deschidere dreptunghiulară 67
5.8. Difracția Fraunhofer printr-o deschidere circulară 68
5.9. Difracția Fraunhofer prin rețele unidimensionale 69
5.10. Difracția Fraunhofer prin rețele tridimensionale 71
5.11. Difracția Fresnel 75

6. Reflexia-refracția luminii la frontiera dintre două medii dielectrice omogene . . . 79

6.1. Considerații generale 79
6.2. Reflexia-refracția $E_\perp$, H_p 81

6.3. Reflexia-refracția undei E_p, H_s 84
6.4. Reflectanța și transmitanța 85
6.5. Reflexia totală a luminii 87
6.6. Presiunea luminii 90

7. Propagarea luminii în medii absorbante 92

7.1. Ecuația de propagare în medii absorbante. Indici optici 92
7.2. Studiul reflexiei-refracției la suprafața de separare a două medii absorbante . 95
7.3. Reflexia-refracția luminii pe medii stratificate 98
7.4. Absorbția-dispersia luminii 103

8. Propagarea luminii în medii anizotrope 105

8.1. Particularitățile propagării luminii în medii anizotrope. Elipsoidul lui Fresnel 105
8.2. Ecuațiile cîmpului electromagnetic în medii anizotrope 106
8.3. Ecuația razelor. Suprafața radială. Cristale uniaxe și biaxe 109
8.4. Ecuația normalelor. Suprafața normalelor 113
8.5. Anizotropia mediilor optice 116
8.6. Activitatea optică 119

9. Cuantificarea cîmpului electromagnetic 122

9.1. Ipoteza fotonilor. Efectul fotoelectric și efectul Compton 122
9.2. Descompunerea cîmpului electromagnetic într-un sistem de oscilatori . . . 127
9.3. Cuantificarea cîmpului electromagnetic 130
9.4. Spinul fotonilor și starea de polarizare 135

10. Tranziții cuantice 137

10.1. Probabilitatea de tranziție 137
10.2. Reguli de selecție 142
10.3. Mecanismul Einstein de emisie-absorbție a luminii 146
10.4. Lărgimea liniilor spectrale 148
10.5. Interpretarea cuantică a dispersiei luminii 152

11. Procese de emisie a luminii 155

11.1. Radiația termică de echilibru 155
11.2. Deducerea formulei lui Planck 158
11.3. Procese de neechilibru de emisie-absorbție 161
11.4. Efectul Zeemann 164
11.5. Efectul Stark 170
11.6. Procese de difuzie elastică a luminii 172
11.7. Procese de difuzie neelastică a luminii 175
11.8. Efectul Cerenkov, radiația de frînare și radiația de tranziție 177

PARTEA A II-A

12. Noțiuni fundamentale de optică tehnică 181
12.1. Energia luminii 181
12.2. Fotometrie 190
12.3. Pirometrie optică 196
12.4. Surse și receptori de lumină 201
12.5. Ochiul — receptor de lumină 218
12.6. Colorimetrie 227
12.7. Materiale optice 238

13. Formarea imaginilor prin sisteme optice. Optica geometrică tehnică 246

13.1. Noțiunea de rază de lumină. Ecuația eiconalului 246
13.2. Teorema lui Fermat 249
13.3. Proprietățile generale ale razelor de lumină 250
13.4. Limitele de valabilitate ale opticii geometrice. Principiile opticii geometrice 251
13.5. Reflexia externă și reflexia internă. Fibre optice 253
13.6. Terminologie generală și convenția de semne în optica tehnică 256

13.7. Studiul formării imaginilor prin sisteme optice în cadrul opticii de ordinul întîi 258
13.8. Aberaţiile cromatice ale sistemelor optice 291
13.9. Determinarea condiţiilor pentru un stigmatism riguros, într-un element de volum din vecinătatea axei unui sistem optic centrat 300
13.10. Aberaţiile geometrice 304

14. Componente şi instrumente optice fundamentale 316
14.1. Lama plan-paralelă 316
14.2. Prisma optică 317
14.3. Oglinzi 331
14.4. Lentile 334
14.5. Reţele zonate 341
14.6. Franje moiré 344
14.7. Proprietăţile generale ale aparatelor optice 350
14.8. Instrumente optice afocale 362
14.9. Microscopul 371
14.10. Obiectivul foto 379
14.11. Aparatul de proiecţie 390

15. Aplicaţii ale interferenţei şi difracţiei luminii 393
15.1. Interferometre cu două unde 393
15.2. Interferometre cu unde multiple 404
15.3. Aplicaţii ale interferenţei în tehnologia optică 407
15.4. Reţele de difracţie 409
15.5. Aparate spectrale 412

16. Aplicaţii ale polarizării luminii 414
16.1. Polarizori şi prisme birefringente 414
16.2. Lame plan-paralele cristaline : undă, semiundă şi sfert de undă 416
16.3. Analiza unei oscilaţii luminoase. Legea lui Malus. Analizor cu penumbră . 417
16.4. Microscopie în lumină polarizată 419
16.5. Interferometrie în lumină polarizată 420
16.6. Elipsometria 421
16.7. Aplicaţii ale birefringenţei artificiale 427

17. Optica Fourier 429
17.1. Imaginea unei surse punctiforme printr-un sistem optic perfect 429
17.2. Imaginea unei surse punctiforme printr-un sistem optic imperfect 436
17.3. Explicarea difracţională a formării imaginilor prin sisteme optice 443

18. Holografie 465
18.1. Principiul înregistrării şi reconstrucţiei holografice 466
18.2. Componentele montajelor holografice 469
18.3. Aplicaţii ale holografiei în optica tehnică 473
18.4. Extinderea holografiei în domenii neconvenţionale 478

19. Optica granulară 486
19.1. Speckle în imaginea unui obiect difuzant iluminat de un fascicul laser . 481
19.2. Speckle produs la distanţă finită de un obiect difuzant iluminat de un laser 483
19.3. Aplicaţii ale opticii granulare 486

20. Componente opto-electronice 493
20.1. Celula fotoemisivă 493
20.2. Fotomultiplicatorul 495
20.3. Efecte fotoelectrice în semiconductoare 496
20.4. Fotorezistorul 498
20.5. Fotodioda 500
20.6. Fotoelementul 503
20.7. Fototranzistorul 508
20.8. Fototiristorul 510
20.9. Componente opto-electronice emiţătoare de lumină 511
20.10. Cuplori optici 514
20.11. Traductoare fotoelectrice de măsurare numerică 516
20.12. Cristale lichide 518

Bibliografie 523

UNIV. „AL. I. CUZA" BIBL. DE FIZICĂ

PARTEA ÎNTÎI

1. PROPAGAREA CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC

1.1. Mărimi electromagnetice de stare și forma lor 4-dimensională

Electrodinamica maxwelliană se bazează pe concepția transmiterii prin contiguitate a interacțiunilor electromagnetice prin intermediul unei forme de materie, distinctă de substanță, denumită *cîmp electromagnetic**. Structura *locală* — în fiecare punct și în fiecare moment — a cîmpului electromagnetic este descrisă de sistemul ecuațiilor lui Maxwell. Din aceste ecuații se deduc cu ușurință ecuațiile de propagare, sub formă de unde, a cîmpului electromagnetic, rezultînd în același timp în mod incontestabil că interacțiunile electromagnetice nu se pot transmite cu o viteză superioară constantei universale

$$c = (2{,}99792458 \pm 0{,}00000000)10^8 \text{ m/s}.$$

Aceste concluzii ne arată că singurul mod adecvat de formulare a electrodinamicii este în termenii teoriei relativității. În cadrul teoriei relativității restrînse, așa cum se va arăta mai departe, postulatele fundamentale ale electrodinamicii capătă formularea 4-dimensională potrivită, iar ecuațiile de propagare, sub formă de unde, a cîmpului electromagnetic, rezultă automat din aceste postulate.

Este fundamental faptul că ecuațiile cu derivate parțiale de propagare a undelor electormagnetice au o soluție nenulă și în absența corpurilor electrizate, sau magnetizate, cît și a circuitelor parcurse de curenți electrici. Cîmpul electromagnetic constituie așadar un sistem fizic distinct de substanță și care posedă o realitate independentă. Acest sistem fizic se numește *radiație electromagnetică.*

Experimental, s-au putut detecta următoarele mărimi locale, care descriu stările de electrizare, respectiv de magnetizare ale corpurilor :

ρ — densitatea volumică de sarcină electrică. Această mărime scalară descrie local starea de încărcare electrică ;

---

* În unele lucrări, lumea fizică se împarte în „materie" și „energie", la baza acestei exprimări false aflîndu-se o dublă confuzie. Pe de o parte, se confundă substanța cu materia, deși substanța este doar o formă a materiei, iar pe de altă parte se confundă radiația electromagnetică cu caracteristica sa de stare denumită energie.

P — vectorul polarizare electrică, acesta descriind local starea de polarizare electrică ;

J — vectorul densitate a curentului de conducție, care descrie local transferul sarcinii electrice în substanță ;

$\mathfrak{M}$ — tensorul magnetizare. Acest tensor, care descrie local starea de magnetizare, este reprezentat, în raport cu o bază ortonormată $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ printr-o matrice antisimetrică

$$\check{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y \\ -M_z & 0 & M_x \\ M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

În multe probleme, este mai comod ca în locul tensorului magnetizare să se folosească vectorul axial magnetizare, construit din elementele nenule ale tensorului de mai sus, prin regula

$$\mathbf{M} = \mathbf{1}_x M_x + \mathbf{1}_y M_y + \mathbf{1}_z M_z.$$

Starea locală a cîmpului electromagnetic este descrisă de următoarele mărimi de stare :

E — vectorul intensitate a cîmpului electric. Acest vector caracterizează cîmpul electromagnetic prin acțiunile electrice pe care le produce ;

$\mathfrak{B}$ — tensorul inducție magnetică. Acest tensor caracterizează cîmpul electromagnetic prin acțiunile magnetice pe care le produce. În raport cu o bază ortonormală $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ reprezentantul tensorului $\mathfrak{B}$ este matricea antisimetrică

$$\check{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}; \tag{1.2}$$

D — vectorul inducție electrică. Acest vector caracterizează cîmpul prin sarcinile electrice care îl produc ;

$\mathfrak{H}$ — tensorul intensitate a cîmpului magnetic. Acest tensor caracterizează cîmpul prin curenții care îl produc. În raport cu o bază ortonormată $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$, reprezentantul tensorului $\mathfrak{H}$ este matricea antisimetrică

$$\check{\mathfrak{H}} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y \\ -H_z & 0 & H_x \\ H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Adeseori, în locul tensorilor $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{H}$ se folosesc vectorii axiali

$$\mathbf{B} = \mathbf{1}_x B_x + \mathbf{1}_y B_y + \mathbf{1}_z B_z$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{1}_x H_x + \mathbf{1}_y H_y + \mathbf{1}_z H_z.$$

Să considerăm un element de volum $d\tau$ al unui corp încărcat, care se deplasează într-un cîmp electromagnetic. Fie v viteza acestui element de volum în raport cu un referențial inerțial. Vom considera ca un fapt experimental că densitatea volumică de forță $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/d\tau$ este

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1.4}$$

unde ρ este densitatea de sarcină. De exemplu, în cazul unei particule practic punctiformă, cu sarcina q, densitatea volumică de sarcină este

$$\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

unde $\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziție al particulei. Pentru a afla forța $\mathbf{F}$ exercitată asupra particulei, vom integra relația (1.4) pe un volum $\Delta\tau$, în interiorul căruia se află particula la momentul considerat

$$\mathbf{F} = \int_{\Delta\tau} q[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, \mathrm{d}\tau$$

sau

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)]. \tag{1.5}$$

Această forță se numește forță Lorentz exercitată asupra particulei.

În fine, reamintim că la trecerea curentului electric printr-un conductor, apare o căldură ireversibilă. Densitatea volumică a puterii echivalente este

$$w = \mathbf{JE}. \tag{1.6}$$

*

În termenii teoriei relativității restrînse, apare firească descrierea stării substanței și a cîmpului prin 4-vectori și 4-tensori, pe spațiul Minkowski.

Astfel starea de încărcare electrică, împreună cu transferul acestei stări se descriu local prin 4-vectorul denumit *cvadricurent*, de componente

$$\mathcal{J}_1 = J_x,\ \mathcal{J}_2 = J_y,\ \mathcal{J}_3 = J_z,\ \mathcal{J}_4 = \mathrm{i}c\rho$$

sau, altfel scris,

$$\mathcal{J} = (\mathbf{J},\ \mathrm{i}c\rho). \tag{1.7}$$

Partea spațială a cvadricurentului este vectorul tridimensional $\mathbf{J}$ densitate de curent, iar partea temporală, densitatea volumică de sarcină, multiplicată cu constanta universală c.

Starea cîmpului electromagnetic este de asemenea descrisă local de un 4-vector pe spațiul Minkowski denumit *cvadripotențialul* $\mathcal{A}$, acesta reunind potențialele electrodinamice $\mathbf{A}$ și V

$$\mathcal{A}_1 = A_x,\ \mathcal{A}_2 = A_y,\ \mathcal{A}_3 = A_z,\ \mathcal{A}_1 = \frac{\mathrm{i}}{c} V$$

sau, mai concis,

$$\mathcal{A} = \left(\mathbf{A},\ \frac{\mathrm{i}}{c} V\right). \tag{1.8}$$

Se știe că potențialele electromagnetice nu sînt univoc determinate În scopul determinării acestora se folosesc diverse condiții de etalonare, cea mai des utilizată fiind *condiția de etalonare Lorentz*:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{1.9}$$

Ținînd seama de definiția (1.8) a cvadripotențialului și de faptul că în spațiul Minkowski coordonatele unui punct sînt $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, condiția Lorentz se va scrie

$$\operatorname{Div} \mathcal{A} = \sum_{\lambda \in 1,4} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{1.10}$$

unde prin Div $\mathcal{A}$ s-a notat 4-divergența 4-vectorului $\mathcal{A}$.

Din cvadripotențial se poate deriva 4-tensorul cîmp, mărime care reunește tensorul tridimensional $\mathfrak{B}$ și vectorul tridimensional **E**. Prin definiție, 4-tensorul cîmp este 4-rotorul cvadripotențialului $\mathcal{A}$. Tensorul cîmp este reprezentat de o matrice 4×4, ale cărei elemente sînt

$$\Phi_{\lambda\mu} = \operatorname{Rot}_{\lambda\mu} \mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial \mathcal{A}_\lambda}{\partial x_\mu} \qquad (\lambda, \mu \in \overline{1, 4}). \tag{1.11}$$

Se observă că $\Phi_{\lambda\mu} = -\Phi_{\mu\lambda}$, deci 4-tensorul cîmp este antisimetric; în particular elementele diagonale $\Phi_{\lambda\lambda} = 0$.

Ținînd seama că între componentele B_x, B_y, B_z, E_x, E_y, E_z și componentele A_x, A_y, A_z și V există relațiile

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y};$$

$$E_x = -\frac{\partial Ax}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial z}$$

se obține următoarea expresie a matricei $\mathbf{\Phi}$, reprezentanta tensorului cîmp:

$$\check{\mathbf{\Phi}} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{\mathrm{i}}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{\mathrm{i}}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c} E_z \\ \frac{\mathrm{i}}{c} E_x & \frac{\mathrm{i}}{c} E_y & \frac{\mathrm{i}}{c} E_z & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

sau, ținînd seama de forma (1.2) a matricei $\mathfrak{B}$,

$$\check{\mathbf{\Phi}} = \left(\begin{array}{c|c} \check{\mathfrak{B}} & -\frac{\mathrm{i}}{c} \check{\mathfrak{E}} \\ \hline \frac{\mathrm{i}}{c} \tilde{\check{\mathfrak{E}}} & \mathbf{0} \end{array} \right) \tag{1.12'}$$

unde prin $\check{\mathfrak{E}}$ s-a notat matricea unicoloană reprezentantă a vectorului tridimensional **E**, iar prin $\tilde{\check{\mathfrak{E}}}$ matricea unilinie transpusă a lui $\check{\mathfrak{E}}$.

Vom introduce acum un al doilea 4-tensor Γ, denumit *excitație*, care reunește tensorul tridimensional $\mathfrak{H}$ și vectorul tridimensional $\mathfrak{D}$. Prin definiție, matricea reprezentantă a acestui 4-tensor este

$$\check{\Gamma} = \begin{pmatrix} \check{0} & -ic\check{\mathfrak{D}} \\ ic\check{\tilde{\mathfrak{D}}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

În sfîrșit, într-un mod cu totul analog, tensorul tridimensional $\mathfrak{M}$ și vectorul tridimensional $\mathbf{P}$ se pot reuni într-un 4-tensor denumit *polarizare*, reprezentat prin matricea 4×4

$$\check{\Pi} = \left(\begin{array}{c|c} \check{\mathfrak{M}} & ic\check{\mathfrak{P}} \\ \hline -ic\check{\tilde{\mathfrak{P}}} & 0 \end{array}\right). \tag{1.14}$$

1.2. Forma 4-dimensională a ecuațiilor electrodinamicii

Formularea 4-dimensională permite scrierea ecuațiilor electrodinamicii sub o formă foarte concisă și totodată invariantă în raport cu transformarea Lorentz

$$\mathrm{DIV_d}\,\Gamma = \mathcal{J} \tag{1.15}$$

$$\mathrm{ROT}\,\Phi = 0 \tag{1.16}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu_0}\Phi - \Pi. \tag{1.17}$$

Ecuația (1.15) reunește primul grup al ecuațiilor lui Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}; \quad \nabla \mathbf{D} = \rho \tag{1.18}$$

într-o singură formulare. Într-adevăr, ținînd seama că prin simbolul $\mathrm{DIV_d}\,\Gamma$ s-a notat *divergența tensorială la dreapta* a 4-tensorului excitație, adică 4-vectorul reprezentat prin matricea unicoloană de elemente

$$\sum_{\lambda \in \overline{1,4}} \frac{\partial \Gamma_{\varkappa\lambda}}{\partial x_\lambda} \qquad (\varkappa = \overline{1,4})$$

după efectuarea calculelor se constată că cele patru ecuații cu derivate parțiale echivalente ecuației matriceale (1.15) sînt identice cu cele 4 ecuații scalare (1.18).

Tot astfel, ecuația (1.16) reunește cel de-al doilea grup al ecuațiilor lui Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \mathbf{B} = 0. \tag{1.19}$$

În relaţia (1.16) prin ROT $\mathbf{\Phi}$ înţelegem *rotorul tensorial* al 4-tensorului antisimetric $\mathbf{\Phi}$, adică 4-vectorul de componente

$$(\mathrm{ROT}\ \mathbf{\Phi})_\varkappa = \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial \Phi_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Phi_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}$$

unde $\varkappa, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Ţinînd seama de definiţia de mai sus se constată uşor că ecuaţia (1.16) este echivalentă cu ecuaţiile (1.19). În ceea ce priveşte ecuaţia (1.17) aceasta reuneşte binecunoscutele relaţii de legătură

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{1.20}$$

O consecinţă a ecuaţiei (1.15) este ecuaţia de continuitate a sarcinii electrice, aceasta rezultînd imediat prin calcularea 4-divergenţei 4-vectorului $\mathcal{J}$

$$\mathrm{Div}\ \mathcal{J} = \mathrm{Div}\ \mathrm{DIV}_\mathrm{d}\ \Gamma = \sum_{\lambda \in \overline{1,4}} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \sum_{\mu \in \overline{1,4}} \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial^2 \Gamma_{\lambda\mu}}{\partial x_\lambda\, \partial x_\mu}.$$

Ca urmare a antisimetriei tensorului Γ, termenii acestei sume se reduc doi cîte doi aşa încît

$$\mathrm{Div}\ \mathcal{J} = 0 \tag{1.21}$$

sau, ţinînd seama de definiţia 4-curentului $\mathcal{J}$,

$$\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1.22}$$

Aşadar, relaţia Div $\mathcal{J} = 0$ exprimă invarianţa relativistă a sarcinii electrice.

1.3. Mărimi energetice în electrodinamica relativistă

Cvadrivectorul densitate de forţă-putere. În dinamica relativistă se defineşte 4-vectorul impuls-energie

$$\mathcal{P} = \left(\mathbf{p}, \frac{\mathrm{i}}{c}\mathcal{E}\right)$$

unde $\mathbf{p}$ este vectorul impuls tridimensional, iar $\mathcal{E}$ este energia. Efectuînd derivata totală în raport cu timpul propriu a celor 4 componente, se obţine un nou vector denumit *4-vectorul forţă-putere*

$$\mathcal{F} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \left(\mathcal{F}, \frac{\mathrm{i}}{c} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{1.23}$$

$\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ este vectorul forţă tridimensional, $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t$ este puterea, iar $\beta = v/c$.

Să ne fixăm atenţia asupra unui volum elementar $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dintr-un corp, asupra căruia acţionează forţa-putere $\mathcal{F}$. Prin definiţie

$$\ell = \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \left(\mathbf{f}, \frac{\mathrm{i}}{c} P\right) \tag{1.24}$$

este 4-vectorul densitate de forță putere. $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dxdydz$ este vectorul tridimensional densitate volumică de forță, iar scalarul P este densitatea volumică de putere. În cazul forței exercitate de cîmpul electromagnetic, $\mathbf{f}$ este dată de (1.4), iar densitatea de putere w este dată de (1.6). Se poate arăta ușor că, în acest caz,

$$\ell = \Phi \mathcal{J}. \tag{1.25}$$

Într-adevăr, trecînd la reprezentarea matriceală, obținem

$$\begin{pmatrix} \check{\mathfrak{f}} \\ \frac{\mathrm{i}}{c} w \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \check{\mathfrak{B}} & -\frac{\mathrm{i}}{c}\check{\mathfrak{E}} \\ \hline \frac{\mathrm{i}}{c}\check{\tilde{\mathfrak{E}}} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \check{\mathfrak{J}} \\ \mathrm{ic}\rho \end{pmatrix}$$

$\check{\mathfrak{f}}$, $\check{\mathfrak{E}}$, $\check{\mathfrak{J}}$ sînt submatrice unicoloană ale căror elemente sînt proiecțiile pe axele x, y, z ale vectorilor $\mathbf{f}$, respectiv $\mathbf{E}$, respectiv $\mathbf{J}$, iar $\check{\mathfrak{B}}$ este matricea 3×3 dată de (1.2). Efectuînd produsul de matrice din membrul drept și, ținînd seama că $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, rezultă relațiile

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ w &= \mathbf{JE}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Tensorul densitate de energie-impuls. Se poate defini un 4-tensor, denumit densitate de energie-impuls τ, astfel încît 4-vectorul densitate de forță-putere să derive din acest tensor conform relației

$$\ell = -\,\mathrm{DIV}_d \tau. \tag{1.27}$$

În cazul simplu, al mediilor liniare și izotrope, fără polarizare electrică permanentă și fără magnetizare permanentă, elementele matricei reprezentante a tensorului τ au expresia simplă

$$\tau_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}\delta_{\lambda\mu}\left(\frac{1}{\mu}B^2 - \varepsilon E^2\right) + \sum_{\nu \in \overline{1,4}} \Phi_{\lambda\nu}\Phi_{\mu\nu}. \tag{1.28}$$

Dacă se ține seama de expresiile componentelor tensorului Φ, rezultă ușor că

$$\tau = \left(\begin{array}{c|c} -\check{\mathfrak{T}} & \mathrm{ic}\check{\mathfrak{g}} \\ \hline \frac{\mathrm{i}}{c}\check{\tilde{\mathfrak{S}}} & -w \end{array} \right). \tag{1.29}$$

Submatricele din matricea 4×4 de mai sus au următoarele semnificații:

$\check{\mathfrak{T}}$ este matricea 3×3 reprezentantă a tensorului $\mathfrak{T}$ al tensiunilor lui Maxwell și are forma

$$\check{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu}B_x^2 + \varepsilon E_x^2 - w & \frac{1}{\mu}B_xB_y + \varepsilon E_xE_y & \frac{1}{\mu}B_xB_z + \varepsilon E_xE_z \\ \frac{1}{\mu}B_xB_y + \varepsilon E_xE_y & \frac{1}{\mu}B_y^2 + E_y^2 - w & \frac{1}{\mu}B_yB_z + \varepsilon E_yE_z \\ \frac{1}{\mu}B_xB_z + \varepsilon E_xE_z & \frac{1}{\mu}B_yB_z + \varepsilon E_yE_z & \frac{1}{\mu}B_z^2 + \varepsilon E_z^2 - w \end{pmatrix};$$

$\check{\mathfrak{g}}$ este matricea unicoloană, reprezentantă a vectorului densitate volumică de impuls electromagnetic

$$\mathfrak{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B};$$

$\check{\check{\mathfrak{S}}}$ este matricea unilinie, transpusă a matricei unicoloană, reprezentantă a vectorului Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H};$$

$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2\right)$ este densitatea volumică a energiei cîmpului electromagnetic.

Calculînd primele trei componente ale 4-vectorului densitate de forță-putere găsim

$$f_i = \rho E_i + [(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B}]_i + [(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{D}]_i - \frac{\partial g_i}{\partial t}$$

($i = 1, 2, 3$), la stabilirea acestor relații ținîndu-se seama că $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\nabla \mathbf{D} = \rho$ și $\nabla \mathbf{B} = 0$. Întrucît, însă, conform ecuațiilor lui Maxwell

$$(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{D} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} =$$

$$= \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g},$$

iar pe de altă parte $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, rezultă pentru densitatea volumică de forță chiar expresia dată de Lorentz

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{1.30}$$

În ceea ce privește cea de-a patra componentă

$$f_4 = -\frac{\mathrm{i}}{c}\left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\right),$$

Și, deoarece conform relației (1.24) $f_4 = \frac{\mathrm{i}}{c} P$, rezultă expresia conservării energiei

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \mathbf{S} = -P.$$

De exemplu, dacă $P = \mathbf{JE}$ este densitatea de putere disipată prin efect Joule, se obține

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \mathbf{S} = -\mathbf{JE}. \tag{1.31}$$

Aceasta este o ecuație de continuitate, iar $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ este vectorul densității fluxului de energie, adică vectorul Poynting. Semnificația acestui vector, devine și mai clară, dacă vom considera un domeniu de volum $\mathcal{V}$ și frontieră Σ, în care se află cîmp electromagnetic și vom integra relația (1.30) pe acest volum. Rearanjînd termenii găsim

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} w \, dx dy dz = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{JE} \, dx dy dz + \int_{\mathcal{V}} \nabla \mathbf{S} \, dx dy dz.$$

Membrul stîng exprimă scăderea energiei în volumul $\mathcal{V}$ raportată la timp, adică $-\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t$. Primul termen din membrul al doilea exprimă puterea $P_\mathcal{V}$ a cîmpului din volumul $\mathcal{V}$, transformată ireversibil în căldură prin efect Joule. Transformînd cel de-al doilea termen din membrul drept într-o integrală extinsă pe frontierea Σ a volumului $\mathcal{V}$

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \mathbf{S}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint_{\Sigma} \mathbf{S}\, \mathrm{d}\,\mathbf{A}$$

rezultă

$$-\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{V}} = Q_{\mathcal{V}} + \oint_{\Sigma} \mathbf{S}\, \mathrm{d}\mathbf{A}. \tag{1.32}$$

$Q_{\mathcal{V}}$ este căldura produsă ireversibil în volumul $\mathcal{V}$, raportată la timp, iar $\oint_{\Sigma} \mathbf{S}\, \mathrm{d}\mathbf{A}$ este fluxul energiei transferate prin frontiera Σ.

1.4. Relativitatea mărimilor electromagnetice

Cvadricurentul $\mathcal{J}$ și cvadripotențialul $\mathcal{A}$ fiind 4-vectori se transformă la trecerea de la un referențial inerțial K la un alt referențial inerțial K' după relațiile

$$\mathcal{J}'_\mu = \sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} \mathcal{J}_\lambda \tag{1.33}$$

$$\mathcal{A}'_\mu = \sum_\lambda \alpha_{\mu\lambda} \mathcal{A}_\lambda \tag{1.34}$$

unde $\alpha_{\lambda\mu}$ sînt elementele matricei transformării generale Lorentz.

În particular, în cazul transformării Lorentz speciale, se obțin pentru cvadricurent relațiile

$$\mathbf{J}' = \frac{\mathbf{J}_\parallel - \rho\mathbf{v}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \mathbf{J}_\perp \tag{1.35}$$

$$\rho' = \frac{\rho - \frac{1}{c^2}\mathbf{J}\mathbf{v}}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \tag{1.36}$$

Se observă că în expresia densității de curent $\mathbf{J}'$ apare și densitatea curentului de convecție $-\rho\mathbf{v}$, unde $\mathbf{v}$ este viteza de transport a referențialului K' față de K. În expresia (1.35) densitatea de curent $\mathbf{J}$ s-a descompus în două componente

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_\parallel + \mathbf{J}_\perp$$

componenta $\mathbf{J}_\parallel$ fiind paralelă cu $\mathbf{v}$, în timp ce componenta $\mathbf{J}_\perp$ este perpendiculară pe $\mathbf{v}$.

Analog, componentele cvadripotențialului $\mathscr{A} = \left(\mathbf{A}, \frac{\mathrm{i}}{c} V\right)$ se transformă după relațiile

$$\mathbf{A}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{A}_{\parallel} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}V}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \mathbf{A}_{\perp} \tag{1.37}$$

$$V' = \frac{V - \mathbf{v}\mathbf{A}}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \tag{1.38}$$

În ceea ce privește tensorii $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Gamma}$ și $\mathbf{\Pi}$, observăm că relațiile de transformare pentru componentele unui 4-tensor de ordinul II sînt de forma

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa,\,\lambda} \alpha_{\mu\varkappa}\alpha_{\nu\lambda}T_{\varkappa\lambda}.$$

Aplicînd această transformare componentelor tensorului cîmp $\mathbf{\Phi}$, rezultă în final expresiile

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \mathbf{B}_{\parallel} \tag{1.39}$$

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \mathbf{E}_{\parallel}. \tag{1.40}$$

Analog, din componentele tensorului excitație $\mathbf{\Gamma}$ găsim

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v}\times\mathbf{D}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \mathbf{H}_{\parallel} \tag{1.41}$$

$$\mathbf{D}' = \frac{\mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{H}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \mathbf{D}_{\parallel} \tag{1.42}$$

iar din cele ale tensorului polarizare se obțin relațiile

$$\mathbf{M}' = \frac{\mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{P}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \mathbf{M}_{\parallel} \tag{1.43}$$

$$\mathbf{P}' = \frac{\mathbf{P}_{\perp} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{M}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \mathbf{P}_{\parallel}. \tag{1.44}$$

Invarianții cîmpului electromagnetic. Se pot construi doi invarianți scalari relativiști ai cîmpului electromagnetic. În acest scop vom introduce vectorul complex* din spațiul Minkowski

$$\mathbf{F} = \varepsilon_0^{1/2}\mathbf{E} + \mathrm{i}\mu_0^{1/2}\mathbf{H}.$$

La o rotație a axelor în acest spațiu

$$\sum_{\lambda} \mathbf{F}_{\lambda}^2 = \text{invariant}$$

sau

$$\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - \mu_0\mathbf{H}^2 + 2\mathrm{i}\varepsilon_0^{1/2}\mu_0^{1/2}\mathbf{E}\mathbf{H} = \text{invariant}.$$

* Vezi : L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie des champs*, p. 90, Ed. Mir, Moscou, 1970.

Atît partea reală cît și cea imaginară trebuie să rămînă invariante. De aici rezultă, ținînd seama că în vid $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ și $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, următorii invarianți

$$\mathbf{ED} - \mathbf{BH} = \text{invariant} \tag{1.45}$$

$$\mathbf{EB} = \text{invariant.} \tag{1.46}$$

În timp ce (1.45) este un invariant *scalar*, (1.46) este un invariant *pseudoscalar*, întrucît $\mathbf{E}$ este un vector polar, iar $\mathbf{B}$ un vector axial.

2. CONCEPTUL DE UNDĂ ELECTROMAGNETICĂ ÎN FIZICA CLASICĂ

2.1. Clasificarea mediilor în care se propagă undele electromagnetice

În general, prin undă se înțelege o perturbație care se propagă într-un domeniu. Zona în care are loc perturbația originară se numește sursă, unda propagîndu-se de aici în domeniu prin contiguitate, adică din aproape în aproape și cu viteză finită. Spre deosebire de undele elastice, undele electromagnetice se propagă și în vid. Perturbația care produce unda se caracterizează printr-o mulțime de mărimi care suferă variații în timp ; de exemplu, în cazul perturbațiilor electromagnetice are loc variația în timp a componentelor tensorului cîmp și ale tensorului excitație, ale cvadripotențialului etc. Toate aceste mărimi satisfac ecuații cu derivate parțiale a căror formă este dictată în primul rînd de natura mediului în care are loc propagarea undei. În cele ce urmează vom da acestor mărimi denumirea generică de funcții de undă și le vom nota $\psi(x, y, z, t)$.

Caracteristicile principale ale mediilor. Există mai multe criterii pe a căror bază se poate face o clasificare a mediilor, referitor la propagarea undelor. Astfel mediile se numesc *liniare* dacă, fiind date două perturbații (1) și (2), pentru oricare din mărimile caracteristice valoarea rezultantă este

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_1(x, y, z, t) + \psi_2(x, y, z, t)$$

adică dacă este satisfăcut principiul suprapunerii. În cazul contrar mediul se numește neliniar.

Mediul se numește *omogen* dacă valorile mărimilor de material nu depind de poziție. În toată rigoarea, un mediu omogen trebuie să fie de întindere infinită, existența frontierei introducînd obligatoriu discontinuitatea mărimilor de material. Mediile pentru care aceste mărimi sînt funcții de poziție sînt medii neomogene.

Mediul este *izotrop*, dacă în fiecare punct al său valorile mărimilor de material sînt independente de direcţia de măsurare. Dacă însă există o dependenţă de direcţie a acestor mărimi, mediul este anizotrop.

Mediul se numeşte *conservativ* dacă propagarea undei se desfăşoară ca un proces reversibil. Dacă însă propagarea este ireversibilă, generîndu-se entropie, mediul este disipativ.

Mediul se spune că este *fără memorie* dacă valorile mărimilor de material sînt determinate numai de starea instantanee a mediului, fiind independente de istoria anterioară a acestuia. În cazul contrar, se spune că avem de-a face cu medii cu memorie.

Un mediu riguros liniar, omogen, izotrop, conservativ şi fără memorie este un mediu ideal, în cazul real existînd totdeauna abateri mai mari sau mai mici de la aceste condiţii ideale.

2.2. Propagarea undelor electromagnetice

Ecuaţia undelor satisfăcută de potenţialele electrodinamice. Este instructiv faptul că ecuaţiile cîmpului electromagnetic sînt echivalente cu ecuaţia de propagare a undelor satisfăcută de 4-potenţial. Vom arăta acest lucru în cazul cel mai simplu şi anume acela al propagării cîmpului în vid.

S-a văzut că în conformitate cu ecuaţiile electrodinamicii, conform relaţiei (1.15)

$$\mathrm{DIV}_d\, \mathbf{\Gamma} = \mathcal{J}.$$

În vid, însă, $\mathfrak{M} = 0$, aşa încît relaţia (1.17) se reduce la $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Phi}/\mu_0$ şi deci

$$\mathrm{DIV}_d \mathbf{\Phi} = \mu_0 \mathcal{J}.$$

Şi, întrucît $\mathbf{\Phi} = \mathrm{Rot}\ \mathcal{A}$, rezultă

$$\mathrm{DIV}_d\, \mathrm{Rot}\ \mathcal{A} = \mu_0 \mathcal{J}.$$

Să calculăm detaliat primul element al matricei unicoloană $\mathrm{DIV}_d \mathrm{Rot}\mathcal{A}$, respectiv $\mu_0 \mathcal{J}$

$$\mu_0 J_x = \sum_{\lambda \in \overline{1,4}} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathrm{Rot}_{1\lambda} \mathcal{A} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{Rot}_{11}\, \mathcal{A} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{Rot}_{12} \mathcal{A} + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathrm{Rot}_{13} \mathcal{A} + \frac{\partial}{\partial x_4} \mathrm{Rot}_{14} \mathcal{A}.$$

Dar, întrucît $\mathrm{Rot}_{\varkappa\lambda} \mathcal{A} = \dfrac{\partial \mathcal{A}_\lambda}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathcal{A}_\varkappa}{\partial x_\lambda}$, vom obţine

$$\mu_0 J_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\mathrm{ic}\partial t}\left(\frac{\frac{\mathrm{i}}{c}\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\mathrm{ic}\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}.$$

Dar, deoarece

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2},$$

putem scrie

$$-\nabla^2 A_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \mu_0 J_x.$$

Etalonarea Lorentz. În § 1.1 s-a arătat că potențialele electrodinamice sînt definite pînă la o condiție de etalonare. Dacă pentru etalonarea potențialelor se introduce condiția Lorentz

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

obținem

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x.$$

Operatorul

$$\Box_c = \sum_{\lambda \in \overline{1,4}} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

se numește operatorul lui d'Alembert. Astfel, ecuația de mai sus se scrie concis

$$\Box_c A_x = -\mu_0 J_x.$$

Efectuînd calculele analoge și pentru celelalte componente ale cvadrivectorului $\mathrm{DIV_d Rot}\mathcal{A}$, obținem

$$\begin{pmatrix} \Box_c A_x \\ \Box_c A_y \\ \Box_c A_z \\ \Box_c \frac{\mathrm{i}}{c} V \end{pmatrix} = -\mu_0 \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \\ \mathrm{i}c\rho \end{pmatrix}$$

sau

$$\Box_c \mathcal{A} = -\mu_0 \mathcal{J}.$$

Această ecuație este tipică pentru propagarea undelor. Acest calcul arată că primul grup de ecuații ale electrodinamicii afirmă în fond propagarea interacțiunilor electromagnetice sub formă de unde electromagnetice.

Ecuația pe care o satisface cvadrivectorul $\mathcal{A}$, se despică în următoarele ecuații satisfăcute de potențialele electrodinamice

$$\Box_c \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{2.1}$$

$$\Box_c V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.2}$$

la scrierea ultimei relații ținîndu-se seama că $\mu_0 c^2 = \varepsilon_0^{-1}$.

Etalonarea Coulomb. În afara condiției Lorentz, se pot folosi și alte condiții de etalonare. Astfel, adesea se utilizează condiția de etalonare

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \tag{2.3}$$

denumită condiție de etalonare Coulomb. Această condiție, însă, spre deosebire de etalonarea Lorentz, nu este invariant relativistă. În schimb prezintă următorul avantaj : se știe că în vid, întrucît $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, forma locală a legii lui Gauss devine

$$\nabla \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$$

sau, în funcție de potențialele electrodinamice,

$$\nabla \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{A} + \nabla^2 V = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Introducînd acum condiția de etalonare Coulomb (2.3), rezultă

$$\nabla^2 V = - \rho / \varepsilon_0. \tag{2.4}$$

Aceasta este însă chiar ecuația lui Poisson pentru cîmpul electrostatic. Soluția ei, $V(x, y, z)$, nu depinde explicit de timp și deci în cadrul acestei etalonări $\partial V / \partial t = 0$.

Se poate arăta că în cadrul aceleiași etalonări potențialul vector $\mathbf{A}$ satisface în schimb ecuația

$$\Box_c \mathbf{A} = - \mu_0 \mathbf{J}. \tag{2.5}$$

Într-adevăr, din condiția $\nabla \mathbf{A} = 0$, urmează

$$\nabla (\nabla \mathbf{A}) = \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

În același timp, din definiția potențialului vectorial și prima ecuație a lui Maxwell

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

și întrucît $\mathbf{E} = -(\partial \mathbf{A} / \partial t) - \nabla V$, $\partial V / \partial t = 0$ și $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$, rezultă

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \mu_0 \mathbf{J}$$

adică relația (2.5).

Ecuația undelor satisfăcută de $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$ *în medii ideale.* Vectorii caracteristici cîmpului electromagnetic satisfac ecuații analoge celor satisfăcute de potențialele electrodinamice $\mathbf{A}$ și V. Aceasta rezultă direct din ecuațiile lui Maxwell. Este comod să deducem aceste ecuații și să studiem soluțiile lor mai întîi pentru un mediu idealizat riguros liniar, omogen, izotrop, conservativ, nedisipativ și fără memorie. Vom numi un astfel de mediu I_0. Ulterior, vom putea studia modificarea propagării undelor ca urmare a abaterii mediului de la caracteristicile ideale.

Observăm în primul rînd că în mediul ideal I_0 sînt valabile relațiile de material

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \ \sigma = 0 \ (\mathbf{J} = 0) \tag{2.6}$$

unde ε și μ sînt scalari independenți de poziție și timp.

Considerînd propagarea exclusiv în domeniul din afara surselor, putem pune $\rho = 0$. În acest caz, ţinînd seama de relaţiile (2.6), ecuaţiile lui Maxwell se vor scrie :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{(Ia)} \\ \nabla \mathbf{D} = 0 & \text{(Ib)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{(IIa)} \\ \nabla \mathbf{H} = 0. & \text{(IIb)} \end{cases}$$

Aplicînd ecuaţiei (IIa) încă o dată operatorul rotor şi ţinînd seama de (Ia) găsim

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \tag{2.7}$$

Însă

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

şi, în consecinţă,

$$\varepsilon \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{D}. \tag{2.8}$$

Introducînd (2.8) în (2.7) rezultă

$$\nabla^2 \mathbf{D} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.9}$$

Punînd constanta, cu dimensiunile unei viteze,

$$v = (\varepsilon\mu)^{-1/2} \tag{2.10}$$

ecuaţia (2.9) devine

$$\Box_v D = 0 \tag{2.11}$$

unde prin $\Box_v$ s-a notat operatorul $\nabla^2 - \partial^2/v^2 \partial t^2$.

În mod analog, aplicînd încă o dată operatorul rotor ecuaţiei (Ia) găsim, ţinînd seama de (IIb)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla(\nabla \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}.$$

Folosind acum ecuaţia (IIa) rezultă

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.12}$$

sau

$$\Box_v \mathbf{H} = 0. \tag{2.13}$$

În virtutea relaţiilor de material $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ şi $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, pentru mediul I_0, vom putea scrie relaţiile analoge

$$\Box_v \mathbf{E} = 0 \tag{2.14}$$

$$\Box_v \mathbf{B} = 0. \tag{2.15}$$

2.3. Unde armonice. Ecuația lui Helmholtz

Așa cum a reieșit din paragraful precedent, mărimile caracteristice cîmpului electromagnetic, cum ar fi componentele $\mathcal{A}_\lambda$ ale 4-potențialului sau componentele după x, y, z ale vectorilor **E**, **B**, **D** și **H** satisfac o aceeași ecuație cu derivate parțiale, care în vid se scrie

$$\sum_{\lambda \in \overline{1,4}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\lambda^2} = 0 \tag{2.16}$$

unde prin ψ se înțelege oricare din componentele unuia dintre vectorii de mai sus.

Vom încerca o soluție sub forma integralei Fourier

$$\psi(x_1, \ldots, x_4) = \int \mathrm{F}(K_1, \ldots, K_4) \exp\{\mathrm{i} \sum_\lambda K_\lambda x_\lambda\} \, \mathrm{d}\mathcal{K}. \tag{2.17}$$

Aici K_λ sînt componentele unui 4-vector

$$\mathcal{K} = (K_1, K_2, K_3, K_4) \tag{2.18}$$

pe care îl vom denumi *4-vectorul de undă*, semnificația sa fizică urmînd a fi stabilită ceva mai departe. Prin

$$\mathrm{d}\mathcal{K} = \prod_{\lambda \in \overline{1,4}} \mathrm{d}K_\lambda$$

s-a notat elementul de volum din spațiul subîntins de 4-vectorii de undă. Introducînd (2.17) în (2.16) se obține:

$$\int (\sum_\lambda K_\lambda^2) \mathrm{F}(K_1, \ldots, K_4) \exp\{\mathrm{i} \sum_\lambda K_\lambda x_\lambda\} \, \mathrm{d}\mathcal{K} = 0.$$

Această relație nu este însă identic satisfăcută decît dacă

$$\sum_\lambda K_\lambda^2 = 0. \tag{2.19}$$

Vom introduce vectorul tridimensional

$$\mathbf{K} = \mathbf{1}_x K_1 + \mathbf{1}_y K_2 + \mathbf{1}_z K_3 \tag{2.20}$$

și vom pune componenta K_4 a 4-vectorului $\mathcal{K}$ sub forma

$$K_4 = \frac{\mathrm{i}}{c} \omega \tag{2.21}$$

astfel încît (2.18) se va scrie

$$\mathcal{K} = \left(\mathbf{K}, \frac{\mathrm{i}}{c} \omega\right). \tag{2.22}$$

Condiția (2.19) devine acum

$$\mathbf{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{2.23}$$

iar soluția (2.17) se scrie

$$\psi(\mathbf{r},\ t) = \int \psi(\mathbf{K},\ \omega)\ \exp \mathrm{i}(\mathbf{K}\mathrm{r} - \omega t)\ \mathrm{d}\mathbf{K}\ \mathrm{d}\omega \tag{2.24}$$

unde $\mathrm{d}\mathbf{K} = \mathrm{d}K_x \mathrm{d}K_y \mathrm{d}K_z$. În principiu, forma funcției $\psi(\mathbf{K}, \omega)$ este determinată în fiecare problemă concretă de condițiile de frontieră ale problemei. Mai observăm că deși soluția (2.24) a fost obținută pentru propagarea în vid, totuși rămîne valabilă în orice mediu în care

$$K^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \tag{2.25}$$

deci în care este valabilă ecuația

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{2.26}$$

Unde armonice. Un tip de soluții foarte importante în multe probleme practice sînt soluțiile sub formă de unde armonice, pentru care

$$\psi(\mathbf{K},\ \omega) = \psi(\mathbf{K})\delta(\omega - \omega_0). \tag{2.27}$$

Introducînd această expresie în (2.24) găsim

$$\psi(\mathbf{r},\ t) = \int \psi(\mathbf{K})\ \exp(\mathrm{i}\mathbf{K}\mathrm{r})\ \mathrm{d}\mathbf{K} \int \delta(\omega - \omega_0)\ \exp(-\mathrm{i}\omega t)\ \mathrm{d}\omega.$$

Ținînd acum seama de proprietatea de filtrare a funcției generalizate Dirac obținem

$$\psi(\mathbf{r},\ t) = \Psi(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{2.28}$$

unde s-a notat

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int \psi(\mathbf{K})\exp(\mathrm{i}\mathbf{K}\mathbf{r})\ \mathrm{d}\mathbf{K}. \tag{2.29}$$

Ecuația lui Helmholtz. Să substituim (2.28) în ecuația (2.26). Se obține

$$\nabla^2(\Psi(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Psi(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)) = 0.$$

Dar operatorul ∇^2 acționează numai asupra funcției $\Psi(\mathbf{r})$, în timp ce operatorul $\partial^2/\partial t^2$ acționează numai asupra factorului $\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)$ și anume

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) = -\omega_0^2\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t).$$

Ținînd seama de acestea și observînd că $\omega_0^2/v^2 = K_0^2$, găsim

$$\{\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + K_0^2\Psi(\mathbf{r})\}\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) = 0.$$

Cum această ecuație nu este satisfăcută identic decît dacă factorul din acoladă este nul, rezultă

$$\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + K_0^2\Psi(\mathbf{r}) = 0. \tag{2.30}$$

Ecuația de mai sus, satisfăcută de $\Psi(\mathbf{r})$, este ecuația atemporală a undelor, denumită și ecuația lui Helmholtz.

Unde sferice. Sursele reale au întotdeauna întindere finită, iar la distanțe de sursă, mari în raport cu dimensiunile acesteia, sursa poate fi aproximată ca fiind cvasipunctiformă, adică practic localizată într-un punct. Undele

emise de sursele cvasipunctiforme și care se propagă în medii omogene și izotrope poartă numele de unde sferice, întrucît prezintă simetrie sferică în jurul sursei. Să considerăm un sistem de coordonate sferice cu originea în sursă. Operatorul ∇^2 are, în general, în raport cu aceste coordonate, expresia

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

Dar, întrucît mediul este omogen și izotrop, ca urmare a simetriei sferice, ∇^2 trebuie să depindă numai de r. Ecuația lui Helmholtz* (2.30) se particularizează așadar sub forma

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} r\Psi + K^2\Psi = 0$$

sau, punînd $u = r\Psi$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + K^2 u = 0. \tag{2.31}$$

Se vede ușor că soluția acestei ecuații este

$$u(r) = A\ \exp(\mathrm{i}Kr) + B\ \exp(-\mathrm{i}Kr)$$

sau, ținînd seama de (2.28),

$$\psi(r,t) = \frac{A}{r}\exp\mathrm{i}(Kr - \omega t) + \frac{B}{r}\exp[-\mathrm{i}(Kr + \omega t)]. \tag{2.32}$$

Primul termen descrie o undă armonică sferică progresivă (directă), iar cel de al doilea o undă armonică sferică regresivă (inversă).

Unda progresivă. Punînd $A = a\ \exp(\mathrm{i}\varphi_0)$, unde constantele a, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, expresia acestei unde se scrie.

$$\psi_p(r,\ t) = \frac{a}{r}\exp\mathrm{i}(Kr - \omega t + \varphi_0). \tag{2.33}$$

Se vede că funcția de undă ψ_p depinde esențial de mărimea

$$\varphi = Kr - \omega t + \varphi_0 = \omega\left(\frac{r}{v} - t\right) + \varphi_0$$

denumită *faza undei.*

Familia de suprafețe pentru care faza este constantă, deci

$$\frac{r}{v} - t = \text{const.}, \tag{2.34}$$

constituie familia suprafețelor *echifaze.* La momentul $t = t_0$ ecuația acestei familii se scrie $r - vt_0 = \text{const.}$ și întrucît și v este constant rezultă

$$r = \text{const.} \tag{2.35}$$

Suprafețele echifază formează o *familie de sfere concentrice,* cu centrul în sursă. Din acest motiv, astfel de unde se numesc sferice. Din ecuația (2.34) se obține prin diferențiere

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{2.36}$$

---

* În cele ce urmează s-a renunțat să se afecteze indicele zero mărimilor K și ω.

și, întrucît $r \in [0, \infty)$, rezultă $v > 0$. Constanta v este viteza cu care se deplasează suprafețele echifaze și se numește, din acest motiv, *viteza de fază*. Din (2.36) se vede că viteza de fază are același semn cu dr, ceea ce înseamnă că în cazul undei progresive undele diverg din sursă spre exterior. Undele de acest fel sînt denumite și unde directe.

În cazul undei regresive, faza are expresia $\varphi = \omega\left(\frac{r}{v} + t\right) + \varphi_0$, astfel că viteza de fază devine $v = -dr/dt$. Astfel de unde, denumite și unde inverse, converg așadar către sursă. În cele ce urmează ne vom referi numai la undele progresive.

Unde cilindrice. În cazul unei surse filiforme, rectilinii, de lungime practic infinită, cu o densitate omogenă de surse, unda prezintă simetrie cilindrică în jurul firului. Expresia generală a operatorului ∇^2 este

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

și se reduce în cazul mediilor omogene și izotrope la primii doi membri, astfel că ecuația lui Helmholtz (2.30) ia forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + K^2 \Psi = 0. \tag{2.37}$$

Ținînd seama de soluția acestei ecuații, se obține în definitiv

$$\psi(\rho, t) = A H_0^{(1)}(K\rho) \exp(-i\omega t) \tag{2.38}$$

unde $H_1^{(0)}(K\rho)$ este funcția Hankel de speța I și ordinul zero. La distanțe ceva mai mari de fir, este valabilă aproximația

$$\psi(\rho, t) = A \frac{\exp[i(k\rho - \omega t)]}{(k\rho)^{1/2}}. \tag{2.39}$$

2.4. Unde armonice plane

Să considerăm o sursă S, care generează o undă sferică. Ne propunem să investigăm această undă într-un domeniu de observație Δ, presupus pentru simplitate de forma unei sfere de rază $\rho \ll r_0$ unde r_0 este distanța de la sursă la centrul C al domeniului (fig. 2.1). Suprafețele echifaze Σ sînt sfere cu centrul în S ale căror raze de curbură $r \in [r_0 - \rho, r_0 + \rho]$. Datorită faptului că $r \gg \rho$, această familie de suprafețe poate fi aproximată, în interiorul domeniului Δ, prin familia de plane paralele Π, tangente la suprafețele Σ, în punctele situate pe dreapta care unește sursa cu centrul C. Ca urmare în fiecare punct $M \in \Delta$, la un moment oarecare t, faza este dată de expresia

$$\varphi(M, t) = \omega \frac{\xi}{v} - t$$

unde ξ este abscisa planului echifaz respectiv, măsurată pe direcția normală la această familie de planuri, iar $v = d\xi/dt$, viteza de deplasare a planelor

echifaze. Ținînd seama că $\omega/v = K$, putem scrie expresia funcției de undă pentru punctele din domeniul Δ sub forma

$$\psi(\xi, t) = \text{const} \exp[\mathrm{i}(K\xi - \omega t)]$$

întrucît în acest domeniu $r \approx r_0 = \text{const}$. Punînd constanta complexă sub forma $a \exp(\mathrm{i}\varphi_0)$, unde $a, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, rezultă în final

$$\psi(\xi, t) = a \exp[\mathrm{i}(K\xi - \omega t + \varphi_0)]. \tag{2.40}$$

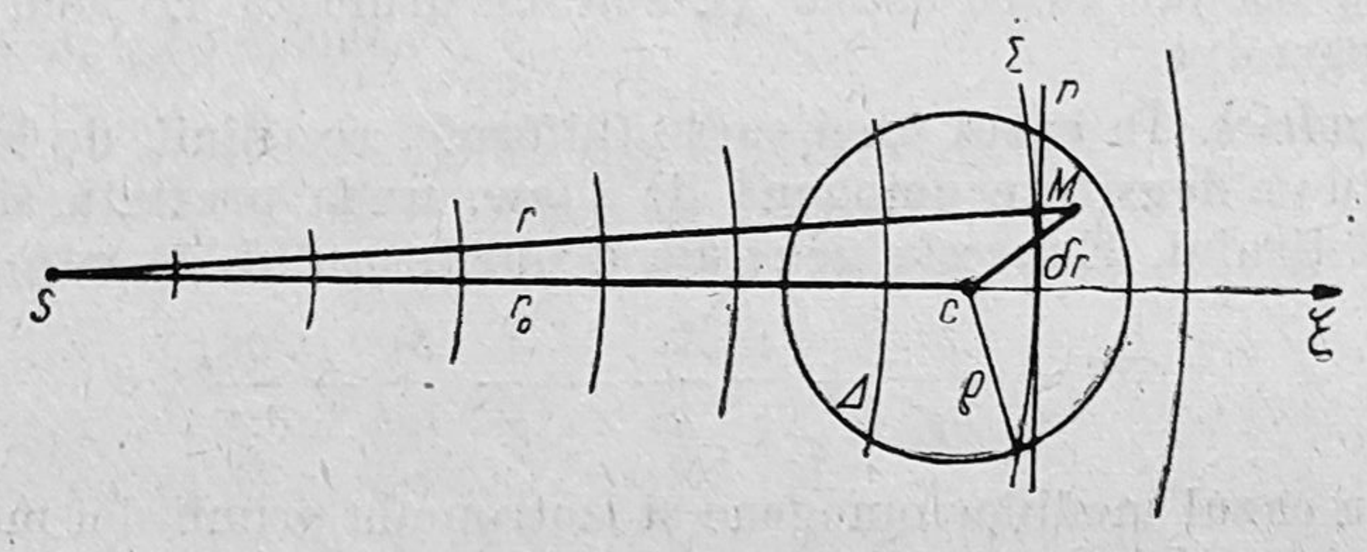


Fig. 2.1

O astfel de undă armonică ale cărei suprafețe echifaze sînt o familie de plane paralele se numește undă armonică plană. Direcția ξ, normală pe planele echifaze, este *direcția de propagare* a undei.

Este util să definim următoarele elemente ale undei armonice plane:

$\psi(\xi, t)$ — *valoarea instantanee* a mărimii reprezentate de funcția de undă;

$\varphi(\xi, t) = K\xi - \omega t + \varphi_0$ — *faza* undei;

φ_0 — *faza inițială* a undei;

$\omega = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ — exprimă viteza de variație a fazei și se numește *frecvența* undei;

$\mathbf{K} = \nabla \varphi$ — gradientul fazei, se identifică cu *vectorul de undă tridimensional*;

$I = \psi^* \psi = |\psi|^2 = a^2$ — *intensitatea* undei. Mărimea a este *amplitudinea* reală a undei.

Vom calcula acum componentele vectorului de undă $\mathbf{K}$ în raport cu axele x, y și z. Observînd că se poate scrie

$$\xi = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sînt cosinușii directori ai direcției de propagare ξ, în raport cu axele x, y, z, găsim

$$\mathbf{K} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\nabla\xi = (\mathbf{1}_x \cos\alpha + \mathbf{1}_y \cos\beta + \mathbf{1}_z \cos\gamma)K \tag{2.41}$$

sau

$$\mathbf{K} = \mathbf{1}_n K \tag{2.42}$$

unde $\mathbf{1}_n$ este versorul normalei la suprafețele echifaze, adică versorul direcției de propagare a undei. Ținînd seama de (2.25) mai putem scrie

$$\mathbf{K} = \frac{\omega}{v}\mathbf{1}_n. \tag{2.43}$$

Din (2.41) și (2.43) rezultă proiecțiile vectorului de undă

$$K_x = \frac{\omega}{v}\cos\alpha, \quad K_y = \frac{\omega}{v}\cos\omega\beta, \quad K_z = \frac{\omega}{v}\cos\gamma. \tag{2.44}$$

Periodicitățile undei. Relația (2.40) ne arată că ψ este o funcție dublu periodică și anume de t și de ξ. Astfel, la toate momentele $t_n = t + nT$, unde T este o durată constantă denumită *perioada* undei, iar $n \in \mathbb{Z}$, funcția ψ își recapătă în fiecare punct valoarea avută la momentul t. Dar această condiție

$$\psi(\xi, t) = \psi(\xi, t + nT)$$

nu este îndeplinită, conform relației (2.40) decît dacă $\omega nT = 2n\pi$ și deci

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{2.45}$$

De asemenea, în fiecare moment, funcția ψ ia aceeași valoare în toate punctele de abscisă $\xi_n = \xi + n\lambda$, unde $n \in \mathbb{Z}$, iar λ este o distanță constantă denumită *lungime de undă*. Condiția

$$\psi(\xi, t) = \psi(\xi + n\lambda, t) \Rightarrow \frac{\omega}{v} n\lambda = 2n\pi$$

și, întrucît $K = \omega/v$, urmează

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = vT. \tag{2.46}$$

Așa cum reiese din cea de-a doua relație, lungimea de undă este chiar drumul parcurs de planul de fază constantă, în timp de o perioadă.

În încheiere, menționăm în afara expresiei (2.40) a undei armonice plane

$$\psi(\xi, t) = a\ [\exp(i\,K\xi - \omega t + \varphi_0)]$$

și următoarele două forme ale acestei expresii. Astfel, ținînd seama de relația $K = \omega/v$, găsim

$$\psi(\xi, t) = a \exp i\left[\omega\left(\frac{\xi}{v} - t\right) + \varphi_0\right]. \tag{2.47}$$

Expresii analoge pot fi obținute în raport cu coordonatele x, y, z. Observînd că putem scrie

$$\frac{\omega}{v}\xi = \frac{\omega}{v}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = \frac{\omega}{v}\mathbf{1}_n\mathbf{r} = \mathbf{Kr} \tag{2.48}$$

obținem

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a\ \exp[i(\mathbf{Kr} - \omega t + \varphi_0)] \tag{2.49}$$

respectiv

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a\ \exp\left\{i\left[\omega\left(\frac{\mathbf{1}_n\mathbf{r}}{v} - t\right) + \varphi_0\right]\right\}. \tag{2.50}$$

2.5. **Unde electromagnetice armonice plane**

Așa cum s-a arătat în paragrafele precedente, într-un mediu ideal I_0, mărimile electrice și magnetice **A**, **E**, **B**, **D** și **H** satisfac o aceeași ecuație de derivate parțiale de tipul $\Box_v \mathbf{F} = 0$. Între soluțiile acestei ecuații prezintă interes mai ales cele sub forma unor unde armonice plane

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \exp[\mathrm{i}(\mathbf{Kr} - \omega t)] \tag{2.51}$$

unde $\mathbf{F}_0$ este o amplitudine, în general complexă. Semnificația unor astfel de soluții este ușor de înțeles dacă ne reamintim că o funcție de undă de o formă oarecare (vezi de exemplu relația (2.24)) poate fi exprimată ca o integrală Fourier, care descrie suprapunerea unei mulțimi nenumerabile de unde armonice.

Observăm că efectuînd gradientul, respectiv derivata parțială în raport cu timpul a soluției (2.51), găsim ecuațiile cu valori proprii de mai jos

$$-\mathrm{i}\nabla \mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{F} \tag{2.52}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} = \omega \mathbf{F}$$

de unde rezultă valorile proprii ale operatorilor autoadjuncți

$$-\mathrm{i}\nabla \to K\mathbf{1}_n, \qquad \mathrm{i}\partial/\partial t \to \omega \tag{2.53}$$

unde $\mathbf{1}_n$ este versorul direcției de propagare, normală la planele echifaze. Menționăm că aceste valori proprii se obțin pentru mediul ideal I_0. Să înlocuim (2.53) în ecuațiile lui Maxwell (I) și (II) din § 2.2

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{(Ia))} \\ \nabla \mathbf{D} = 0 & \text{(Ib)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(IIa)} \\ \nabla \mathbf{B} = 0. & \text{(IIb)} \end{cases}$$

Obținem sistemul de ecuații algebric

$$\begin{cases} K\mathbf{1}_n \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} & \text{(I'a)} \\ K\mathbf{1}_n \mathbf{D} = 0 & \text{(I'b)} \end{cases} \qquad \begin{cases} K\mathbf{1}_n \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} & \text{(II'a)} \\ K\mathbf{1}_n \mathbf{B} = 0. & \text{(II'b)} \end{cases}$$

Din ecuația (I'b) rezultă $\mathbf{1}_n \mathbf{D} = 0$, de unde tragem concluzia că vectorul **D** este perpendicular pe direcția de propagare, deci unda electrică este transversală. Analog din ecuația (II'b) rezultă $\mathbf{1}_n \mathbf{B} = 0$; așadar, vectorul **B** este și el perpendicular pe direcția de propagare, deci și unda de inducție magnetică este transversală. În sfîrșit, menționăm că în cazul mediilor disipative, transversalitatea va trebui reanalizată.

Dacă în ecuația (I'a) împărțim prin ω și ținem seama că $1/v = K/\omega$, obținem

$$\mathbf{D} = \frac{1}{v}\mathbf{H} \times \mathbf{1}_n. \tag{2.54}$$

De aici rezultă că vectorul **D** este perpendicular pe **H**, deci **D**, **H** și $\mathbf{1}_n$ formează un triedru drept în ordinea **D**, **H**, $\mathbf{1}_n$. Din (II'a) obținem, în același mod

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v}\mathbf{1}_n \times \mathbf{E}. \tag{2.55}$$

Vectorii $\mathbf{B}$, $\mathbf{1}_n$ și $\mathbf{E}$ formează și ei un triedru în ordinea $\mathbf{B}$, $\mathbf{1}_n$, $\mathbf{E}$. Ținînd seama că în mediul ideal I_0: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $v = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$, din (2.54) obținem imediat

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mathbf{H} \times \mathbf{1}_n. \tag{2.56}$$

Aici apare o nouă mărime de material caracteristică mediului în care are loc propagarea și anume *impedanța intrinsecă a mediului*

$$\zeta = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \tag{2.57}$$

Denumirea este justificată, deoarece — așa cum se poate verifica ușor — ζ are dimensiunile unei impedanțe. Această mărime se va măsura așadar în ohmi. În particular, în vid,

$$\zeta_0 = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} = 376{,}7\ \Omega \tag{2.58}$$

este constanta universală numită *impedanță intrinsecă a vidului.*

Observăm că în mediul idealizat I_0 între norma vectorului $\mathbf{E}$ și cea a vectorului $\mathbf{H}$ există, conform expresiei (2.56), relația

$$\varepsilon^{1/2} E = \mu^{1/2} H. \tag{2.59}$$

Relații energetice. Conform postulatului lui Maxwell, densitatea volumică de energie a cîmpului electromagnetic este

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{BH}). \tag{2.60}$$

Întrucît pentru mediul I_0 există relațiile $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ și $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

sau, ținînd seama de (2.59),

$$w = \varepsilon E^2 = \mu H^2. \tag{2.61}$$

De aici tragem concluzia că atît intensitatea undei electrice, cît și cea a undei magnetice sînt proporționale, pînă la o constantă de material, cu densitatea volumică de energie a cîmpului electromagnetic.

O altă mărime energetică importantă este vectorul Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = S\mathbf{1}_s. \tag{2.62}$$

Comparînd această definiție cu expresia (2.56), rezultă imediat că în cazul mediului I_0, direcția și sensul de transfer al energiei date de versorul $\mathbf{1}_s$ coincid cu direcția și sensul de propagare a suprafețelor echifaze date de versorul $\mathbf{1}_n$. Această concluzie nu este în general valabilă în alte medii. Dacă $\mathbf{E}$ și $\mathbf{H}$ se exprimă ca unde armonice plane, scrise sub formă exponențială, pentru a asigura realitatea vectorului Poynting trebuie să punem

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = |E_0||H_0|\mathbf{1}_s = \frac{1}{\zeta}|\mathbf{E}_0|^2\mathbf{1}_s = \zeta|\mathbf{H}_0|^2\mathbf{1}_s. \tag{2.63}$$

2.6. Domeniul undelor electromagnetice

Domeniul undelor electromagnetice cunoscute în prezent este foarte întins, lungimea de undă λ a acestora fiind cuprinsă într-un interval de valori extrem de larg. În raport cu modul de obținere și cu efectele pe care le produc, se obișnuiește împărțirea domeniului undelor electromagnetice în subdomenii după cum urmează :

a) *Undele hertziene* ($\lambda > 1$ m). Aceste unde se produc cu ajutorul circuitelor oscilante obișnuite și se studiază de asemenea cu ajutorul circuitelor electrice obișnuite. Sînt utilizate în telefonia pe fire și în radiocomunicații. În acest subdomeniu al undelor hertziene, se cuprind :

— undele lungi ($\lambda > 10^3$ m) ;

— undele medii ($\lambda \in [10^2, 10^3$ m)] ;

— undele scurte ($\lambda \in [10, 10^2$ m]) ;

— undele ultrascurte (UKW) ($\lambda \in [1, 10$ m]).

Transmisiile de televiziune se efectuează în subdomeniul undelor ultrascurte.

b) *Microundele* ($\lambda \in [10^{-3}, 1$ m]) se produc în cavități rezonante și se studiază tot cu ajutorul acestora. În prezent microundele și-au găsit aplicații mai ales în radiolocație (dispozitivele RADAR).

c) *Radiațiile infraroșii* ($\lambda \in [7{,}8 \cdot 10^{-7}, 10^{-3}$ m]). Se emit în procesele de radiație termică și prin descărcări în gaze. Optica (prisme, lentile etc.) folosită este asemănătoare celei utilizate pentru lumină, dar confecționată din sare gemă. Se detectează prin efectul de încălzire produs pe suprafețele pe care cad. În acest scop se folosesc termometre bazate fie pe variația cu temperatura a rezistenței unui fir metalic (bolometre), sau a unui bastonaș semiconductor (termistori), fie pe efectul termoelectric. Radiațiile infraroșii cu $\lambda < 1\,200$ nm pot fi studiate de asemenea prin fotografiere folosind plăci fotografice special sensibilizate, sau cu celule fotoelectrice de tip special.

d) *Radiațiile vizibile* ($\lambda \in [4 \cdot 10^{-7}, 7{,}8 \cdot 10^{-7}$ m]). Aceste radiații, deși ocupă un interval de lungimi de undă extrem de îngust, sînt totuși foarte importante, deoarece impresionează organul vizual omenesc. Se produc în procesele de radiație termică, sau în descărcări în gaze, precum și în fenomenele de fluorescență (emisia unor radiații ca urmare a iluminării unor corpuri cu alte radiații, în general cu lungime de undă mai mică). Se folosește optică de sticlă, iar detectarea se face cu ochiul liber, cu celule fotoelectrice, sau prin fotografiere.

e) *Radiațiile ultraviolete* ($\lambda \in [10^{-9}, 4 \cdot 10^{-7}$ m]). Aceste radiații se produc în tuburi de descărcări în gaze, ca urmare a tranzițiilor cuantice efectuate de electronii de pe pătura periferică. Fiind puternic absorbite în sticlă, pentru studiul radiațiilor cu $\lambda > 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ m se folosește optică de cuarț, iar pentru radiații cu $\lambda \in [1{,}2 \cdot 10^{-7}, 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ m] optică de fluorină. Radiațiile ultraviolete cu $\lambda < 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ m formează subdomeniul denumit pe scurt VUV (vaccuum ultraviolet). Aceste radiații sînt absorbite practic de toate materialele, inclusiv aerul. Studiul radiațiilor VUV se efectuează în vid, lentilele și rețelele optice prin transmisie fiind înlocuite prin oglinzi și rețele prin reflexie. Detecția acestor radiații se face prin fotografiere, celule fotoelectrice sau fotomultiplicatori. În particular, în cazul radiației VUV se folosesc plăci fotografice speciale, fără gelatină, care ar absorbi aceste radiații.

f) *Radiațiile X și radiațiile* γ ($\lambda < 10^{-8}$ m). Radiațiile se numesc Roentgen sau X, dacă se produc prin tranzițiile cuantice ale electronilor din păturile profunde ale atomilor, procese care au loc în tuburi speciale. Dacă se produce radiație ca urmare a unor tranziții cuantice nucleare, sau în cursul unor procese fie nucleare, fie de interacțiune între particulele elementare, se numește radiație γ. Fenomenul cel mai potrivit pentru studiul acestor radiații este difracția în cristale, iar detecția se realizează fie prin fotografiere, fie prin efect Compton, fie cu ajutorul contorilor de particule.

Indiferent de subdomeniul în care sînt situate, radiațiile mai sus discutate au aceeași natură electromagnetică. S-a putut arăta experimental, pentru întregul domeniu al undelor electromagnetice, că undele situate la frontiera dintre două subdomenii sînt identice, independent de faptul că au fost produse prin metode specifice unuia sau celuilalt dintre subdomeniile adiacente. În același timp, toate fenomenele pe care le prezintă undele electromagnetice, oricare ar fi subdomeniul căruia aparțin, se pot explica în cadrul unei teorii unitare a cîmpului electromagnetic, atît macroscopic, cît și microscopic.

2.7. Propagarea perturbațiilor de durată finită

Perturbații de durată finită. Orice perturbație reală este de durată limitată, aceasta începînd la un moment inițial t_1 și încheindu-se la momentul final $t_2 = t_1 + \Delta t$. Chiar dacă în intervalul cuprins între t_1 și t_2, valoarea instantanee a oscilației are forma $\psi(t) = a \exp(-i\omega t)$, totuși oscilația nu poate fi considerată armonică deoarece în intervalele $(t_1 - 0,\ t_1 + 0)$ respectiv $(t_2 - 0,\ t_2 + 0)$ apar fenomene tanzitorii care complică sensibil forma

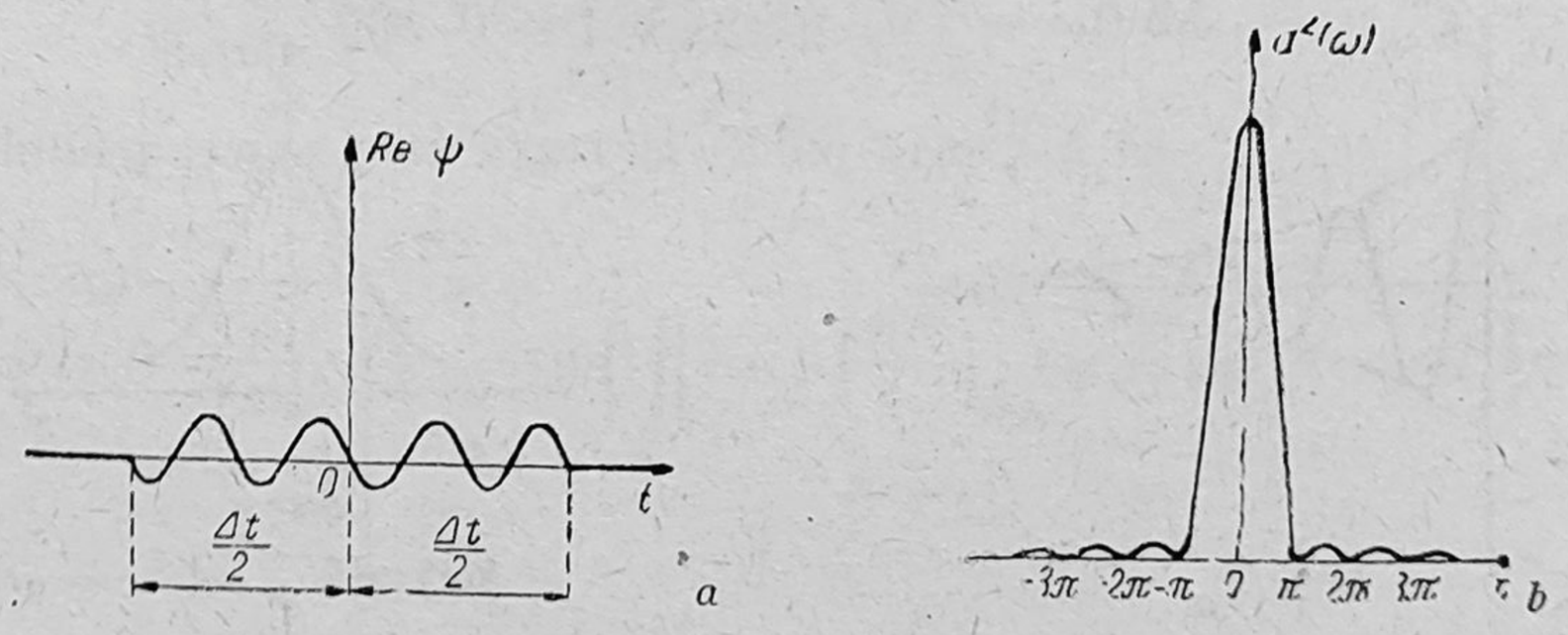


Fig. 2.2

funcției de undă. Să considerăm o oscilație reală a cărei grafic este dat de figura 2.2, a și a cărei expresie matematică este

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{\Delta t} \exp\ (-i\omega_0 t) & t \in \left[-\dfrac{\Delta t}{2},\ +\dfrac{\Delta t}{2}\right] \\ 0 & t \in \left(-\infty,\ -\dfrac{\Delta t}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\Delta t}{2},\ \infty\right). \end{cases} \tag{2.64}$$

Această funcție îndeplinește condițiile de a fi reprezentată prin integrala Fourier

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega.$$

Aplicînd formula Mellin-Fourier găsim

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \exp(i\omega t)\, dt$$

sau, introducînd expresia (2.64) a lui $\psi(t)$

$$a(\omega) = \frac{a_0}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \exp[i(\omega - \omega_0)t]\, dt.$$

Efectuînd integrarea obținem

$$a(\omega) = a_0 \frac{\sin \Omega}{\Omega} \tag{2.65}$$

unde s-a notat $\Omega = (\omega - \omega_0)\Delta t/2$. În figura 2.2, b se arată dependența lui $a^2(\omega)$ de frecvența ω. În figura 2.3, a se arată o altă formă de perturbație finită, denumită perturbație lorentziană, a cărei expresie este

$$\psi(t) = \begin{cases} a_0 \exp\left(-\frac{\Gamma}{2} t\right) \exp(-i\omega_0 t) & t \in [0, \infty) \\ 0 & t \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

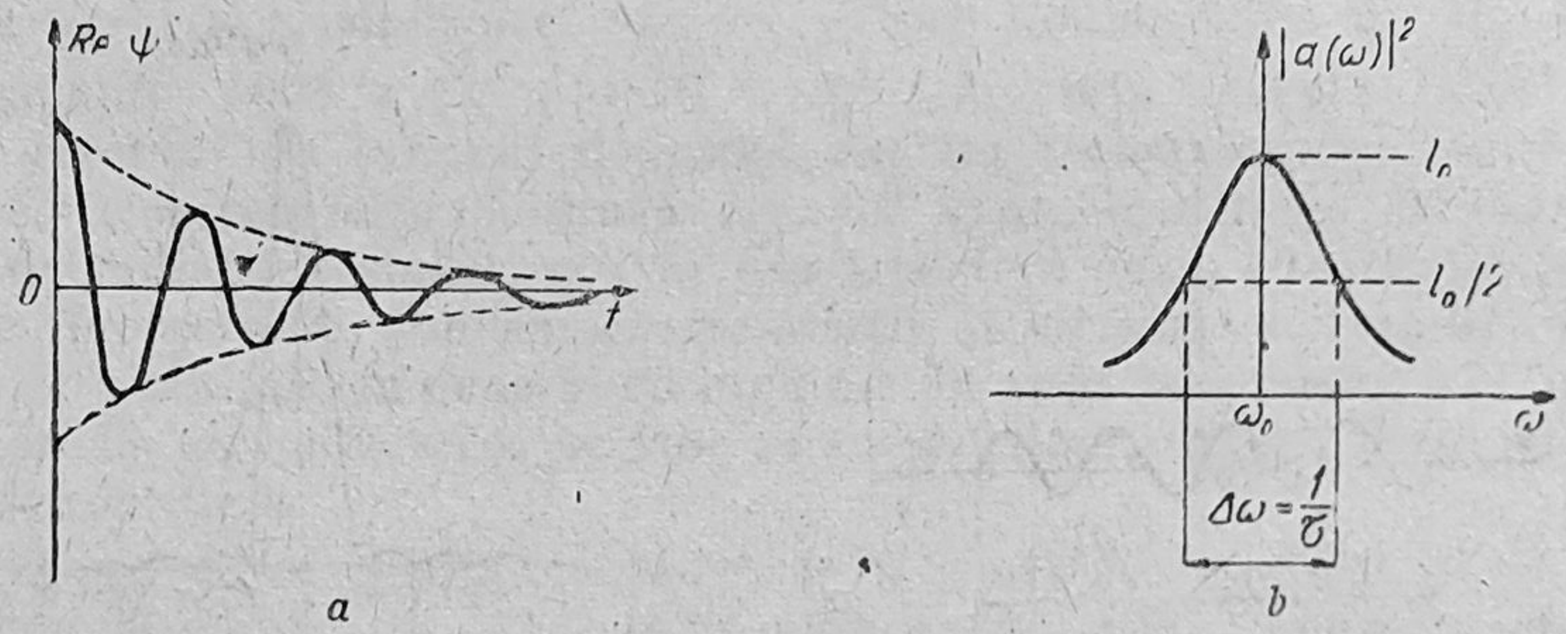


Fig. 2.3

Folosind același mod de calcul rezultă

$$|\, a(\omega)\,|^2 = \frac{a_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{2.66}$$

Forma dependenței amplitudinii $|\, a(\omega)^2\,|$ de ω este dată în figura 2.3,b.

Discuția de mai sus ne arată că perturbațiile de durată finită nu constau dintr-o singură oscilație de frecvență bine definită, ci din suprapunerea unei mulțimi nenumerabile de oscilații a căror frecvență acoperă un anumit interval. Referindu-ne la diagrama din figura 2.2,b se observă, de exemplu, că $a(\omega)$ are valori semnificative doar pentru $\Omega \in (-\pi, \pi)$. Între durata Δt a perturbației și imprecizia $\Delta\omega$ a frecvenței există relația

$$\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi. \tag{2.67}$$

De aici se vede că pentru a obține o perturbație riguros armonică ($\Delta\omega \to 0$), ar fi necesar ca aceasta să aibă o durată infinită.

Grupul de unde. Să considerăm o perturbație de durată finită și, fără a diminua generalitatea concluziilor, să admitem pentru simplificare că amplitudinea $a(\omega)$ depinde de frecvență în modul următor (fig. 2.4)

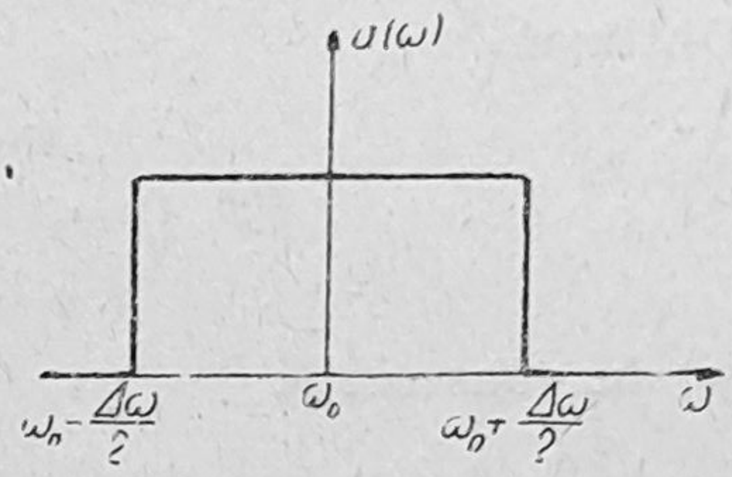


Fig. 2.4

$$a(\omega) = \begin{cases} \psi_0/\Delta\omega = \text{const.} & \omega \in \left[\omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2},\ \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2}\right] \\ 0 & \omega \in \left(-\infty,\ \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2}\right) \cup \left(\omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2},\ \infty\right). \end{cases} \tag{2.68}$$

În ipoteza că $\Delta\omega$ este mic, vom dezvolta în serie vectorul de undă $K(\omega)$ în jurul valorii ω_0, limitîndu-ne la primii termeni

$$K(\omega) = K(\omega_0) + \left(\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0) + \ldots$$

Vom pune funcția de undă sub forma integralei Fourier

$$\psi(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \exp \mathrm{i}(Kx - \omega t)\, \mathrm{d}\omega. \tag{2.69}$$

Substituind pe $a(\omega)$ prin expresia (2.68) urmează că

$$\psi(x,\ t) = \frac{\psi_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \exp\left\{\mathrm{i}\left\{\left[K_0 + \left(\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0)\right]x - \omega t\right\}\right\}\mathrm{d}\omega$$

unde $K_0 = K(\omega_0)$. Notînd

$$f(x,\ t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\omega\Delta}{2}} \exp\left\{\mathrm{i}\left\{\left[\left(\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right](\omega - \omega_0)\right\}\right\}\mathrm{d}\omega \tag{2.70}$$

găsim

$$\psi(x,\ t) = \frac{\psi_0}{\Delta\omega} \exp[\mathrm{i}(K_0 x - \omega_0 t)] f(x,\ t).$$

Pentru a integra expresia $f(x,\ t)$, introducem mai întîi notaţiile

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]$$

$$\omega - \omega_0 = q$$

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}q.$$

Obţinem

$$f(x,\ t) = \int_{q=-\Delta\omega/2}^{q=\Delta\omega/2} \exp[\mathrm{i}(2\xi/\Delta\omega)q]\ \mathrm{d}q = \frac{\sin\ \xi}{\xi}\,\Delta\omega$$

şi, în consecinţă,

$$\psi(x,\ t) = \psi_0\ \exp[\mathrm{i}(K_0 x - \omega_0 t)]\cdot \frac{\sin\ \xi}{\xi}. \qquad (2.71)$$

O undă de această formă se numeşte grup de unde şi corespunde unei unde armonice plane de frecvenţă ω_0 şi vector de undă K_0, modulată de factorul $\sin \xi/\xi$. Forma funcţiei $\sin \xi/\xi$ este dată de figura 2.5 şi, după cum se

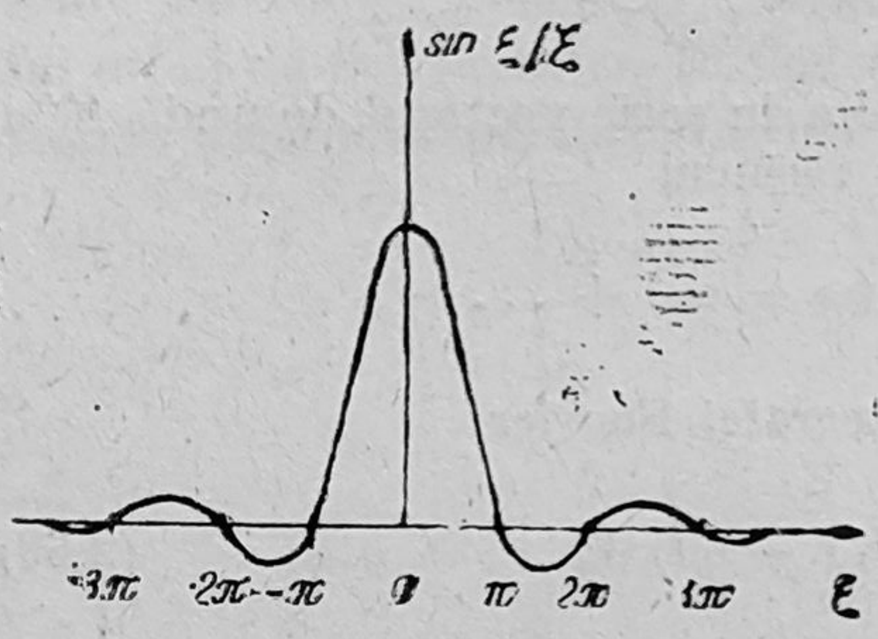


Fig. 2.5

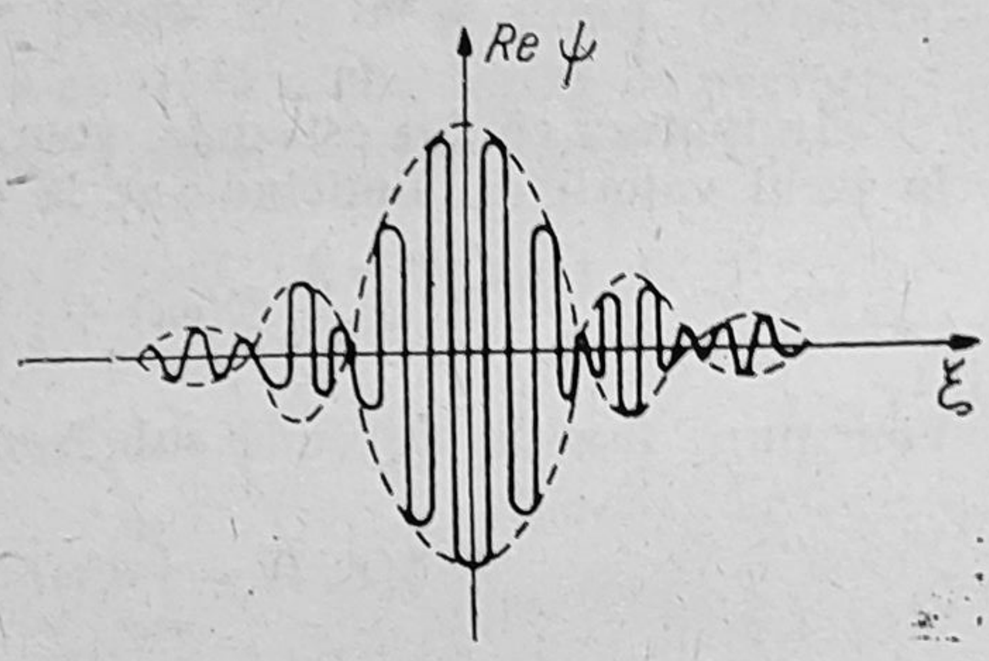


Fig. 2.6

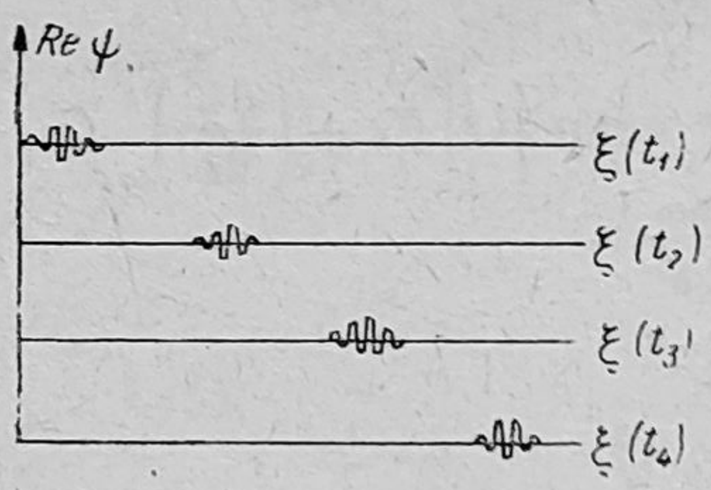


Fig. 2.7

vede, aceasta are un maxim principal pentru $\xi = 0$, cuprins între abscisele $\xi = \pm\pi$. Aşa cum rezultă din figura 2.6 grupul de unde consistă dintr-o perturbaţie localizată pe o distanţă δx. Deplasarea grupului de undă în timp este arătată în figura 2.7 în care s-a figurat poziţia undei descrise de Re ψ, la cîteva momente.

Viteza de grup. Prin definiție viteza de grup este raportul dintre distanța δx parcursă de maximul grupului de undă și durata δt în care s-a parcurs această distanță. Scriind ecuația maximului grupului de undă

$$\xi_u = \frac{\Delta\omega}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\delta x - \delta t\right] = 0$$

rezultă

$$V_g = \frac{\delta x}{\delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}K}\right)_{\omega_0}. \tag{2.72}$$

Forma vectorială a acestei expresii este

$$\mathbf{V}_g = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\mathbf{K}}\right)_{\omega_0}.$$

Relația lui Rayleigh. În mediile dispersive, viteza de fază v depinde de lungimea de undă și întrucît $K = 2\pi/\lambda$, v depinde și de această mărime. În acest caz

$$V_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}K}(Kv) = v + K\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}K}.$$

Pe de altă parte

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}K}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}K}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}K}\frac{K}{\lambda}$$

de unde rezultă relația lui Rayleigh

$$V_g = v - \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{2.73}$$

În mediile nedispersive $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda = 0$ și deci viteza de grup este egală cu viteza de fază.

Din (2.72) se mai observă că ținînd seama de (2.67)

$$\delta x\ \delta K = \delta\omega\ \delta t \approx 2\pi \tag{2.74}$$

adică cu cît nedeterminarea δK asupra vectorului de undă este mai mare cu atît grupul de unde este mai localizat. În încheiere, semnalăm că relațiile de mai sus sînt analoge relațiilor lui Heisenberg din fizica cuantică. Într-adevăr, în fizica cuantică unei particule de impuls p și energie $\mathcal{E}$ i se asociază o undă de vector de undă $K = p/\hbar$ și de frecvență $\omega = \mathcal{E}/\hbar$, unde $\hbar$ este constanta lui Planck. Multiplicînd relația (2.74) cu această constantă găsim

$$\delta x\ \delta p \approx 2\pi\hbar$$

$$\delta\mathcal{E}\ \delta t \approx 2\pi\hbar$$

adică tocmai relațiile lui Heisenberg.

2.8. Efectul Doppler-Fizeau

Să considerăm un referențial inerțial **R′** și o sursă solidară cu acest referențial. Sursa emite o radiație electromagnetică sub forma unei unde armonice plane. Frecvența undei măsurată din referențialul propriu **R′** este $\omega' = \omega_0$. Vom admite că direcția de propagare a undei face cu axa Ox' a referențialului **R′** unghiul α', Unda este recepționată de un observator solidar cu un alt referențial **R**. Caracteristicile undei măsurată din **R** sînt frecvența ω, vectorul de undă **K** și unghiul α, format de direcția de propagare cu axa Ox, comună cu Ox'. Presupunem că ambele referențiale se află în translație relativă, de-a lungul axei x-ilor, cu viteză de transport constantă V (fig. 2.8). Ne interesează să stabilim relația dintre ω_0 și ω. În acest scop, este util să observăm că între matricea reprezentantă a 4-vectorului de undă $\mathcal{K}'$ și matricea reprezentantă a 4-vectorului $\mathcal{K}$ există relația

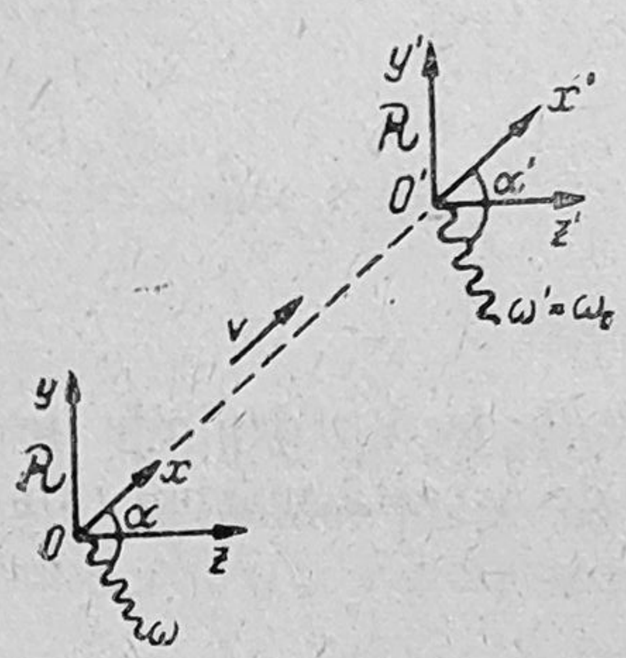


Fig. 2.8

$$\check{\mathcal{K}}' = \check{\alpha}\check{\mathcal{K}}$$

unde $\check{\alpha}$ este matricea transformării Lorentz speciale. Așadar

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_0}{c}\cos\alpha' \\ \frac{\omega_0}{c}\cos\beta' \\ \frac{\omega_0}{c}\cos\gamma' \\ \mathrm{i}\frac{\omega_0}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} & 0 & 0 & \mathrm{i}\frac{V}{c}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\frac{V}{c}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} & 0 & 0 & \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c}\cos\alpha \\ \frac{\omega}{c}\cos\beta \\ \frac{\omega}{c}\cos\gamma \\ \left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\right) \end{pmatrix}.$$

Calculînd componenta K_4', găsim

$$\mathrm{i}\frac{\omega_0}{c} = \frac{-\mathrm{i}\frac{V}{c}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{\omega}{c}\cos\alpha + \frac{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\frac{1-\frac{V}{c}\cos\alpha}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

sau

$$\omega = \omega_0 \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1-\frac{V}{c}\cos\alpha}. \qquad (2.75)$$

Cazuri particulare :

a) *Efectul longitudinal* constituie cazul în care unda este recepționată după direcția Ox ($\alpha = 0$). În consecință

$$\omega = \omega_0 \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 + \frac{V}{c}} = \omega_0 \left(\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}\right)^{1/2}. \tag{2.76}$$

Reprezentînd grafic pe ω în funcție de v/c obținem diagrama din figura 2.9.

Se observă că pentru $V = 0$, avem $\omega = \omega_0$; dacă sursa se îndepărtează de observator ; $V > 0$ și frecvența măsurată de acesta scade, micșorarea frecvenței fiind cu atît mai pronunțată cu cît viteza V a sursei se apropie de viteza luminii. Din contră, dacă sursa se apropie de observator $V < 0$, frecvența undei percepute crește, cu atît mai mult cu cît viteza V este mai apropiată de viteza luminii, ω tinzînd către infinit cînd $V \to c$.

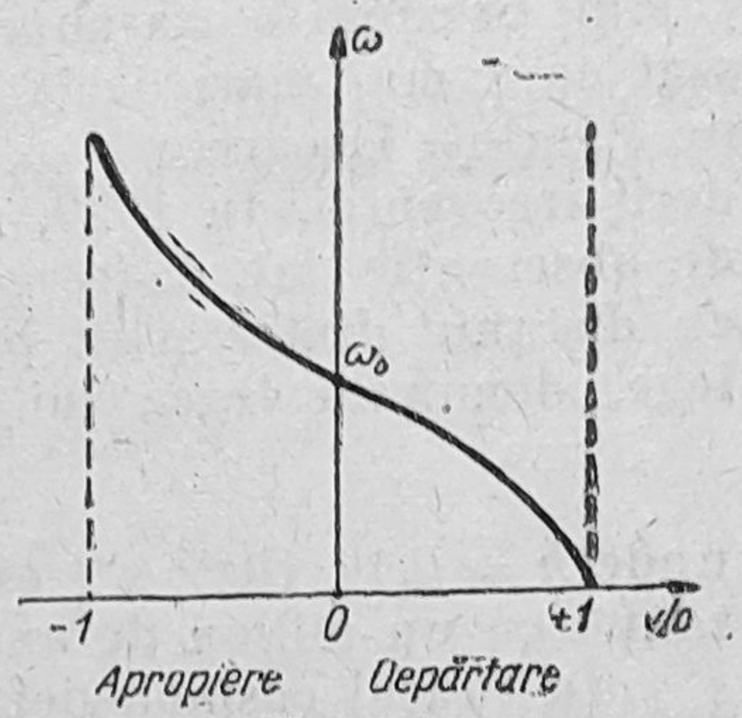


Fig. 2.9

b) *Efectul transversal.* Unda este recepționată după o direcție perpendiculară pe direcția deplasării ; în acest caz, cînd $\alpha = \pi/2$ se obține

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}. \tag{2.77}$$

Se observă că $\omega < \omega_0$, indiferent de faptul că sursa se depărtează sau se apropie de observator (fig. 2.10).

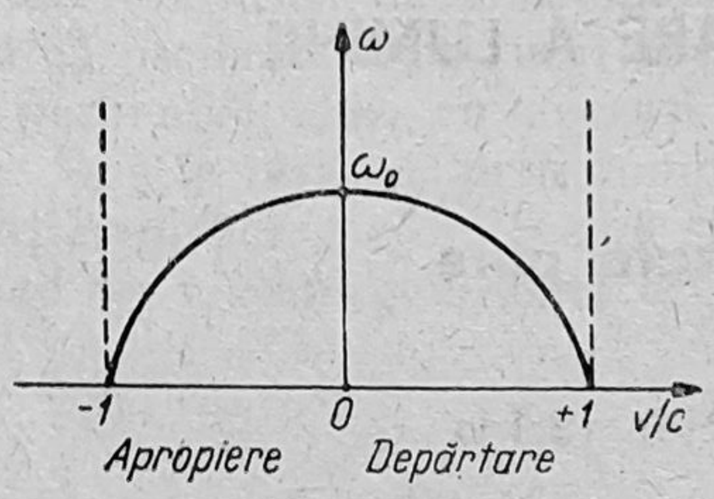


Fig. 2.10

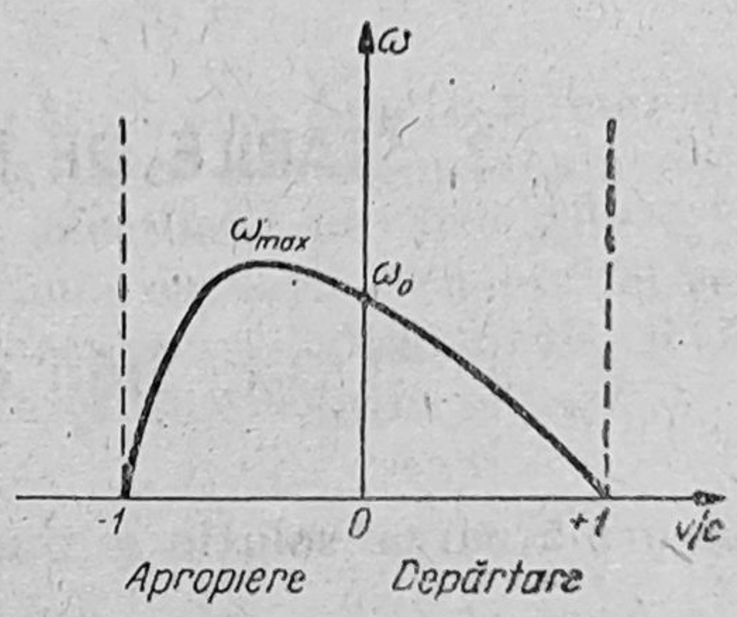


Fig. 2.11

În cazul general, cînd $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, dependența lui ω de viteza de transport este cea arătată în figura 2.11. Se observă că la depărtarea relativă a sursei de observator $\omega < \omega_0$, iar la apropierea acestora există o viteză critică pentru care ω este maxim, iar după aceea, cînd $V/c \to 1$, frecvența scade din nou. Condiția care dă valoarea frecvenței maxime este

$$\frac{d\omega}{d(V/c)} = 0.$$

După calcule simple, rezultă că maximul se obține cînd $\frac{V}{c} = \cos\alpha$ și, în consecință,

$$\omega_{\text{Max}} = \frac{\omega_0}{\sin\alpha}. \tag{2.78}$$

De aici mai rezultă că în cazul efectului longitudinal ($\sin\alpha = 0$) $\omega_{\text{Max}} = \infty$, iar în cazul efectului transversal ($\sin\alpha = 1$) $\omega_{\text{Max}} = \omega_0$, așa cum de altfel reiese și din figura 2.9 și 2.10*.

Efectul Hubble. În 1912, Slipher observă că liniile spectrale emise de galaxii prezintă o așa-numită „deplasare spre roșu", adică lungimile de undă sînt ceva mai mari decît cele ale acelorași linii spectrale emise de surse de pe Pămînt. Deoarece $\lambda = 2\pi c/\omega$, creșterea lungimii de undă corespunde scăderii frecvenței. În 1929, Hubble trage concluzia că, în raport cu un punct de observație dat, toate galaxiile se îndepărtează cu o viteză proporțională cu distanța dintre acest punct de observație și galaxie. Matematic, această lege, denumită legea lui Hubble, se scrie

$$v = hl \tag{2.79}$$

unde $h = 0{,}16 \cdot 10^{-17}$ s^{-1} este constanta lui Hubble. Pentru o creștere a distanței cu un milion de ani lumină rezultă o creștere a vitezei de 15 km/s.

În cadrul cosmologiei relativiste se pot elabora modele de Univers nestaționare cu raza de curbură dependentă de timp. Astfel, s-a putut elabora un model de „Univers în expansiune" a cărui rază crește mereu și un model de „Univers pulsatoriu" a cărui rază crește pînă la atingerea unei valori maxime, după care descrește pînă la zero, ciclul repetîndu-se. Astfel de modele, deși interesante, mai ales din punctul de vedere matematic, nu poartă totuși girul verificării practice.

3. STĂRILE DE POLARIZARE A LUMINII

3.1. Stări de polarizare pure

Fie următoarea soluție a ecuației undelor (2.14)

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\mathbf{Kr} - \omega t)] \tag{3.1}$$

unde $\tilde{\mathbf{E}}_0$ este amplitudinea complexă**. Intensitatea cîmpului electric este însă o mărime fizică și anume partea reală a expresiei (3.1)

$$\mathbf{E} = \text{Re}\,\tilde{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\mathbf{Kr} - \omega t)] \tag{3.2}$$

---

* Diagramele din figurile 2.9, 2.10, 2.11 și discuțiile respective sînt reproduse după articolul lui Marian Nicolae, Rev. de fizică și chimie, **A**, anul **8**, nr. 11, p. 419 (1971).

** Ori decîte ori este neapărat necesar să se facă distincția între mărimile complexe și cele reale, se va pune semnul $\sim$ deasupra literei care simbolizează o mărime complexă.

Să exprimăm amplitudinea complexă $\tilde{\mathbf{E}}_0$ sub forma

$$\tilde{\mathbf{E}}_0^2 = |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \exp(i2\alpha) \tag{3.3}$$

de unde rezultă

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = \tilde{\mathbf{c}} \exp(i\alpha).$$

Punînd $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, relația (3.3) devine

$$\tilde{\mathbf{E}}_0^2 = (\mathbf{a} - i\mathbf{b})^2 \exp(i2\alpha). \tag{3.4}$$

Comparînd acum (3.3) cu (3.4) urmează că $(\mathbf{a} - i\mathbf{b})^2$ este un număr real, ceea ce implică $\mathbf{ab} = 0$, adică perpendicularitatea vectorilor **a** și **b**. Relația (3.2) devine

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\{(\mathbf{a} - i\mathbf{b}) \exp[i(\mathbf{Kr} - \omega t + \alpha)]\} =$$

$$= \mathbf{a} \cos(\mathbf{Kr} - \omega t + \alpha) + \mathbf{b} \sin(\mathbf{Kr} - \omega t + \alpha)$$

sau, notînd $\tau = \mathbf{Kr} - \omega t + \alpha$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{a} \cos\tau + \mathbf{b} \sin\tau. \tag{3.5}$$

Alegînd un triedru drept pentru care versorii axelor sînt orientați astfel încît

$$\mathbf{1}_\xi = \frac{\mathbf{a}}{a}, \quad \mathbf{1}_\eta = \frac{\mathbf{b}}{b'}, \quad \mathbf{1}_\zeta = \mathbf{1}_n$$

putem scrie

$$\mathbf{E} = E_\xi \mathbf{1}_\xi + E_\eta \mathbf{1}_\eta \tag{3.6}$$

unde

$$E_\xi = a \cos\tau, \quad E_\eta = b \sin\tau. \tag{3.7}$$

Într-un punct de coordonată ζ dată E_ξ și E_η sînt funcții numai de timp, astfel că oscilația vectorului **E** poate fi privită ca suprapunerea a două oscilații perpendiculare, cu aceeași frecvență, efectuate pe direcțiile ξ, respectiv η. Se știe însă că, prin compunerea a două oscilații în acest fel rezultă o oscilație eliptică a cărei formă și sens de parcurgere depind de E_ξ și E_η. Eliminînd pe τ între cele două ecuații (3.7) se obține ecuația elipsei

$$\frac{E_\xi^2}{a^2} + \frac{E_\eta^2}{b^2} = 1. \tag{3.8}$$

Așadar, pentru un punct de coordonată ζ dată, extremitatea vectorului **E** descrie o elipsă raportată la propriile ei axe. Sensul de parcurgere al elipsei este dat de *elicitatea* $\mathcal{H}$, această mărime definindu-se în modul următor: Să așezăm un șurub drept cu axa pe direcția axei ζ și cu vîrful în sensul pozitiv al acestei coordonate. Dacă, rotind șurubul în sensul de parcurgere a elipsei, acesta înaintează în sensul pozitiv al axei ζ, se atribuie elipsei elicitatea $\mathcal{H} = +1$, în caz contrar atribuindu-se valoarea $\mathcal{H} = -1$. Se mai obișnuiește să se spună despre stările cu $\mathcal{H} = +1$ că sînt stări de polarizare eliptică *stînga*, iar despre cele cu $\mathcal{H} = -1$ că sînt stări de polarizare eliptică *dreaptă*.

În raport cu un alt sistem de coordonate x, y, z, dar pentru care axa z coincide cu axa ζ (direcția de propagare), axele x și y fiind rotite față de axele ξ și η, ecuația elipsei devine

$$\frac{E_x^2}{a_x^2} + \frac{E_y^2}{a_y^2} - \frac{2E_xE_y}{a_xa_y}\cos\delta = \sin^2\delta \tag{3.9}$$

unde

$$E_x = a_x\cos(Kz - \omega t + \delta_x);\ E_y = a_y\cos(Kz - \omega t + \delta_y)$$
$$\delta = \delta_y - \delta_x. \tag{3.10}$$

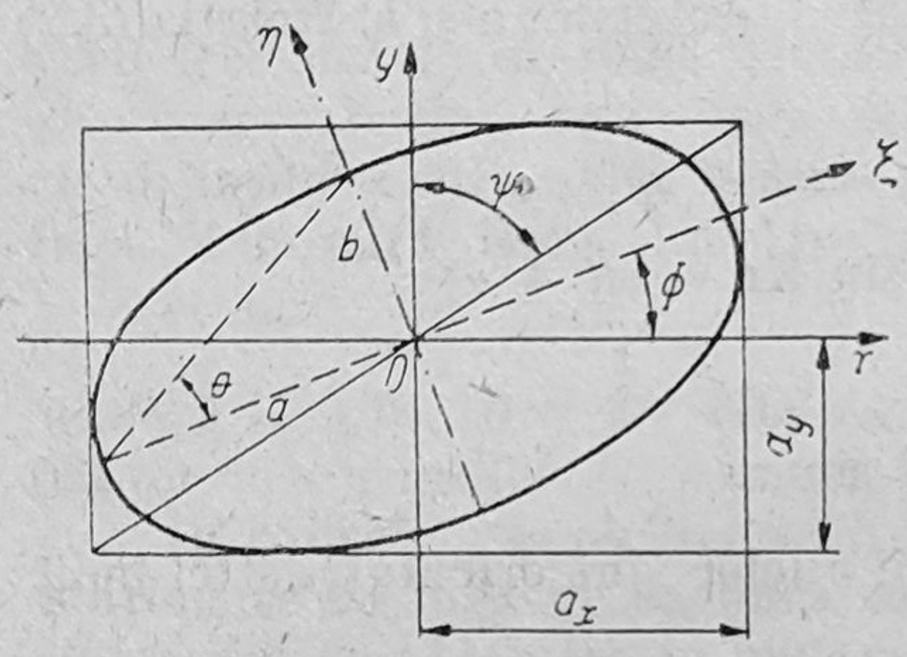


Fig. 3.1

δ este diferența de fază dintre E_x și E_y. Aria elipsei, orientarea axelor elipsei față de axele x și y, cît și elicitatea depind esențial de diferența de fază δ. În toate cazurile, elipsa este înscrisă într-un dreptunghi de laturi $2a_x$, respectiv $2a_y$ (fig. 3.1). În cursul propagării, vectorul **E** suferă și o mișcare de translație pe direcția z, astfel că în realitate extremitatea sa descrie o elice, înfășurată pe un cilindru de secțiune eliptică, avînd pasul egal cu lungimea de undă λ (fig. 3.2).

În particular, dacă $a_x = a_y$ și $\delta = \pm\pi/2$, elipsa degenerează într-un cerc, stările căpătînd denumirea de *circular polarizate*. Dimpotrivă, dacă $\delta = m\pi$, unde $m \in \mathbb{Z}$, (3.9) se reduce la ecuația a două trepte confundate

$$E_y = (-)^m \frac{a_y}{a_x} E_x. \tag{3.11}$$

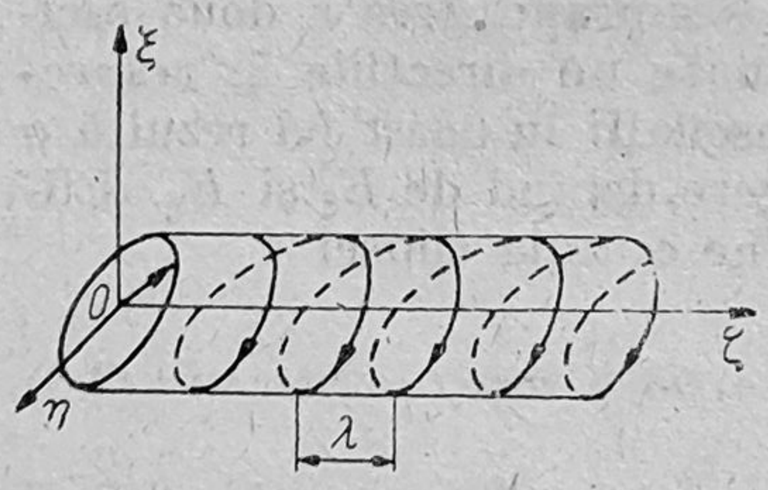


Fig. 3,2

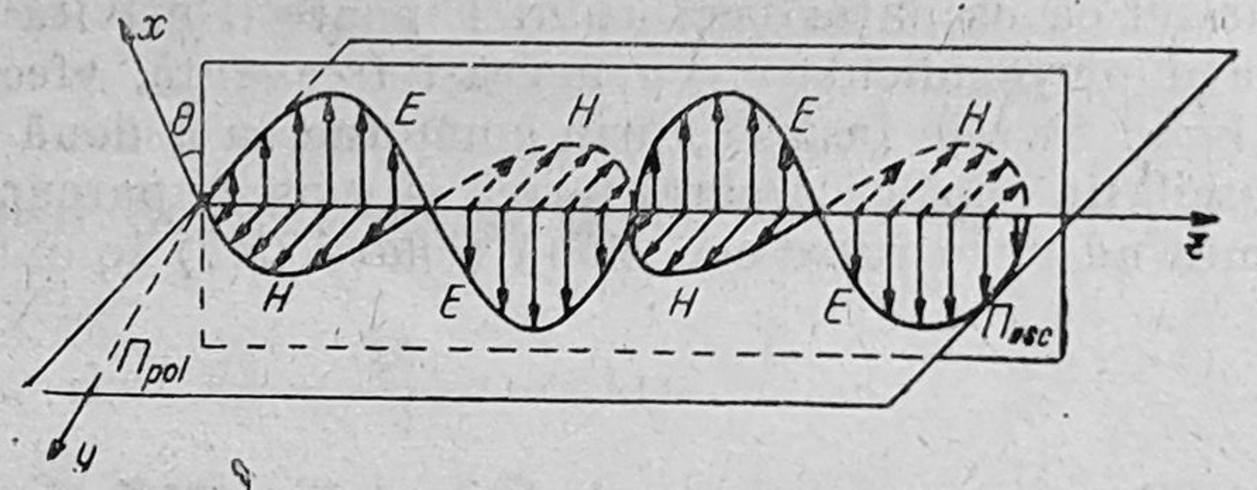


Fig. 3.3

Cilindrul arătat în figura 3.2 degenerează în două plane confundate, iar elicea într-o sinusoidă. O astfel de undă pentru care vectorul **E** oscilează într-un același plan, care păstrează o aceeași orientare în tot timpul propagării, se află într-o stare *plan-polarizată* (fig. 3.3). Bineînțeles, și în cazurile particulare $a_x \neq 0$, $a_y = 0$, respectiv $a_x = 0$, $a_y \neq 0$, este de asemenea vorba de stări plan-polarizate.

Din motive strict istorice, planul în care oscilează vectorul **H** se numește plan de polarizare, iar planul în care oscilează **E** se numește plan de oscilație. Efectele luminoase fiind datorate vectorului **E**, singurul plan interesant este planul de oscilație.

Toate stările mai sus discutate se referă la unde pentru care

$$\mathbf{E} = |\tilde{\mathbf{E}}_0| \exp[i(\mathbf{Kr} - \omega t + \alpha)]$$

atît amplitudinea cît și faza fiind exact cunoscute. Preluînd terminologia din mecanica cuantică, vom numi astfel de stări de polarizare *stări pure*. În optică, astfel de stări sînt denumite *stări de polarizare totală*.

În § 3.4 ne vom referi la stări pentru care informația asupra fazei este incompletă, stări denumite *mixte* sau de *polarizare parțială*.

3.2. Descrierea stărilor de polarizare. Matricea de polarizare și parametrii Stokes

În cazul cel mai general, descrierea stărilor de polarizare, atît totală cît și parțială, se poate face fie cu ajutorul matricei de polarizare, fie cu ajutorul parametrilor lui Stokes.

Matricea de polarizare. Fie o undă electromagnetică, într-o stare de polarizare oarecare, componentele intensității cîmpului electric după axele x și y fiind $\tilde{E}_x$, respectiv $\tilde{E}_y$. În cazul general, diferența de fază poate varia rapid în timp, astfel că informația pe care o putem avea asupra stării undei se limitează la valorile medii temporale ale caracteristicilor stării. Prin definiție, matricea de polarizare este în acest caz general o matrice pătrată 2×2 de elemente

$$\check{\rho}_{ij} = \langle \tilde{E}_i \tilde{E}_j^* \rangle \qquad i.\ j = x,\ y. \tag{3.12}$$

Parametrii Stokes. Cu ajutorul matricelor lui Pauli*, din matricea de polarizare se pot obține următorii parametri, denumiți parametrii Stokes**, ale căror valori caracterizează complet starea de polarizare

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathrm{Tr}\ \check{\rho} = \rho_{11} + \rho_{22} \\ S_1 &= \mathrm{Tr}\ \check{\sigma}_1\check{\rho} = \rho_{21} + \rho_{12} \\ S_2 &= \mathrm{Tr}\ \check{\sigma}_2\check{\rho} = i(\rho_{12} - \rho_{21}) \\ S_3 &= \mathrm{Tr}\ \check{\sigma}_3\check{\rho} = \rho_{11} - \rho_{22} \end{aligned} \tag{3.13}$$

---

*) După cum se știe din mecanica cuantică, matricele lui Pauli au expresiile

$$\check{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**) În lucrările mai vechi se folosea următoarea numerotare a parametrilor Stokes: $S_1 = \mathrm{Tr}\ \check{\sigma}_3\check{\rho}$, $S_2 = \mathrm{Tr}\ \check{\sigma}_1\check{\rho}$, $S_3 = \mathrm{Tr}\ \check{\sigma}_2\check{\rho}$.

unde prin Tr se înţelege urma unei matrice, adică suma tuturor elementelor diagonale.

Reciproc, matricea polarizării se poate exprima în funcţie de parametrii Stokes

$$\overset{\vee}{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S_0 + S_3 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & S_0 - S_3 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Menţionăm că uneori este comod să se folosească mărimile

$$s_i = S_i/S_0 \tag{3.15}$$

denumite parametri Stokes normalizaţi.

Vectorul Stokes. Matricele lui Mueller. Vectorul Stokes subîntinde un spaţiu abstract 4-dimensional şi este reprezentat într-o bază astfel aleasă încît matricea unicoloană, reprezentantă a acestui vector, să aibă drept elemente chiar cei 4 parametri Stokes. Fie $\mathfrak{S}$ vectorul Stokes al radiaţiei incidente într-un dispozitiv $\mathcal{T}$ şi $\mathfrak{S}'$ vectorul Stokes al radiaţiei emergente din dispozitiv. Vom putea scrie

$$\mathfrak{S}' = \hat{\mathfrak{T}}\mathfrak{S} \tag{3.16}$$

unde $\hat{\mathfrak{T}}$ este un operator care descrie modificarea stării de polarizare produsă de dispozitivul $\mathcal{T}$. Trecînd acum la matricele unicoloană, reprezentante ale vectorilor $\mathfrak{S}$ şi $\mathfrak{S}'$, respectiv la matricea 4×4 reprezentantă a operatorului $\hat{\mathfrak{T}}$, obţinem

$$\begin{pmatrix} S_0' \\ S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

Matricele 4×4, care descriu modificarea stării de polarizare produsă de diverse dispozitive se numesc matricele lui Mueller.

3.3. Descrierea stărilor de polarizare pure

Vom trece acum la studiul mai detaliat al stărilor pure de polarizare (polarizare totală). Pentru aceste stări

$$E_x = a_x \exp[i(\tau + \delta_x)]\,;\; E_y = a_y \exp[i(\tau + \delta_y)]. \tag{3.18}$$

Fazele δ_x şi δ_y fiind definite şi constante în timp, înseamnă că şi diferenţa

$$\delta = \delta_y - \delta_x$$

este exact definită, astfel că medierea în raport cu timpul în expresia (3.12) nu mai este necesară. Expresia matricei polarizării devine

$$\overset{\vee}{\rho} = \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y \exp(-i\delta) \\ a_x a_y \exp(i\delta) & a_y^2 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

De aici obținem următoarele valori ale parametrilor Stokes

$$S_0 = a_x^2 + a_y^2$$
$$S_1 = 2a_x a_y \cos\delta \qquad (3.20)$$
$$S_2 = 2a_x a_y \sin\delta$$
$$S_3 = a_x^2 - a_y^2.$$

Semnificația fizică a parametrilor Stokes, pentru stările pure, rezultă ușor. Astfel, parametrul S_0 nu exprimă altceva decît intensitatea undei. Pentru a înțelege semnificația parametrului S_1 ne vom referi la ecuația (3.9)

$$\frac{E_x^2}{a_x^2} + \frac{E_y^2}{a_y^2} - \frac{2E_xE_y}{a_xa_y}\cos\delta = \sin^2\delta.$$

Dacă $S_1 = 0$, ceea ce implică $\delta = \pm\pi/2$, este vorba de o elipsă raportată la propriile ei axe. Dimpotrivă, cînd S_1 tinde către valoarea maximă $2a_xa_y$, axele elipsei tind să formeze unghiul maxim cu axele x și y. Așadar S_1 este corelat cu înclinarea axelor elipsei față de axele de coordonate x și y. Parametrul S_2, multiplicat cu factorul $\pi/2$, ne dă chiar aria elipsei, iar semnul acestui parametru este opus elicității: sign $S_2 = -\mathcal{H}$. În cazul stării plan-polarizate avem $S_2 = 0$. În sfîrșit, parametrul S_3 dă înclinarea axelor elipsei față de un sistem de axe x', y' rotite cu $\pi/4$ față de axele x și y. Cînd axele elipsei au aceeași orientare ca și aceste axe x' și y', parametrul $S_3 = 0$.

Din relațiile (3.20) se obține ușor

$$P = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}}{S_0} = 1. \qquad (3.21)$$

Mărimea P se numește *grad de polarizare**, și așa cum se poate constata, acesta este egal cu unitatea în cazul stărilor pure de polarizare. Pentru stările mixte de polarizare, $P < 1$, așa cum se va arăta în § 3.4.

Dăm mai jos cîteva forme tipice ale matricei polarizării și ale matricei reprezentante a vectorului Stokes:

a) Unda total plan-polarizată în planul x, z

$$\overset{\vee}{\rho} = a_x^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad \overset{\vee}{\mathfrak{S}} = a_x^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

b) Unda total plan-polarizată în planul y, z

$$\overset{\vee}{\rho} = a_y^2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad \overset{\vee}{\mathfrak{S}} = a_y^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

* În multe lucrări gradul de polarizare se definește $P' = S_3/S_0$. Evident $P' \neq P$.

c) Unda total plan-polarizată într-un plan a cărui urmă formează unghiul $\pi/4$ cu axele x și y ($a_x^2 = a_y^2 = a^2$; $\delta = 0$)

$$\overset{\vee}{\rho} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \overset{\vee}{\mathfrak{S}} = 2a^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Unda total plan-polarizată într-un plan a cărui urmă formează unghiul $3\pi/4$ cu axele x și y ($a_x^2 = a_y^2 = a^2$; $\delta = \pi$)

$$\overset{\vee}{\rho} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \overset{\vee}{\mathfrak{S}} = 2a^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Undă circular polarizată cu elicitatea $\mathcal{H} = \pm 1$ și $a_x^2 = a_y^2 = a^2$; $\delta = \mp \frac{\pi}{2}$

$$\overset{\vee}{\rho} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ & \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}; \quad \overset{\vee}{\mathfrak{S}} = 2a^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sfera lui Poincaré. Așa cum rezultă din relațiile (3.15) și (3.20) între parametrii Stokes normalizați există relația

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1. \tag{3.22}$$

Fie un spațiu 3-dimensional, în care definim un triedru drept trirectangular, pe ale cărui axe înscriem valorile s_1, s_2, s_3. Ecuația (3.22) este ecuația unei sfere — astăzi denumită sfera lui Poincaré — cu centrul în originea triedrului, fiecare punct al sferei figurînd o stare de polarizare pură (fig. 3.4). Astfel toate punctele de pe ecuatorul sferei ($s_2 = 0$) figurează stările plan-polarizate. Cei doi poli ai sferei lui Poincaré ($s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = \pm 1$) figurează stările de polarizare circulară cu elicitatea $\mathcal{H} = \pm 1$. În general, punctele de pe emisfera pentru care $s_2 > 0$, figurează stările cu $\mathcal{H} = -1$, în timp ce punctele de pe emisfera pentru care $s_2 < 0$, figurează stările cu $\mathcal{H} = +1$. Se poate arăta că longitudinea $\Lambda \in [-\pi, \pi]$, respectiv latitudinea $\Omega \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fiecărui punct de pe sfera lui Poincaré sînt legate de unghiurile θ și Φ prin relațiile

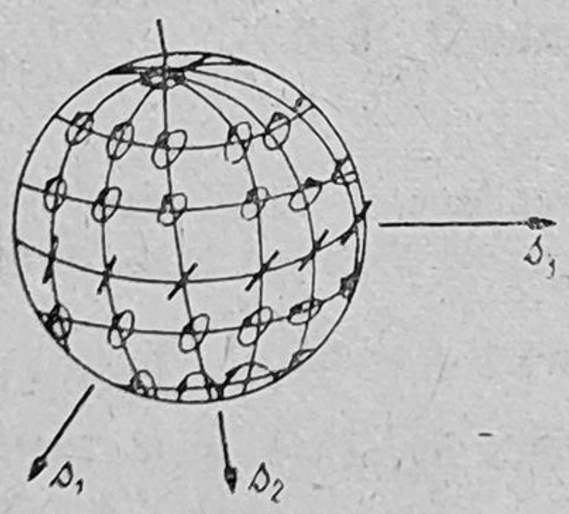


Fig. 3.4

$$\Lambda = 2\Phi, \quad \Omega = 2\theta. \tag{3.23}$$

Aşa cum rezultă din figura 3.1, Φ este unghiul format de axele elipsei a şi b cu axele de coordonate x, y, iar prin θ s-a notat unghiul dat de relaţia $\operatorname{tg}\theta = b/a$.

Sfera Poincaré ne permite să figurăm foarte intuitiv modificările stării de polarizare, produse de un lanţ de dispozitive, unind prin arce de cerc punctele care figurează diversele stări la intrarea, respectiv ieşirea din fiecare dispozitiv.

Matricele lui Jones. Să considerăm o undă monocromatică, într-o stare de polarizare pură, care se propagă pe direcţia z. Componentele undei luminoase transversale vor fi

$$E_x = a_x \exp[\mathrm{i}(\tau + \delta_x)],\ E_y = a_y \exp[\mathrm{i}(\tau + \delta_y)]. \tag{3.24}$$

Cu aceste componente se poate forma o matrice unicoloană

$$\begin{pmatrix} a_x \exp[\mathrm{i}(\tau + \delta_x)] \\ a_y \exp[\mathrm{i}(\tau + \delta_y)] \end{pmatrix} = \exp(\mathrm{i}\tau) \begin{pmatrix} a_x \exp(\mathrm{i}\delta_x) \\ a_y \exp(\mathrm{i}\delta_y) \end{pmatrix}.$$

Factorul $\exp(\mathrm{i}\tau)$, de modul egal cu 1, este neinteresant, de aceea el poate fi neglijat. Matricea

$$\begin{pmatrix} a_x \exp(\mathrm{i}\delta_x) \\ a_y \exp(\mathrm{i}\delta_y) \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

este matricea Jones, care descrie complet starea de polarizare pură a undei luminoase monocromatice. În particular, o undă plan-polarizată, cu vectorul **E** oscilînd în planul xz, respectiv yz, este dată de matricea

$$a_x \exp(\mathrm{i}\delta_x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{respectiv}\ a_y \exp(\mathrm{i}\delta_y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă este vorba de o undă plan-polarizată, dar al cărei vector **E** oscilează într-un plan care face unghiul $\pm\pi/4$ cu planul x, z, matricea Jones are forma

$$a_x \exp(\mathrm{i}\delta_x) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

În fine, în cazul undelor circular polarizate cu elicitatea $\mathscr{H} = \pm 1$, matricea Jones este

$$a_x \exp(\mathrm{i}\delta_x) \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Să considerăm acum modificarea stării de polarizare la trecerea luminii printr-un dispozitiv în care efectele de difuzie, de depolarizare sau de neliniaritate pot fi neglijate. În aceste situaţii, dacă lumina incidentă se află într-o stare pură, şi lumina emergentă se află de asemenea într-o stare pură. În acest caz vom putea scrie

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Matricea 2×2 este matricea care descrie modificarea stării de polarizare produsă de dispozitivul considerat.

3.4. Descrierea stărilor de polarizare mixte

Sursele luminoase convenționale nu emit niciodată lumină în stări de polarizare pure. Astfel de stări pure se obțin doar în condiții speciale, cum ar fi, de exemplu, emisia luminii de către dispozitivele tip laser sau cea a componentelor unei linii spectrale despicate prin efect Zeeman. Din acest motiv, informația asupra stării de polarizare a luminii este, în general, incompletă, unda nemaiputînd fi caracterizată printr-o funcție de undă ; în acest caz se pot specifica numai probabilități P_α pentru fiecare stare în care se poate găsi unda luminoasă.

O stare de polarizare pentru care nu se pot face afirmații certe asupra fazei undei se numește stare de polarizare mixtă sau parțială. Astfel de stări nu mai pot fi descrise prin matrice Jones și nici nu se pot figura prin puncte pe sfera Poincaré. În schimb însă, și în acest caz este posibilă descrierea stării prin matricea de polarizare sau prin parametrii lui Stokes. Fie $\tilde{a}_{\alpha x}(t)$ și $\tilde{a}_{\alpha y}(t)$ amplitudinile componentelor vectorului **E**, în starea de polarizare a cărei probabilitate de realizare este P_α. Elementele matricei de polarizare se scriu în acest caz, conform relației (3.12),

$$\rho_{ij} = \sum_\alpha P_\alpha \tilde{a}_{\alpha i}(t)\tilde{a}^*_{\alpha j}(t) = \langle \tilde{a}_i(t)\tilde{a}^*_j(t)\rangle. \tag{3.27}$$

Ținînd seama de definițiile (3.13), expresiile parametrilor Stokes nenormați vor fi

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle |\, a_x\,|^2 + |\, a_y\,|^2\rangle \\ S_1 &= 2\langle |\, a_x\,|\cdot|\, a_y\,|\, \cos\delta\rangle \\ S_2 &= 2\langle |\, a_x\,|\cdot|\, a_y\,|\, \sin\delta\rangle \\ S_3 &= \langle |\, a_x\,|^2 - |\, a_y\,|^2\rangle. \end{aligned} \tag{3.28}$$

În cazul stărilor mixte, gradul de polarizare

$$P = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}}{S_0} \in [0,\ 1). \tag{3.29}$$

Dacă toate valorile diferenței de fază δ sînt echiprobabile, atunci $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ și, în consecință, și $P = 0$. În această stare se vorbește despre lumină *naturală*. Dacă există o anumită privilegiere a valorilor lui δ, atunci $P \in (0,\ 1)$, astfel de stări mixte fiind denumite și stări de *polarizare parțială* a luminii.

Să rescriem relația (3.14), exprimînd însă de data aceasta matricea polarizării în funcție de parametrii Stokes normalizați

$$\overset{\vee}{\rho} = \frac{S_0}{2}\begin{pmatrix} 1 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & 1 - s_3 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Această matrice se poate pune sub forma*

$$\overset{\vee}{\rho} = S_0(\rho_N + \rho_P) \tag{3.31}$$

unde

$$\overset{\vee}{\rho}_N = \frac{1-P}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

exprimă partea de lumină naturală din amestecul de stări, iar termenul

$$\overset{\vee}{\rho}_P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & P - s_3 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

partea de lumină polarizată. În cazul stărilor pure (polarizare totală) $P = 1$, matricea $\overset{\vee}{\rho}_N$ se anulează, iar matricea $\overset{\vee}{\rho}_P$ se identifică cu (3.30). Dimpotrivă, în cazul luminii naturale, se anulează matricea $\overset{\vee}{\rho}_P$, iar matricea $\overset{\vee}{\rho}_N$ se identifică cu matricea identitate multiplicată cu factorul 1/2.

3.5. Schimbarea stării radiației electromagnetice

Parametrii Stokes descriu complet starea radiației electromagnetice, atît în ceea ce privește intensitatea radiației cît și în ceea ce privește starea de polarizare. Evoluția vectorului Stokes dă descrierea cea mai generală a evoluției stării radiației electromagnetice. Studiul acestei evoluții este extrem de important, deoarece investigarea optică a stării obiectelor — începînd cu observația vizuală și terminînd cu metodele moderne sofisticate — constituie unul dintre mijloacele cele mai complete și mai fine de cunoaștere a lumii fizice. Mai jos se va prezenta, în sensul lucrărilor lui Azzam și Bashara**, teoria generală a investigației optice a suprafețelor.

Fie σ un sistem, denumit pe scurt specimen, a cărui stare superficială o investigăm cu ajutorul unei radiații care se află inițial într-o stare standard $\Sigma_\alpha(S_i^\alpha)$, unde S_i^α sînt cei patru parametri Stokes. Radiația emisă de o sursă standard este preparată într-un dispozitiv constituit dintr-o secvență de elemente $\mathcal{T}_j$ ($j \in 1, \ldots, p\}$) în general reglabile și cu ajutorul cărora este adusă într-o stare Σ' după care este pusă în interacțiune cu specimenul σ. Ca urmare a interacțiunii, radiația va trece într-o nouă stare Σ'', modificarea stării produsă prin trecerea $\Sigma' \to \Sigma''$ cuprinzînd informația asupra stării specimenului. După aceea, un dispozitiv analizor format dintr-o secvență de elemente $\mathcal{T}_k$ ($k \in \{p+1, \ldots, q\}$), de asemenea în general reglabile, aduce radiația în starea finală $\Sigma_\omega(S_i^\omega)$.

În vederea măsurării caracteristicilor specimenului, vom construi mai întîi spațiul vectorilor Stokes. Fie $\mathfrak{S}_\alpha$ vectorul care descrie starea inițială standard Σ_α și $\mathfrak{S}_\omega$ vectorul care descrie starea finală Σ_ω. Trecerea de la sta-

---

* Pentru detalii vezi : Z. Gàbos și O. Gherman, Rev. Opt., **41**, 7 (1962), p. 329.

** Vezi : R.M.A. Azzam și M. M. Bashara, J. Opt. Soc. Am., **61** (1971), p. 600, 773, 1118, 1236, 1380.

rea Σ_α la starea Σ_ω este descrisă de un operator $\hat{\mathfrak{T}}_{\alpha\omega}$ care asociază vectorul $\mathfrak{S}_\omega$, vectorului $\mathfrak{S}_\alpha$

$$\mathfrak{S}_\omega = \hat{\mathfrak{T}}_{\alpha\omega}\mathfrak{S}_\alpha. \tag{3.34}$$

Notînd cu $\hat{\mathfrak{T}}_j$ respectiv $\hat{\mathfrak{T}}_k$ operatorii corespunzători modificării stării də către elementul $\mathcal{T}_j$, respectiv elementul $\mathcal{T}_k$ și cu $\hat{\mathfrak{T}}_\sigma$ cel corespunzător modificării stării de către specimen, putem pune operatorul $\hat{\mathfrak{T}}_{\alpha\omega}$ sub forma produsului

$$\hat{\mathfrak{T}}_{\alpha\omega} = \hat{\mathfrak{T}}_q \cdots \hat{\mathfrak{T}}_k \cdots \hat{\mathfrak{T}}_{p+1}\hat{\mathfrak{T}}_\sigma\hat{\mathfrak{T}}_p \cdots \hat{\mathfrak{T}}_j \cdots \hat{\mathfrak{T}}_1. \tag{3.35}$$

Alegînd o reprezentare într-o bază convenabilă, relația de mai sus se scrie ca o relație între matrice Mueller 4×4

$$\check{\mathfrak{T}}_{\alpha\omega} = \check{\mathfrak{T}}_q \cdots \check{\mathfrak{T}}_k \cdots \check{\mathfrak{T}}_{p+1}\check{\mathfrak{T}}_\sigma\check{\mathfrak{T}}_p \cdots \check{\mathfrak{T}}_j \cdots \check{\mathfrak{T}}_1. \tag{3.36}$$

Efectuarea măsurării constă în reglarea elementelor celor două secvențe astfel încît la ieșirea din dispozitiv radiația să se găsească într-o anumită stare standard Σ^0_ω, descrisă de vectorul $\mathfrak{S}^0_\omega$. Această situație determină univoc matricea $\check{\mathfrak{T}}^0_{\alpha\omega}$ asociată dispozitivului. Cum, pe de altă parte, matricele $\check{\mathfrak{T}}^0_j$ respectiv $\check{\mathfrak{T}}^0_k$, asociate elementelor dispozitivului după reglare sînt de asemenea cunoscute, devine posibilă determinarea matricei $\check{\mathfrak{T}}_\sigma$, adică determinarea informației asupra specimenului.

Starea finală standard Σ^0_ω este pusă în evidență de un detector care ne informează printr-un semnal a cărui putere I^0_ω depinde de parametrul Stokes s_0 al stării. Acest semnal este afectat de un anumit zgomot δI, care se calculează în modul următor. Să facem deocamdată abstracție de existența zgomotului și să presupunem că toate elementele sînt astfel reglate încît la ieșire să se obțină starea Σ^0_ω. Să presupunem că la intrarea în elementul $\mathcal{T}_r$ ($r \in \{1, \ldots j, \ldots, p, \sigma, p+1, \ldots k \ldots q\}$), matricea reprezentantă a vectorului Stokes este

$$\mathfrak{S}^0_r = \begin{pmatrix} I^0_r \\ \check{\mathfrak{N}}^0_r \end{pmatrix}$$

unde prin $\check{\mathfrak{N}}^0_r$ se înțelege submatricea unicoloană cu 3 elemente corespunzătoare celorlalți parametri Stokes. Vom rescrie (3.34) acum sub forma

$$\begin{pmatrix} I^0_\omega \\ \check{\mathfrak{N}}^0_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{\Gamma}^0_r \\ \check{\Xi}^0_r \end{pmatrix} \check{\mathfrak{T}}^0_r \mathfrak{S}^0_r$$

unde $\check{\Gamma}^0_r$ este o submatrice unilinie care se identifică cu prima linie a matricei produs $\prod_{s\in r+1,..q} \check{\mathfrak{T}}^0_s$, iar $\check{\Xi}^0_r$, submatricea cu 3 linii și 4 coloane care mai rămîne după extragerea submatricii $\check{\Gamma}^0_r$. De aici urmează că mărimea scalară I^0_ω este dată de

$$I^0_\omega = \check{\Gamma}^0_r \check{\mathfrak{T}}^0_r \mathfrak{S}^0_r. \tag{3.37}$$

Să ridicăm condiţia ca $\mathcal{T}_r$ să fie un element ideal şi să admitem că acest element prezintă imperfecţiuni astfel încît operaţia efectuată este acum descrisă de matricea

$$\check{\mathfrak{T}}_r = \check{\mathfrak{T}}_r^0 + \delta\check{\mathfrak{T}}_r \tag{3.38}$$

$\delta\check{\mathfrak{T}}_r$ cuprinzînd „informaţia" asupra imperfecţiunilor elementului. Semnalul recepţionat va fi

$$I^0 + \check{\Gamma}_r^0 \delta\check{\mathfrak{T}}_r \check{\mathfrak{S}}_r^0 \tag{3.39}$$

cel de-al doilea termen reprezentînd zgomotul datorat elementului $\mathcal{T}_r$. Zgomotul total va fi

$$\delta I = \sum_{r \in \overline{1,q}} \check{\Gamma}_r^0 \delta\check{\mathfrak{T}}_r \check{\mathfrak{S}}_r^0 + \check{\Gamma}_\alpha^0 \delta\check{\mathfrak{T}}_\alpha \check{\mathfrak{S}}_\alpha^0 \tag{3.40}$$

unde ultimul termen exprimă zgomotul datorat imperfecţiunilor sursei de radiaţie.

Imperfecţiunile elementelor dispozitivelor de măsurare pot fi de două tipuri, imperfecţiuni care deşi modifică starea radiaţiei aceasta continuă să fie o stare pură şi imperfecţiuni datorită cărora în locul stării pure se obţine un amestec de stări. În cazul dispozitivelor optice, din prima categorie de imperfecţiuni fac parte, de exemplu, împrăştierile unghiurilor de incidenţă, împrăştierile defazajelor introduse de diversele dispozitive, fenomene de dicrosim şi de pleocroism, fenomene parazite de birefringenţă, erori de aliniere şi de poziţionare a dispozitivelor etc. Din rîndul celei de-a doua categorii fac parte efectele de depolarizare a luminii, reflexiile difuze datorate rugozităţii suprafeţelor, activitatea optică etc.

4. INTERFERENŢA

4.1. Interferenţa microundelor

În general, prin interferenţă se înţelege suprapunerea undelor cu apariţia unei repartiţii spaţiale periodice de maxime şi de minime. Observarea sistemului de maxime şi de minime implică staţionaritatea fenomenului de interferenţă. În timp ce studiul interferenţei undelor luminoase pune probleme suplimentare, deoarece — cel puţin pentru sursele luminoase convenţionale — informaţia asupra stării undelor este incompletă, faza nefiind definită — studiul interferenţei microundelor este extrem de simplu, deoarece se pot obţine microunde a căror fază să fie bine definită. Să considerăm, ca în figura 4.1, două surse care emit unde armonice plane, plan-polarizate în acelaşi plan şi

de aceeași frecvență. Într-un punct M, situat la distanța ζ_1, respectiv ζ_2 de cele două surse, intensitatea cîmpului electric pentru cele două unde va fi

$$E_1(M) = E_{01} \exp[i(K\zeta_1 - \omega t + \varphi_1)]$$

$$E_2(M) = E_{02} \exp[i(K\zeta_2 - \omega t + \varphi_2)]$$

fazele inițiale φ_1 și φ_2 fiind bine definite și independente de timp. Dacă ζ_1, $\zeta_2 \gg l$, unghiul ε este practic nul, așa încît putem considera că în punctul M se suprapun două unde plane care se propagă pe aceeași direcție. Intensitatea undei rezultante va fi

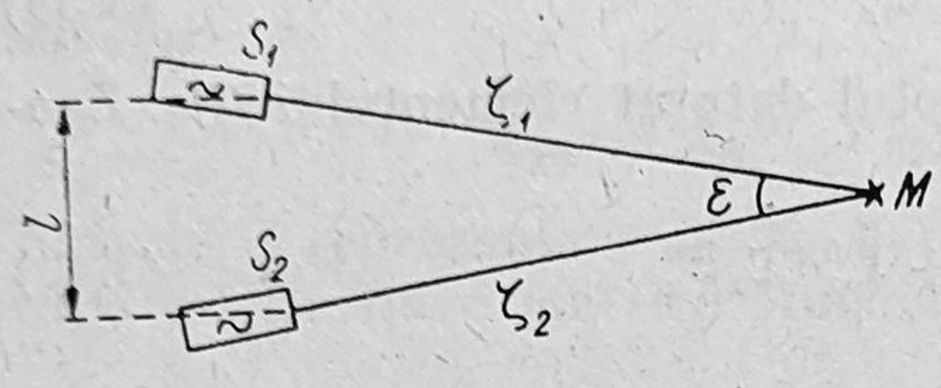


Fig. 4.1

$$I(M) = (E_1^*(M) + E_2^*(M))(E_1(M) + E_2(M))$$

sau, după efectuarea calculelor,

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2I_1^{1/2} I_2^{1/2} \cos(K\Delta\zeta + \Delta\varphi)$$

unde $I_1 = E_{01}^2$, $I_2 = E_{02}^2$, iar $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Se vede imediat că $I(M)$ variază periodic cu *diferența de drum* $\Delta\zeta = \zeta_2 - \zeta_1$. În particular, dacă

$$K\Delta\zeta + \Delta\varphi = 2m\pi \Rightarrow I_M = (I_1^{1/2} + I_2^{1/2})^2 \qquad \textit{maxime}$$

$$K\Delta\zeta + \Delta\varphi = (2m+1)\pi \Rightarrow I_m = (I_1^{1/2} - I_2^{1/2})^2. \quad \textit{minime.}$$

Maximele și minimele sînt denumite, cu un singur cuvînt, franje de interferență. Calitatea franjelor este dată de contrastul dintre maxime și minime caracterizat prin mărimea fizică denumită *vizibilitate**, folosită inițial în cazul undelor luminoase. Vizibilitatea este definită prin relația

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}. \tag{4.1}$$

În cazul mai sus studiat, dacă $I_1 = I_2 = I_0$, se vede că se obține contrastul maxim: $I_M = I_0$, $I_m = 0$, iar $V = 1$. Vom considera acum că cele două surse nu mai sînt polarizate în același plan ci în plane perpendiculare. În acest caz nu mai apare interferența, ci oscilațiile care se compun dau o oscilație eliptică și deci franjele fiind absente, urmează că $V = 0$. Dacă însă sursele generează unde nepolarizate, interferența are loc și în acest caz, iar $V = 1$. Explicația este următoarea: fiecare din unde prezintă o componentă într-un plan oarecare și un plan perpendicular pe el, deci se obțin două sisteme de unde polarizate care interferă separat.

4.2. Conceptul de coerență

Vizibilitatea franjelor depinde pe de o parte de raportul intensității undelor care interferă, dar pe de altă parte depinde și de o anumită corelație între cele două unde. Conceptul de coerență pune în evidență tocmai măsura

* Această mărime se mai numește și *contrastul franjelor*.

în care cele două unde se corelează între ele în fenomenul de interferență. Acest concept se reliefează cel mai bine în cazul interferenței undelor luminoase.

Vom considera mai întîi suprapunerea pe o foaie de hîrtie a undelor luminoase emise de două becuri electrice. După cum se știe, în acest caz nu apar franje de interferență, ci intensitatea rezultantă este pur și simplu suma aritmetică a intensităților celor două unde luate separat. Fenomenul, diferit de cel petrecut în cazul microundelor, se explică astfel. Sursele luminoase macroscopice convenționale — becuri, flăcări, corpuri incandescente — constau

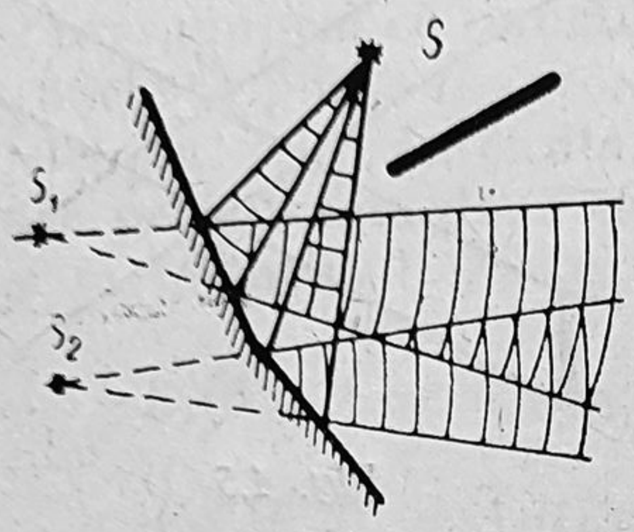


Fig. 4.2

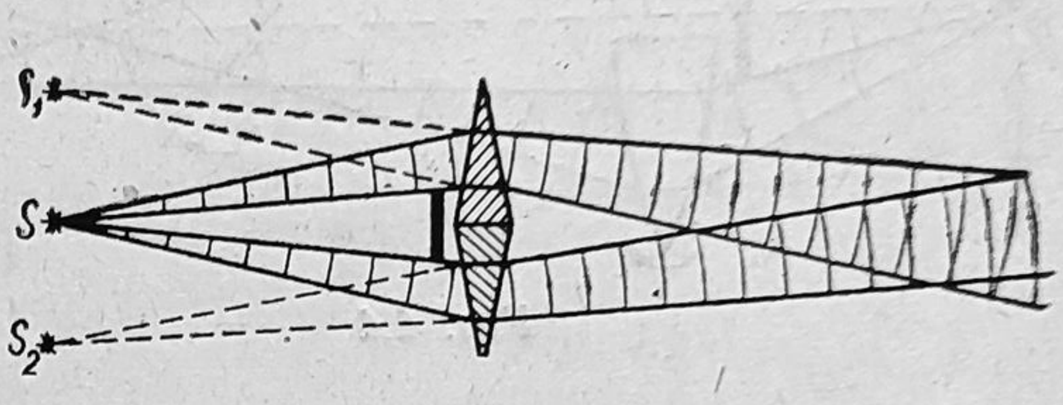


Fig. 4.3

dintr-o imensitate de surse microscopice independente (atomi, molecule etc.). Fiecare sursă microscopică efectuează în jur de 10^8 tranziții cuantice pe secundă, la fiecare tranziție emițînd cîte un puls de lumină. Fazele inițiale ale pulsurilor se schimbă în mod aleatoriu de la un moment la altul. În unda macroscopică informația asupra fazei lipsește, iar pentru o observație de durată macroscopică, interferența nu apare.

Interferența undelor emise de sursele macroscopice convenționale se poate obține suprapunînd, bunăoară, undele emise de două imagini ale unei aceleiași surse. Imaginile surselor se pot obține, de exemplu, prin reflexie sau prin refracție. În figura 4.2 se arată dispozitivul denumit oglinzile lui Fresnel, iar în figura 4.3 biprisma Fresnel. În aceste figuri sursa obiect este notată cu S, iar sursele imagine cu S_1, respectiv S_2.

Pentru a putea studia coerența undelor ne vom referi la un al treilea dispozitiv experimental, denumit bilentila Billet (fig. 4.4). Sursa S constă în deschiderea unei diafragme variabile D, în acest mod putînd mări sau micșora întinderea sursei. Bilențila este formată din două jumătăți de lentilă, care dau imaginile reale S_1 și S_2 ale sursei S. Undele pornite din aceste surse vor interfera formînd un sistem de franje. Se constată că vizibilitatea franjelor $V < 1$, deși $I_1 = I_2$.

Coerența spațială. Dacă micșorăm diafragma, deci dacă micșorăm aria surselor S_1 și S_2, observăm creșterea contrastului franjelor, vizibilitatea apropiindu-se de unitate; dimpotrivă, mărind diafragma, aria surselor crește constatîndu-se scăderea vizibilității.

Scăderea vizibilității, o dată cu creșterea ariei surselor se înțelege ușor dacă vom considera figura 4.5 unde sînt figurate sursele nepunctiforme A_1B_1 și A_2B_2. În figura 4.6 se arată intensitățile undelor emise din A_1 și A_2, respectiv B_1 și B_2, în funcție de diferența de drum $\Delta\zeta$ dintre cele două unde. Se vede că întrucît maximele surselor A, respectiv B nu coincid, vizibilitatea

scade. Dacă sursele sînt foarte întinse, vizibilitatea tinde către zero (fig. 4.7). Coerența surselor extinse nu este totală, ci parțială. Dimpotrivă, cu cît aria sursei este mai mică, se va realiza mai bine *coerența spațială.*

Coerența temporală. Dacă rotim ușor bilentila în sensul arătat în figura 4.4, imaginile S_1 și S_2 se vor deplasa în pozițiile S_1' și S_2'. Se constată experimental că vizibilitatea franjelor scade, deci și coerența surselor, pe măsură ce unghiul cu care am rotit bilentila este mai mare. Coerența de acest fel se numește

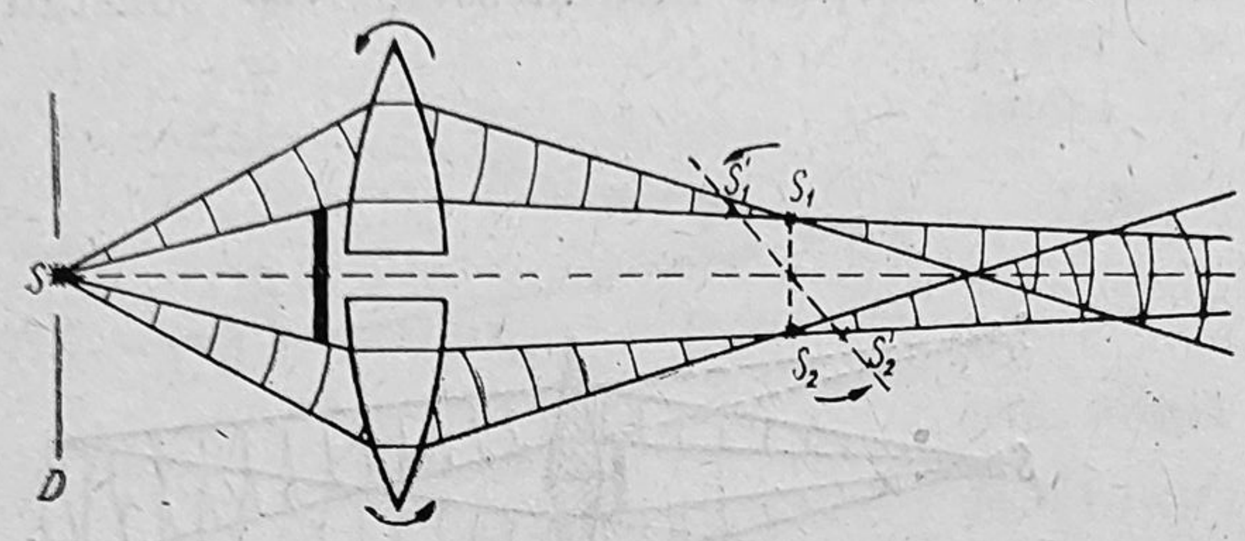


Fig. 4.4

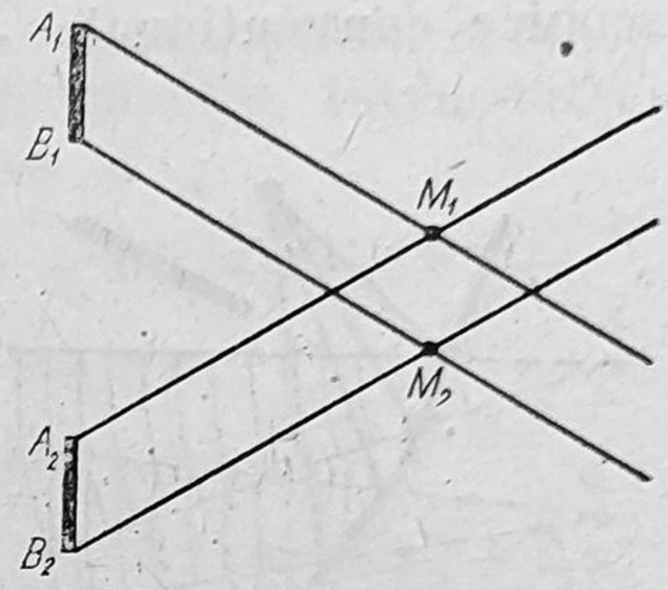


Fig. 4.5

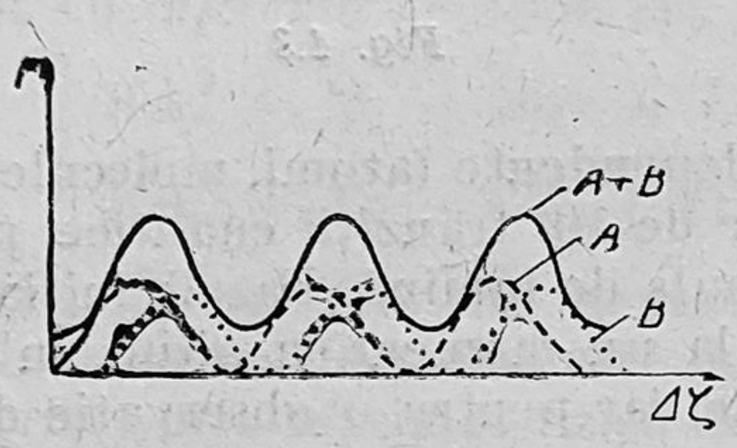


Fig. 4.6

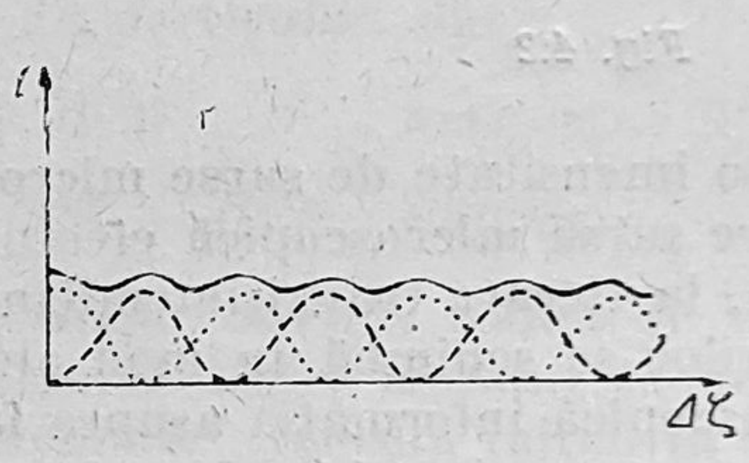


Fig. 4.7

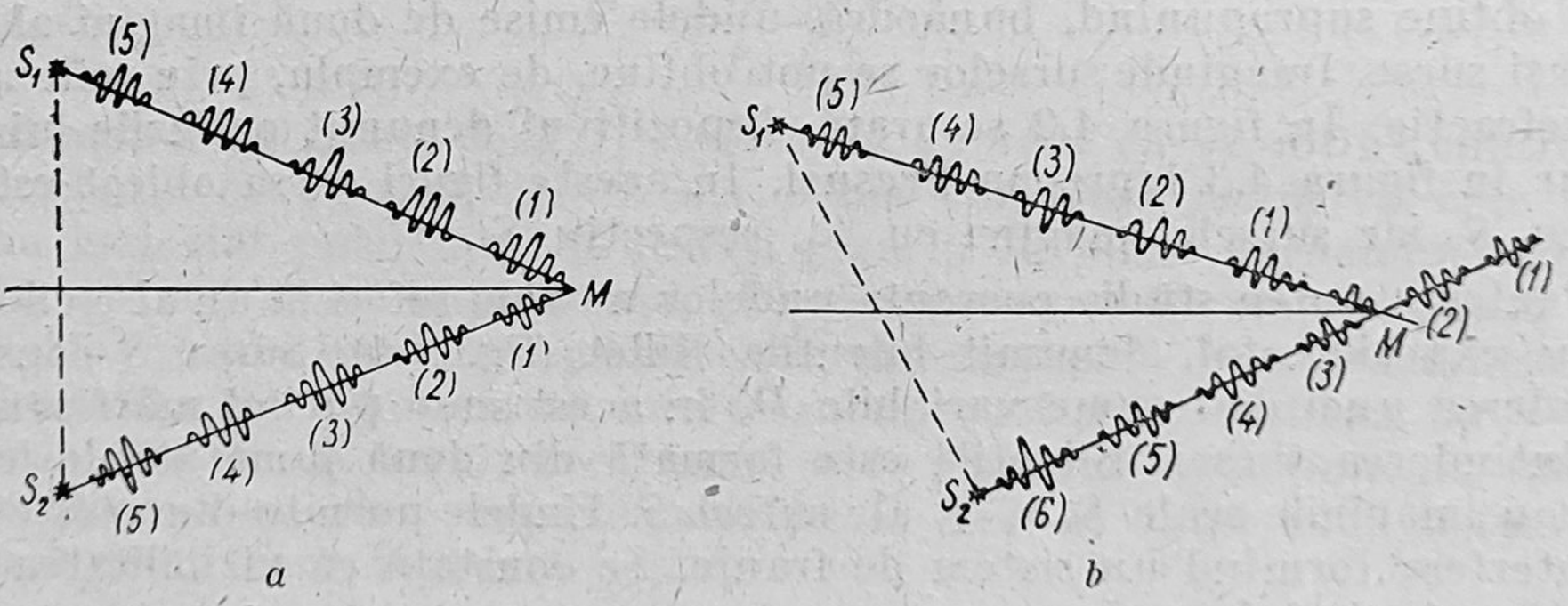


Fig. 4.8

temporală și se explică în modul următor. Cele două surse nu sînt riguros monocromatice, astfel că pulsurile emise constau în realitate din grupuri de undă de durată τ_0. Dacă bilentila este corect așezată, imaginile surselor formîndu-se în S_1 și S_2, grupurile de undă identice emise de cele două imagini — în figura 4.8 numerotate la fel — vor fi coerente (fig. 4.8, a). Dacă însă bilentila este rotită, grupele de unde emise simultan se vor suprapune pe o durată $\tau < \tau_0$, sau este posibil chiar ca aceste grupuri să nu se mai întîlnească (vezi fig. 4.8, b).

Durata τ_0 se numește timp de coerență, iar distanța $l_0 = c\tau_0$ se numește lungime de coerență. Dacă diferența de drum între undele provenite de la cele două surse este inferioară lui l_0, interferența se mai poate observa. Dacă însă $\Delta\zeta > c\tau_0$, interferența nu mai are loc, deci sursele sînt necoerente.

4.3. Studiul interferenței undelor luminoase

Considerăm două surse S_1 și S_2, apropiate, care emit lumină nepolarizată și presupunem că punctul de observație este suficient de depărtat, astfel încît undele să poată fi aproximate ca unde plane, propagîndu-se pe direcții paralele (fig. 4.9). Intensitatea cîmpului electric are pentru cele două unde, în punctul M și la momentul t, expresiile

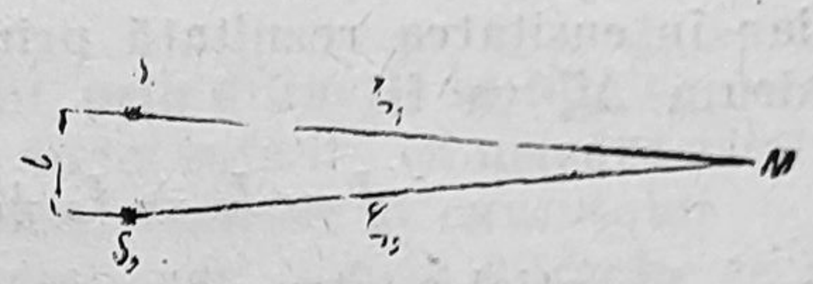


Fig. 4.9

$$\tilde{E}_1(M,\ t) = \tilde{A}_1(t)\exp[\mathrm{i}(K\zeta_1 - \omega t)]$$

$$\tilde{E}_2(M,\ t) = \tilde{A}_2(t)\exp[\mathrm{i}(K\zeta_2 - \omega t)]$$

$\tilde{A}_1(t)$ și $\tilde{A}_2(t)$ sînt amplitudini complexe, forma lor explicită nefiind cunoscută.

Intensitatea instantanee a undei în punctul M la momentul t va fi

$$I_{\mathrm{inst}}(M,\ t) = (\tilde{E}_1^*(M,\ t) + \tilde{E}_2^*(M,\ t))(\tilde{E}_1(M,\ t) + \tilde{E}_2(M,\ t))$$

iar valoarea medie a intensității, într-un interval de timp suficient pentru efectuarea observației

$$I = \langle(\tilde{E}_1^* + \tilde{E}_2^*)(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)\rangle =$$

$$= \langle\tilde{A}_1^*(t)\tilde{A}_1(t)\rangle + \langle\tilde{A}_2^*(t)\tilde{A}_2\,(t)\rangle +$$

$$+\mathrm{Re}\,\langle\tilde{A}_1^*(t)\tilde{A}_2(t)\exp(\mathrm{i}K\Delta\zeta) + \tilde{A}_1(t)\tilde{A}_2^*(t)\exp(-\mathrm{i}K\Delta\zeta)\rangle$$

unde pentru simplificare s-a pus $\zeta_1 = 0,\ \zeta_2 = \Delta\zeta$.

Definim mai jos funcția de coerență mutuală

$$\Gamma_{12}(\Delta\zeta) = \langle\tilde{A}_1^*(t)\tilde{A}_2\,(t)\rangle\exp(\mathrm{i}K\Delta\zeta). \tag{4.2}$$

După cum se poate constata ușor

$$2\,\mathrm{Re}\Gamma_{12}(\Delta\zeta) = \mathrm{Re}\langle\tilde{A}_1^*(t)\tilde{A}_2(t)\exp(\mathrm{i}K\Delta\zeta) + \tilde{A}_1(t)\tilde{A}_2^*(t)\exp(-\mathrm{i}K\Delta\zeta)\rangle$$

astfel încît obținem pentru valoarea medie a intensității expresia

$$I = I_1 + I_2 + 2\,\mathrm{Re}\,\Gamma_{12}(\Delta\zeta) \tag{4.3}$$

unde I_1 și I_2 sînt intensitățile medii ale fiecărei unde în absența suprapunerii

$$I_1 = \langle\tilde{A}_1^*(t)\tilde{A}_1(t)\rangle$$

$$I_2 = \langle\tilde{A}_2^*(t)\tilde{A}_2(t)\rangle.$$

Se observă că interferența este determinată de partea reală a lui $\Gamma_{12}(\Delta\zeta)$.

Vom scrie (4.2) sub forma

$$\Gamma_{12}(\Delta\zeta) = I_1^{1/2} I_2^{1/2} \frac{\langle \tilde{A}_1^*(t)\tilde{A}_2(t)\rangle \exp(ik\Delta\zeta)}{I_1^{1/2} I_2^{1/2}} .$$

Dacă notăm

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\langle \tilde{A}_1^*(t)\tilde{A}_2(t)\rangle}{I_1^{1/2} I_2^{1/2}} \tag{4.4}$$

și ținem seama că $\gamma_{12}(0) = |\gamma_{12}(0)| \exp(i\alpha)$, putem scrie

$$\Gamma_{12}(\Delta\zeta) = I_1^{1/2} I_2^{1/2} |\gamma_{12}(0)| \exp[i(K\Delta\zeta + \alpha)]$$

iar intensitatea rezultată prin suprapunerea a două unde cu diferența de drum $\Delta\zeta$ va fi

$$I = I_1 + I_2 + 2I_1^{1/2} I_2^{1/2} |\gamma_{12}(0)| \cos(K\Delta\zeta + \alpha). \tag{4.5}$$

Esențial pentru valoarea intensității este factorul $|\gamma_{12}(0)|$, denumit *grad de coerență*. Valoarea acestuia este cuprinsă în intervalul închis $[0, 1]$. Pentru $|\gamma_{12}(0)| = 0$, avem necoerența undelor, astfel că $I = I_1 + I_2$.

Pentru $|\gamma_{12}(0)| = 1$, avem *coerența totală* a undelor, astfel că

$$I = I_1 + I_2 + 2I_1^{1/2} I_2^{1/2} \cos(K\Delta\zeta + \alpha).$$

Pentru $K\Delta\zeta + \alpha = 2m\pi$, unde $m \in \mathbb{N}$, se obțin maximele intensității luminoase cu valoarea $I_M = (I_1^{1/2} + I_2^{1/2})^2$, iar dacă

$$I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow I_M = 4I_0.$$

Pentru $K\Delta\zeta + \alpha = (2m + 1)\pi$, unde $m \in \mathbb{N}$, minimele intensității, iau valoarea $I_m = (I_1^{1/2} - I_2^{1/2})^2$, iar dacă $I_1 = I_2$, atunci $I_m = 0$.

Dacă $\alpha = 0$, condiția pentru maxime devine $K\Delta\zeta = 2m\pi$, deci $2\pi\Delta\zeta/\lambda = 2m\pi$, de unde găsim $\Delta\zeta = m\lambda$, adică maximele se obțin în punctele pentru care diferența de drum este un număr întreg de λ. Pentru $K\Delta\zeta = (2m + 1)\pi$, găsim $\Delta\zeta = (2m + 1)\lambda/2$, deci minimele se obțin în punctele în care diferența de drum este un număr impar de jumătăți de lungime de undă.

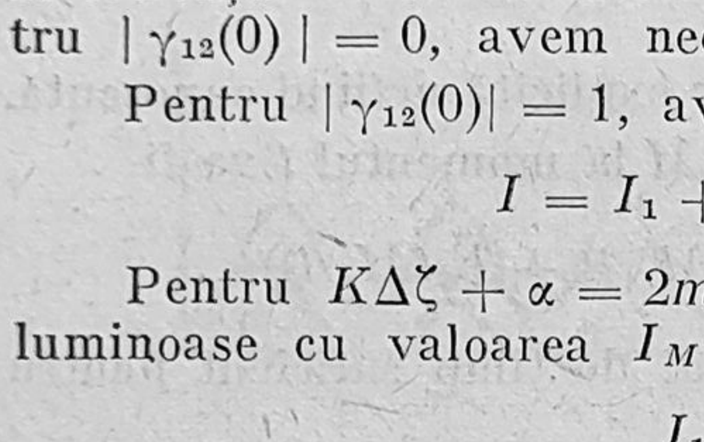


Fig. 4.10

Ecuația punctelor în care intensitatea luminoasă are valoarea maximă este așadar

$$\zeta_2 - \zeta_1 = m\lambda$$

și reprezintă o familie de hiperboloizi cu două pînze (vezi fig. 4.10), cu focarele în S_1 și S_2. Intersecția acestor hiperboloizi cu planul unui ecran ne dă o familie de hiperbole, iar dacă planul va fi suficient de îndepărtat, vom avea franje, aproximativ drepte, luminoase, separate de franje întunecate.

În cazul cînd $|\gamma_{12}(0)| \in (0, 1)$, avem *coerență parțială*. Acesta este cazul întîlnit de obicei în practică.

Din definiția vizibilității și din relația (4.5) rezultă

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{2I_1^{1/2} I_2^{1/2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}(0)|. \tag{4.6}$$

Dacă $I_1 = I_2 = I_0$ atunci $V = |\gamma_{12}(0)|$, adică vizibilitatea se identifică chiar cu gradul de coerență.

5. DIFRACȚIA

În accepțiunea cea mai largă a termenului, prin difracție se înțelege orice modificare a repartiției spațiale a intensității undei suferită ca urmare a întîlnirii unor neomogenități ale mediului. În sensul restrîns al cuvîntului — și în cele ce urmează ne vom referi numai la acest sens — prin difracție se înțelege modificarea repartiției spațiale a intensității undei produsă de ecrane sau de deschideri practicate în paravane. Interpretarea fenomenelor de difracție se bazează pe principiul lui Huygens.

5.1. Principiul lui Huygens

Să considerăm o sursă de unde S_p, denumită sursă primară și suprafața auxiliară închisă Σ, care înconjoară sursa S_p (fig. 5.1). Ca urmare a propagării undei primare, toate punctele din spațiu, inclusiv cele situate pe suprafața Σ, vor intra în oscilație constituind surse punctiforme care emit unde sferice. La baza principiului lui Huygens se află ideea că într-un punct arbitrar M, exterior suprafeței Σ, efectul undei primare este echivalent cu cel produs de undele emise de repartiția de surse secundare de pe suprafața Σ. De aici se induce următorul principiu foarte general pentru propagarea oricărui tip de unde: *efectul sursei primare într-un punct oarecare M, exterior suprafeței Σ, poate fi înlocuit prin efectul produs de o repartiție continuă de surse secundare, punctiforme, convenabil alese, situate pe suprafața auxiliară Σ.*

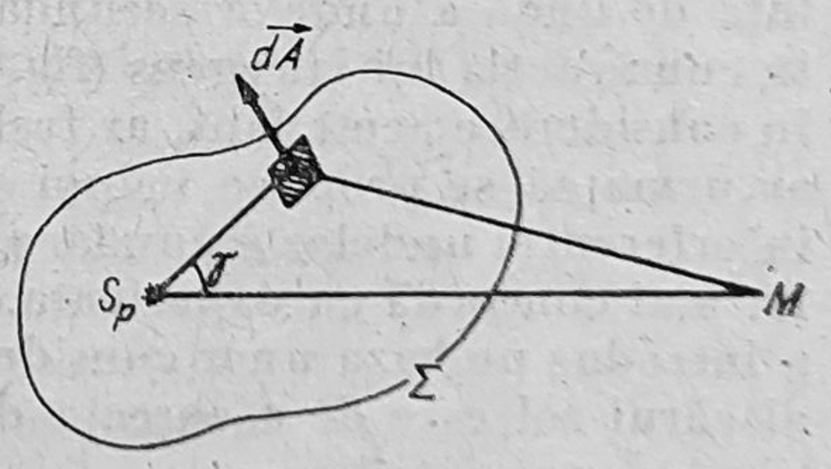


Fig. 5.1

Expresia „convenabil alese", implică prescrierea unui procedeu de alegere a caracteristicilor acestor surse dispuse pe suprafața Σ. Huygens a dat un procedeu geometric, foarte simplu pentru alegerea surselor secundare și anume *înfășurătoarea suprafețelor de undă ale undelor secundare trebuie să fie o suprafață de undă a undei generate de sursa primară.* În formularea lui Huygens, prin termenul de suprafață de undă se înțelege ceea ce denumim

astăzi suprafaţă echifază. În figura 5.2 se dă construcţia suprafeţei echifaze a undei primare ca înfăşurătoare a suprafeţelor echifaze sferice ale undelor secundare, în cazul în care unda primară este o undă sferică.

Un procedeu prin care se pot marca valorile amplitudinii şi fazei sursei în fiecare punct al suprafeţei Σ a fost dat de către Fresnel. Procedeul, cunoscut sub numele de *postulatul lui Fresnel* se enunţă astfel : *în fiecare punct*

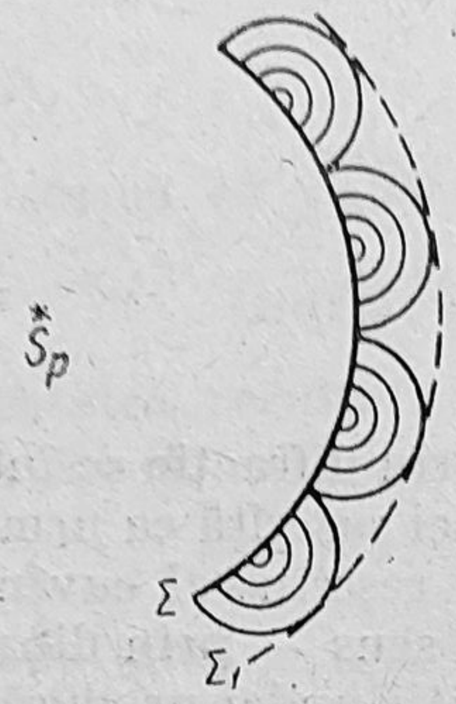


Fig. 5.2

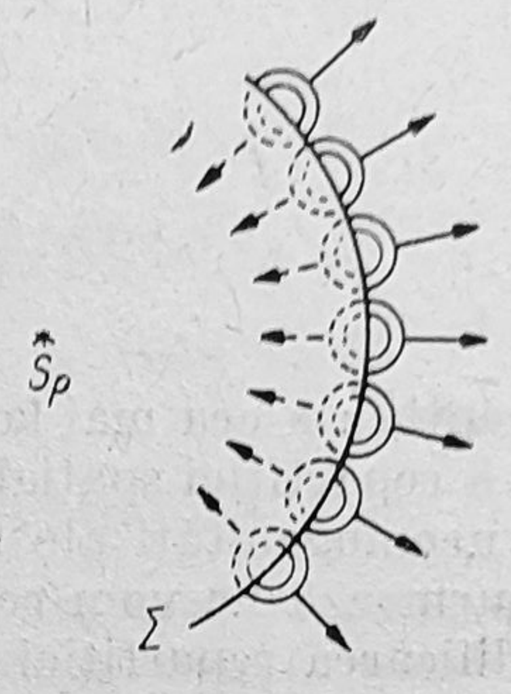


Fig. 5.3

al suprafeţei auxiliare, amplitudinea, respectiv faza sursei secundare este egală cu amplitudinea, respectiv faza oscilaţiei pe care o produce unda primară în acel punct. Fiecare sursă secundară avînd în acest fel faza exact definită, în raport cu faza sursei primare, urmează că toate undele secundare sînt *coerente* între ele, efectul în punctele exterioare fiind dat de interferenţa multiplă a acestor unde coerente.

Postulatul lui Fresnel prezintă cîteva aspecte destul de suspecte, observate de altfel chiar de către autorul său. De exemplu, rolul unghiului γ (fig. 5.1) în determinarea efectului surselor secundare este pur şi simplu ignorat. În al doilea rînd, pentru a avea concordanţă cu experienţa fazele prescrise de acest postulat ar trebui modificate cu $\pi/2$. În al treilea rînd, trebuie menţionat că, în toată rigoarea, trebuie să se ţină seama de faptul că suprafaţa de undă a undelor secundare nu este emisferică — aşa cum se consideră în construcţia lui Huygens (fig. 5.2) — ci are forma sferică. Dacă însă am lua în considerare acest fapt, ar trebui să ţinem seama şi de o undă regresivă care ar urma să se propage înapoi spre sursa primară (fig. 5.3). Dacă în calculul interferenţei undelor secundare se ţine seama şi de unda regresivă, rezultatele nu mai concordă cu experienţa. Pentru înlăturarea acestor dificultăţi, Fresnel a introdus pe baza unor considerente semiempirice un factor de directivitate, al cărui rol este de a corecta deficienţele mai sus semnalate.

5.2. **Relaţia Helmholtz-Kirchhoff**

Un procedeu mai rafinat de specificare a surselor secundare, continuu repartizate pe suprafaţa auxiliară, îl constituie relaţia Helmholtz-Kirchhoff. Deşi stabilită pentru undele scalare, totuşi repartiţia intensităţilor

dată de această relație este suficient de corectă și în cazul undelor vectoriale, cum ar fi, de exemplu, undele electromagnetice. Vom stabili, mai jos, această relație pentru undele armonice ; concluziile se pot însă extinde și în cazul unor unde mai complicate. Să considerăm un domeniu Δ, limitat de frontiera Σ (fig. 5.4) în care se propagă o undă armonică descrisă de expresia

$$\psi(x,\ y,\ z,\ t) = \psi(x,\ y,\ z)\exp(-i\omega t) \tag{5.1}$$

care verifică ecuația atemporală a undelor

$$\nabla^2\psi + K^2\psi = 0. \tag{5.2}$$

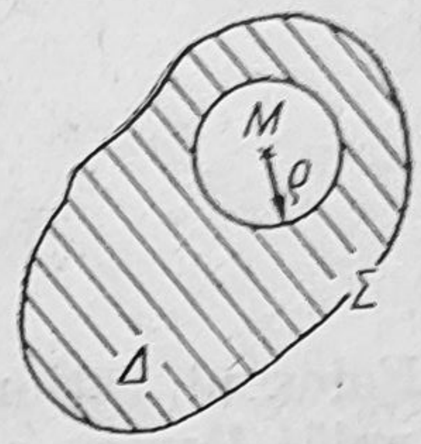


Fig. 5.4

Fie un punct M al domeniului Δ. Vom introduce funcția auxiliară

$$\Phi = \frac{\exp(iKr)}{r} \tag{5.3}$$

unde $r > 0$ este distanța de la punctul M pînă la punctul de observație. Se verifică imediat că și funcția Φ satisface ecuația atemporală a undelor

$$\nabla^2\Phi + K^2\Phi = 0. \tag{5.4}$$

Se observă că Φ are o singularitate în M. Pentru a elimina singularitatea, înconjurăm pe M cu o sferă S, de rază ρ. Aplicînd teorema a II-a a lui Green, obținem :

$$\int_{\Delta} (\Phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\Phi)\,d\tau = \oint_{\Sigma} (\Phi\nabla\psi - \psi\nabla\Phi)\,d\mathbf{A} - \oint_{S}\left(\Phi\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)dA.$$

Dar funcțiile ψ și Φ satisfac ecuațiile (5.2) și (5.4), astfel că integrala de volum este identic nulă și deci

$$\oint_{\Sigma} (\Phi\nabla\psi - \psi\nabla\Phi)\,d\mathbf{A} = \oint_{S}\left(\Phi\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)dA. \tag{5.5}$$

Vom căuta limita integralei din membrul drept al acestei relații, cînd raza sferei S tinde către zero

$$\lim_{\rho\to 0}\oint_{S}\left(\Phi\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)dA = \lim_{\rho\to 0} J_1 + \lim_{\rho\to 0} J_2.$$

Vom calcula mai întîi, integrala J_1 introducînd expresia (5.3),

$$\lim_{\rho\to 0} J_1 = \lim_{\rho\to 0}\oint_{S}\frac{\exp(iKr)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dA$$

Observăm însă că

$$\left|\oint_{S}\frac{\exp(iKr)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dA\right| \leqslant \operatorname*{Max}_{S}\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|\frac{\exp(iK\rho)}{\rho}\,4\pi\rho^2.$$

Se vede că membrul drept al inegalității se anulează la limita $\rho \to 0$ și deci

$$\lim_{\rho \to 0} J_1 = 0.$$

În ceea ce privește limita integralei J_2, observăm că

$$\lim_{\rho \to 0} J_2 = \lim_{\rho \to 0} \oint_S \left(-\psi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\exp(iKr)}{r} \right) \right) dA =$$

$$= -iK \lim_{\rho \to 0} \oint_S \psi \frac{\exp(iKr)}{r} \, dA + \lim_{\rho \to 0} \oint_S \psi \frac{\exp(iKr)}{r^2} \, dA.$$

Folosind raționamentul anterior, urmează că limita primei integrale este nulă. Pentru cea de-a doua limită, aplicînd teorema de mediere, obținem:

$$\lim_{\rho \to 0} J_2 = \lim_{\rho \to 0} \langle \psi \rangle_S \frac{\exp(iK\rho)}{\rho^2} 4\pi\rho^2 = 4\pi\psi(M).$$

Rezultă formula Helmholtz-Kirchhoff

$$\psi(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_\Sigma (\Phi \nabla \psi - \psi \nabla \Phi) \, d\mathbf{A}. \tag{5.6}$$

Din această relație apare foarte clar echivalența dintre efectul sursei primare în M și efectul repartiției de surse secundare pe suprafața auxiliară închisă arbitrară Σ.

5.3. Difracția prin deschideri

Să considerăm un paravan de întindere practic infinită, prevăzut cu o deschidere de arie Ω. Asupra paravanului cade o undă armonică emisă de sursa primară S (fig. 5.5). Pentru a putea calcula cu ajutorul relației lui Kirchhoff (5.6) funcția de undă într-un punct de observație M, ar trebui să cunoaștem atît pe ψ cît și pe $\nabla\psi$ pe întreaga suprafață. Un astfel de calcul nu este posibil și de aceea va fi necesar să facem cîteva aproximații și simplificări. Mai întîi, vom considera exclusiv deschideri Ω plane, adică deschideri a căror frontieră este o curbă plană. În acest caz vom putea înlocui funcția Φ cu o altă funcție G care îndeplinește condiția de a fi nulă pe aria plană Ω

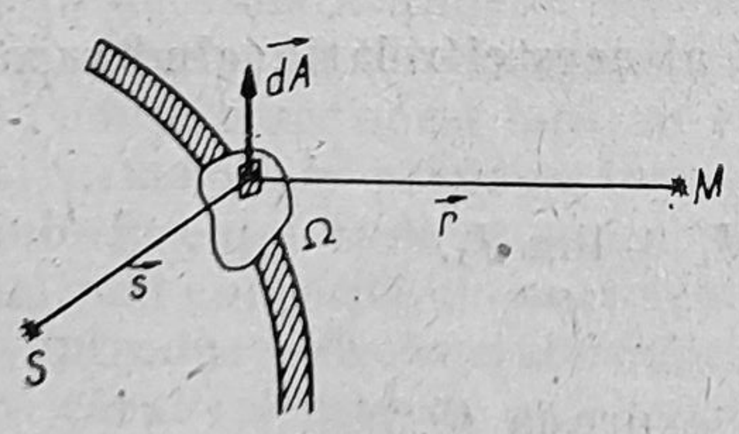


Fig. 5.5

$$G|_\Omega = 0.$$

Cu această condiție, formula Helmholtz-Kirchhoff ia forma mai simplă

$$\psi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Omega \psi \nabla G \, d\mathbf{A} \tag{5.7}$$

De asemenea, vom considera că funcţia ψ este nulă pe toată întinderea paravanului, cu excepţia deschiderii plane Ω. Condiţiile impuse funcţiei G se formulează acum astfel:

(a) G trebuie să satisfacă ecuaţia lui Helmholtz

$$\nabla^2 G + K^2 G = 0$$

(b) $G \to \Phi$, tot aşa cum $r \to 0$

(c) $G\,|_\Omega = 0$

(d) $r\left(\frac{\partial G}{\partial n} - \mathrm{i}KG\right) \to 0$ dacă $r \to \infty$ (condiţia de radiaţie).

Sommerfeld propune pentru G următoarea formă

$$G = \frac{\exp(\mathrm{i}Kr)}{r} - \frac{\exp(\mathrm{i}Kr')}{r'}. \tag{5.8}$$

În expresia lui G, r este distanţa de la M la punctul considerat, iar r' distanţa de la *simetricul* M' al lui M, faţă de planul deschiderii Ω, la punctul considerat (fig. 5.6). Evident, pentru punctele de pe planul Ω, $r = r'$ şi deci condiţia (c) este îndeplinită. Se verifică uşor că şi condiţiile (a), (b) şi (d) sînt îndeplinite.

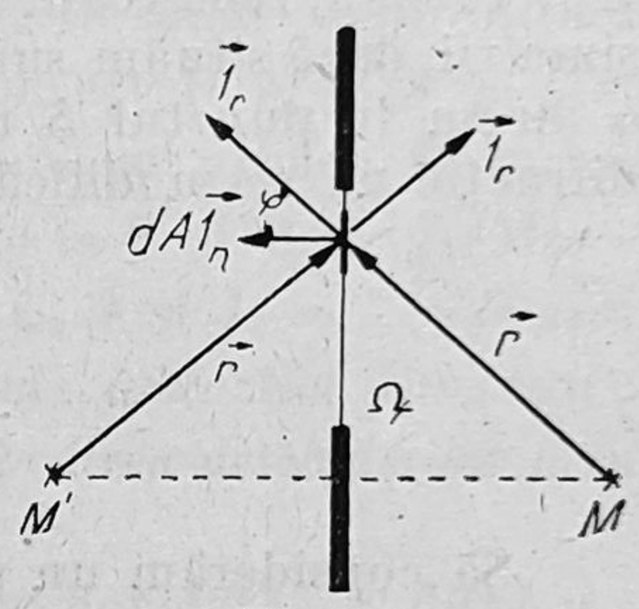


Fig. 5.6

Pentru a folosi formula (5.7), trebuie să calculăm ∇G

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial r}\nabla r + \frac{\partial G}{\partial r'}\nabla r' = \left(\mathrm{i}K - \frac{1}{r}\right)\frac{\exp(\mathrm{i}Kr)}{r}\mathbf{1}_r - \left(\mathrm{i}K - \frac{1}{r'}\right)\frac{\exp(\mathrm{i}Kr')}{r'}\mathbf{1}_{r'}.$$

Iar pe deschiderea Ω, întrucît pentru punctele de pe aceasta $r = r'$, se obţine

$$\nabla G\,|_\Omega = \left(\mathrm{i}K - \frac{1}{r}\right)\frac{\exp(\mathrm{i}Kr)}{r}(\mathbf{1}_r - \mathbf{1}_{r'}).$$

În timp ce $1/r$ este de ordinul unităţii, sau cel mult al zecilor, pentru undele luminoase $K \approx 10^7$ aşa încît în paranteza din expresia de mai sus $1/r$ este neglijabil. De aici urmează

$$\nabla G\,|_\Omega \approx \mathrm{i}K\frac{\exp(\mathrm{i}Kr)}{r}(\mathbf{1}_r - \mathbf{1}_{r'})$$

$$\mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\nabla G\,|_\Omega = 2\mathrm{i}K\frac{\exp(\mathrm{i}Kr)}{r}\mathrm{d}A\,\cos\varphi$$

$$\psi(M) = -\frac{\mathrm{i}K}{2\pi}\int_\Omega \psi(s)\frac{\exp(\mathrm{i}Kr)}{r}\cos\varphi\,\mathrm{d}A$$

sau, ţinînd seama că $\lambda = 2\pi/K$ şi $-\mathrm{i} = \exp(-\mathrm{i}\pi/2)$,

$$\psi(M) = \frac{\exp(-\mathrm{i}\pi/2)}{\lambda}\int_\Omega \psi(s)\frac{\exp(\mathrm{i}Kr)}{r}\cos\varphi\,\mathrm{d}A. \tag{5.9}$$

În această expresie apare explicit semnificația orientării elementului de arie, prin factorul cos φ, cît și modificarea fazelor cu $\pi/2$, fiind astfel justificate completările semiempirice aduse postulatului lui Fresnel.

În cazul în care unda primară este o undă armonică de amplitudine

$$\psi(s) = \psi_0 \frac{\exp(\mathrm{i}Ks)}{s} \tag{5.10}$$

unde s este distanța de la sursa primară la elementul $\mathrm{d}\mathbf{A}$ al suprafeței Ω și în ipoteza că unghiul φ este destul de mic pentru a putea aproxima $\cos\varphi \approx 1$, relația (5.9) capătă forma :

$$\psi(M) = \frac{\psi_0 \exp(-\mathrm{i}\pi/2)}{\lambda} \int_{\Omega} \frac{\exp[\mathrm{i}K(r+s)]}{rs} \mathrm{d}A. \tag{5.11}$$

Trebuie remarcată simetria expresiei (5.11) în r și s. Ca urmare a acestei simetrii, dacă situăm sursa în locul punctului de observație M, iar observația o facem în punctul S unde se afla inițial sursa, vom constata că figura de difracție nu se modifică.

5.4. Teorema lui Babinet

Să considerăm un paravan Π, plan, opac și să delimităm o regiune Ω_1 din acest paravan, în interiorul căreia să practicăm mai multe deschideri (fig. 5.7, a). Ca urmare a fenomenului de difracție, conform relației (5.11)

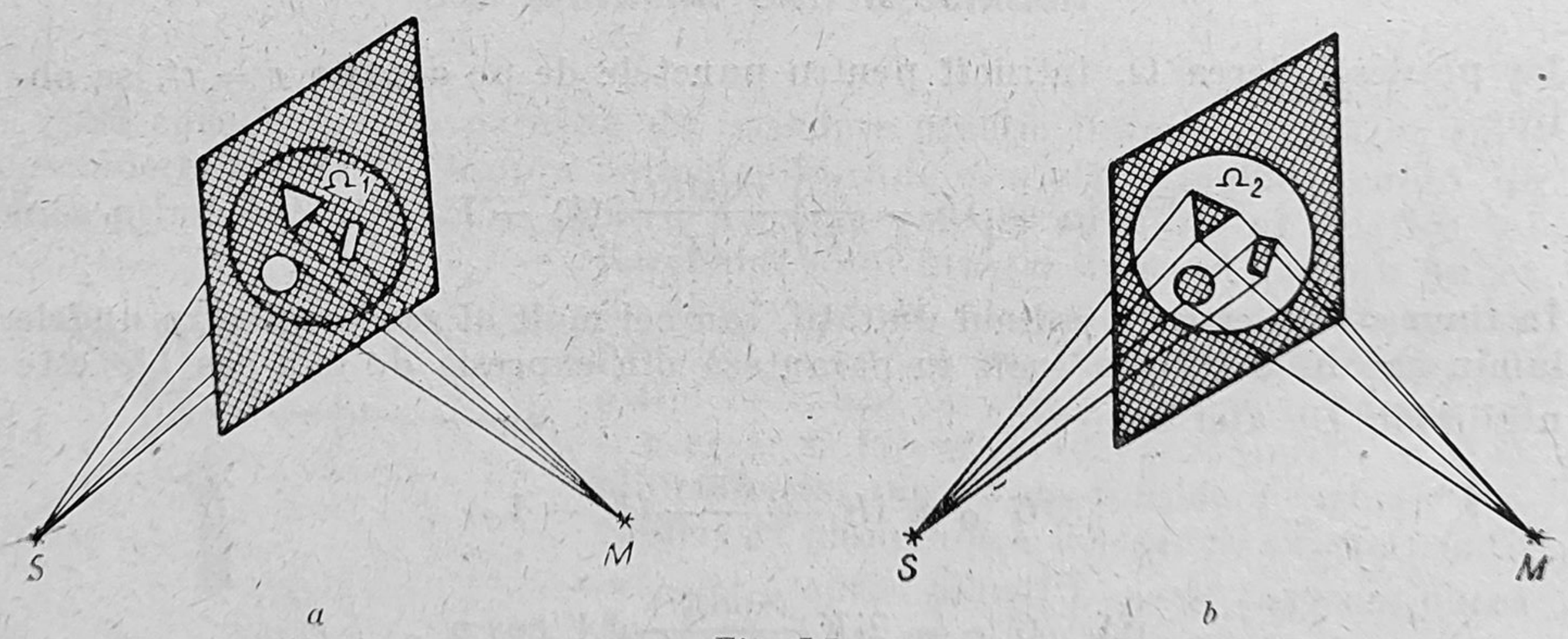


Fig. 5.7

din paragraful precedent, în punctul M amplitudinea undei va avea o valoare

$$\psi_1(M) = \mathrm{const} \int_{\Omega_1} \frac{\exp[\mathrm{i}K(r+s)]}{rs} \mathrm{d}A$$

integrala de suprafață fiind extinsă pe toate deschiderile din interiorul regiunii Ω_1.

Vom considera acum că se înlătură regiunea Ω_1 din paravan iar în locul deschiderilor se așează ecrane opace (fig. 4.7, b) exact de aceleași dimensiuni și de aceeași formă ca și deschiderile practicate în cazul precedent. Fie

$$\psi_2(M) = \text{const} \int_{\Omega_2} \frac{\exp[i K(r+s)]}{rs} \, dA$$

amplitudinea undei, integrala de suprafață fiind de data aceasta extinsă pe deschiderea Ω_2, prevăzută cu ecranele opace. De aici urmează că în cazul în care în deschidere nu s-ar afla ecranele, amplitudinea undei ar trebui să fie

$$\psi(M) = \psi_1(M) + \psi_2(M). \tag{5.12}$$

În ipoteza că Ω_1 este destul de mare, astfel încît difracția pe conturul acestei deschideri să fie neglijabilă, ar urma ca $\psi(M)$ să fie chiar amplitudinea undei primare care pornind din S ajunge în M. Dacă punctele M și S nu sînt în linie dreaptă, unda primară pornită din punctul S nu ajunge în punctul M, fiind oprită de paravanul Π, astfel că $\psi(M) = 0$ și deci $\psi_1(M) = -\psi_2(M)$. De aici urmează că intensitățile $I_1 = |\psi_1|^2$ și $I_2 = |\psi_2|^2$ sînt egale. În cuvinte, teorema lui Babinet se enunță astfel : *excluzînd iluminarea directă, figura de difracție rămîne neschimbată la înlocuirea deschiderilor prin ecrane identice și reciproc.*

De exemplu, dacă se evită iluminarea directă, se constată că difracția produsă de o fantă îngustă este identică cu cea produsă de un fir rectiliniu subțire.

5.5. Difracția Fresnel și difracția Fraunhofer

Să considerăm, așa cum se arată în figura 5.8, un paravan în care s-a practicat o deschidere plană. Unda armonică sferică emisă de sursa S suferă în deschidere fenomenul de difracție și este studiată în punctul de observație M. Introducem un sistem de referință triortogonal cu originea într-un punct O din interiorul deschiderii, axele Ox și Oy fiind cuprinse în planul deschiderii, iar axa Oz normală pe acest plan și îndreptată spre semidomeniul în care se află punctul de observație.

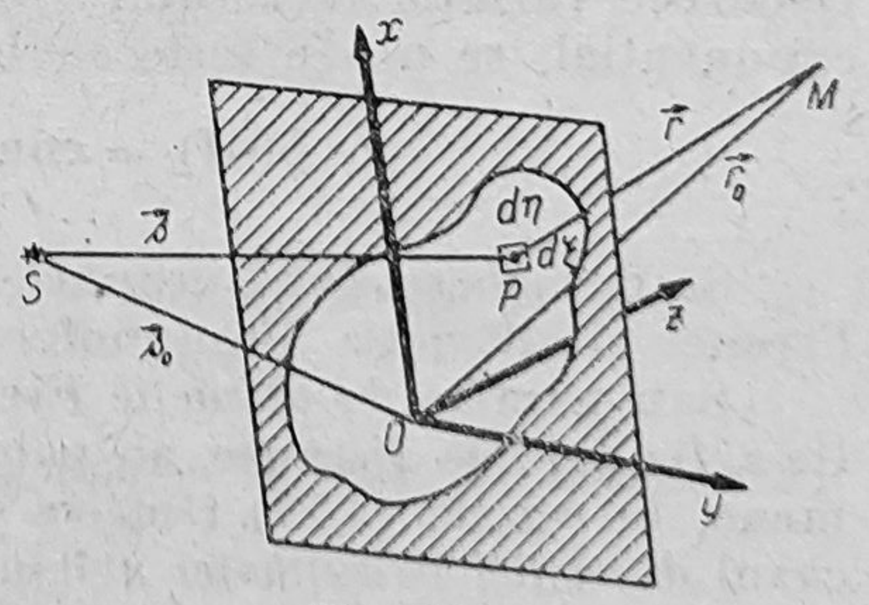


Fig. 5.8

Vom nota cu X, Y, Z coordonatele punctului S și cu x, y, z cele ale punctului M. Rezultă

$$s_0 = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} \tag{5.13}$$

$$r_0 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \tag{5.14}$$

Notînd cu ξ și η coordonatele unui punct oarecare P din deschidere, urmează că distanțele s, respectiv r, de la sursă, respectiv punctul de observație la punctul P, vor fi

$$s = [(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + Z^2]^{1/2}$$

$$= [s_0^2 - 2(X\xi + Y\eta) + \xi^2 + \eta^2]^{1/2} \tag{5.15}$$

$$r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$= [r_0 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2]^{1/2}. \tag{5.16}$$

Dezvoltînd relațiile (5.15) și (5.16) și limitîndu-ne la termenii în ξ^2 și η^2, adică la deschideri mici în raport cu r_0 și s_0, obținem

$$s = s_0 - \frac{X\xi + Y\eta}{s_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s_0} - \frac{(X\xi + Y\eta)^2}{2s_0^3} \tag{5.17}$$

$$r = r_0 - \frac{x\xi + y\eta}{r_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r_0} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2r_0^3}. \tag{5.18}$$

Notînd

$$\Phi_1 = -\xi\left(\frac{X}{s_0} + \frac{x}{r_0}\right) - \eta\left(\frac{Y}{s_0} + \frac{y}{r_0}\right) \tag{5.19}$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0}\right)\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \frac{(X\xi + Y\eta)^2}{2s_0^3} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2r_0^3} \tag{5.20}$$

formula lui Kirchhoff (5.11)

$$\psi(M) = \text{const} \int_\Omega \frac{\exp[\mathrm{i}K(r + s)]}{rs}\, \mathrm{d}A$$

dată la finele § 5.3, devine

$$\psi(M) = \text{const} \int_\Omega \frac{\exp[\mathrm{i}K(\Phi_1 + \Phi_2)]}{rs}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$$

unde în factorul constant s-au înglobat toți factorii independenți de ξ și de η. Deoarece variația factorului $1/rs$ este lentă, în raport cu variația factorului exponențial, se poate scrie cu bună aproximație

$$\psi(M) = \text{const} \int_\Omega \exp[\mathrm{i}K(\Phi_1 + \Phi_2)]\, \mathrm{d}A. \tag{5.21}$$

Se deosebesc două grupuri de fenomene de difracție distincte: difracția Fresnel și difracția Fraunhofer.

Sub numele de *difracție Fresnel* se înțeleg acele fenomene în care fie r fie s, fie ambele distanțe, au valori relativ mici. Pentru tratarea acestor fenomene, în relația (4.21) trebuie să ținem seama atît de Φ_1, cît și de Φ_2. În cazul *difracției Fraunhofer* atît unda incidentă cît și cea difractată sînt practic unde plane, astfel că r_0 și s_0 au valori foarte mari. În acest caz, deoarece $\xi, \eta \ll r_0, s_0$, putem admite că $\Phi_2 \ll \Phi_1$ și folosi expresia aproximativă

$$\psi(M) = \text{const} \int_\Omega \exp(\mathrm{i}K\Phi_1)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{5.22}$$

5.6. Difracția Fraunhofer printr-o fantă

Se numește fantă o deschidere dreptunghiulară cu una din laturi mult mai mare decît cealaltă. În figura 5.9, a se arată o fantă de deschidere a, latura lungă avînd lungimea L. Vom face ipoteza simplificatoare $L \gg a$, astfel că, în primă aproximație, fanta poate fi considerată de lungime infinită, efectele de la capetele fantei putînd fi deci neglijate. Vom considera că unda incidentă este o undă armonică plană, de vector de undă $K = 2\pi/\lambda$, a cărei

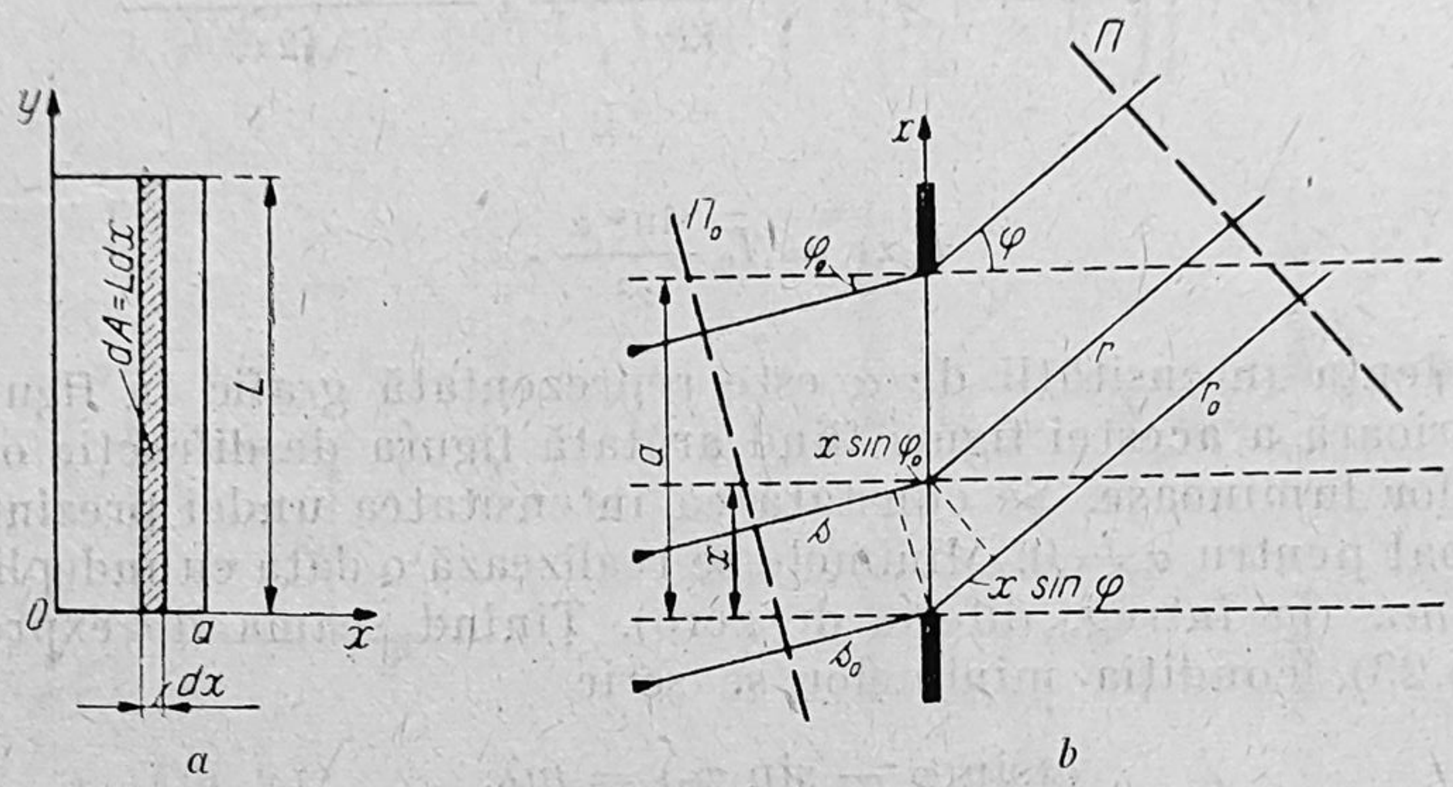


Fig. 5.9

direcție de propagare este situată într-un plan normal pe fantă, și paralel cu latura L a fantei. Difracția undei are loc sub toate unghiurile $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pe care le formează direcția de propagare a razei difractate cu normala la fantă. Este suficient să studiem difracția după un anumit unghi φ, concluziile extinzîndu-se apoi ușor pentru toate valorile acestui unghi din intervalul de mai sus. Din figura 5.9, b se vede că

$$s = s_0 + x \sin \varphi ; \qquad r = r_0 - x \sin \varphi_0$$

$$r + s = r_0 + s_0 - x(\sin \varphi - \sin \varphi_0) ; \quad rs \approx r_0 s_0$$

iar relația (5.11) de la finele § 5.3 devine

$$\psi = \text{const} \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{L} \exp[-iKx(\sin \varphi - \sin \varphi_0)] \, dx \, dy.$$

Întrucît $\int_0^L dy = L$, factor care de asemenea se poate îngloba în constantă, urmează că

$$\psi(\alpha) = \text{const} \int_0^a \exp\left(-i2\alpha \frac{x}{a}\right) \cdot dx$$

unde s-a notat

$$\alpha = \frac{Ka}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0) \tag{5.23}$$

Efectuînd integrala, obţinem

$$\psi = C\,\frac{\exp(-i2\alpha) - 1}{-i2\alpha}\,,\quad \psi^* = C^*\,\frac{\exp(i2\alpha) - 1}{i2\alpha}\,.$$

Intensitatea undei va fi deci

$$I(\alpha) = \psi^*\psi = |\,C\,|^2\,\frac{\exp(i2\alpha) - 1}{i2\alpha}\cdot\frac{\exp(-i2\alpha) - 1}{-i2\alpha}$$

sau

$$I(\alpha) = I_0\,\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\,. \tag{5.24}$$

Dependenţa intensităţii de α este reprezentată grafic în figura 5.10 în partea inferioară a acestei figuri fiind arătată figura de difracţie obţinută în cazul undelor luminoase. Se constată că intensitatea undei prezintă un maxim principal pentru $\alpha = 0$. Minimele se realizează o dată cu îndeplinirea condiţiei $\alpha = m\pi$ (m întreg, diferit de zero). Ţinînd seama de expresia lui α, dată de (5.23), condiţia minimelor se scrie

$$a(\sin\varphi - \sin\varphi_0) = m\lambda. \tag{5.25}$$

Pentru aflarea maximelor secundare punem condiţia

$$\frac{d}{d\alpha}\left(I_0\,\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right) = 0.$$

Efectuînd derivata constatăm că aceasta se anulează pentru rădăcinile ecuaţiei transcendente

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha. \tag{5.26}$$

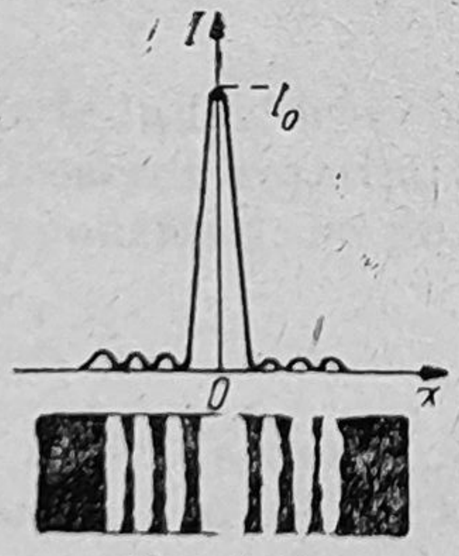


Fig. 5.10

Această ecuaţie se poate rezolva grafic, figurînd pe aceeaşi diagramă curbele tg α şi α.

Studiind condiţia de minim, pentru $\varphi_0 = 0$ şi $m = 1$ se obţine

$$\varphi = \arcsin\frac{\lambda}{a}\cdot$$

Pentru $\lambda \ll a$, rezultă $\varphi \approx 0$, adică difracţia nu se observă, ci apare numai umbra geometrică. Pentru $\lambda < a$, apare difracţia şi se observă că cu cît λ este mai mare, cu atît creşte şi lăţimea maximului principal. Dacă $\lambda = a \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, iar maximul principal se extinde în tot cîmpul. Pentru $\lambda > a$ difracţia nu mai are loc. Se vede că pentru $m\lambda/a \geqslant 1$, maximele nu mai există, deoarece nu există nici un unghi real cu sinusul supraunitar.

5.7. Difracția Fraunhofer printr-o deschidere dreptunghiulară

Considerațiile de mai sus se pot extinde și în cazul unei deschideri dreptunghiulare de laturi a, b de dimensiuni comparabile (fig. 5.11). Presupunem că o undă armonică plană cade pe deschidere sub un unghi φ_0 față de axa z, în planul x, z, și un unghi χ_0 față de axa z în planul y, z. Ne vom fixa atenția asupra difracției sub unghiurile φ, respectiv χ (fig. 5.12). Întrucît ne referim la difracția Fraunhofer, vom folosi relația (5.22) care în acest caz capătă forma

$$\psi(\varphi,\ \chi) = \text{const} \int_0^a \int_0^b \exp\left[\mathrm{i}\,2\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}\right)\right] \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

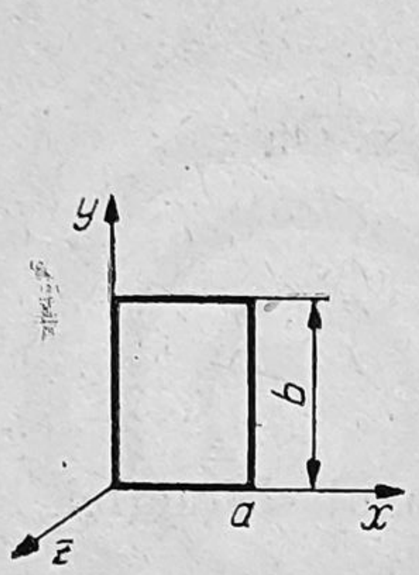


Fig. 5.11

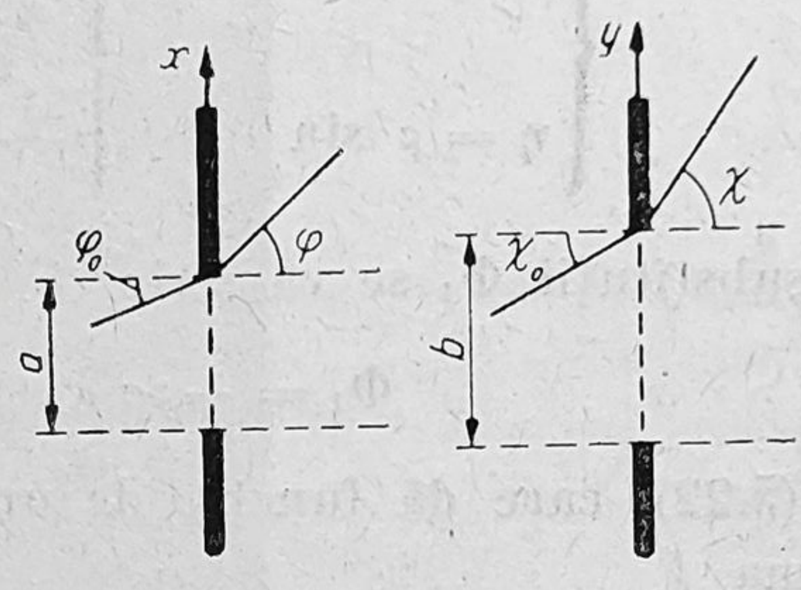


Fig. 5.12

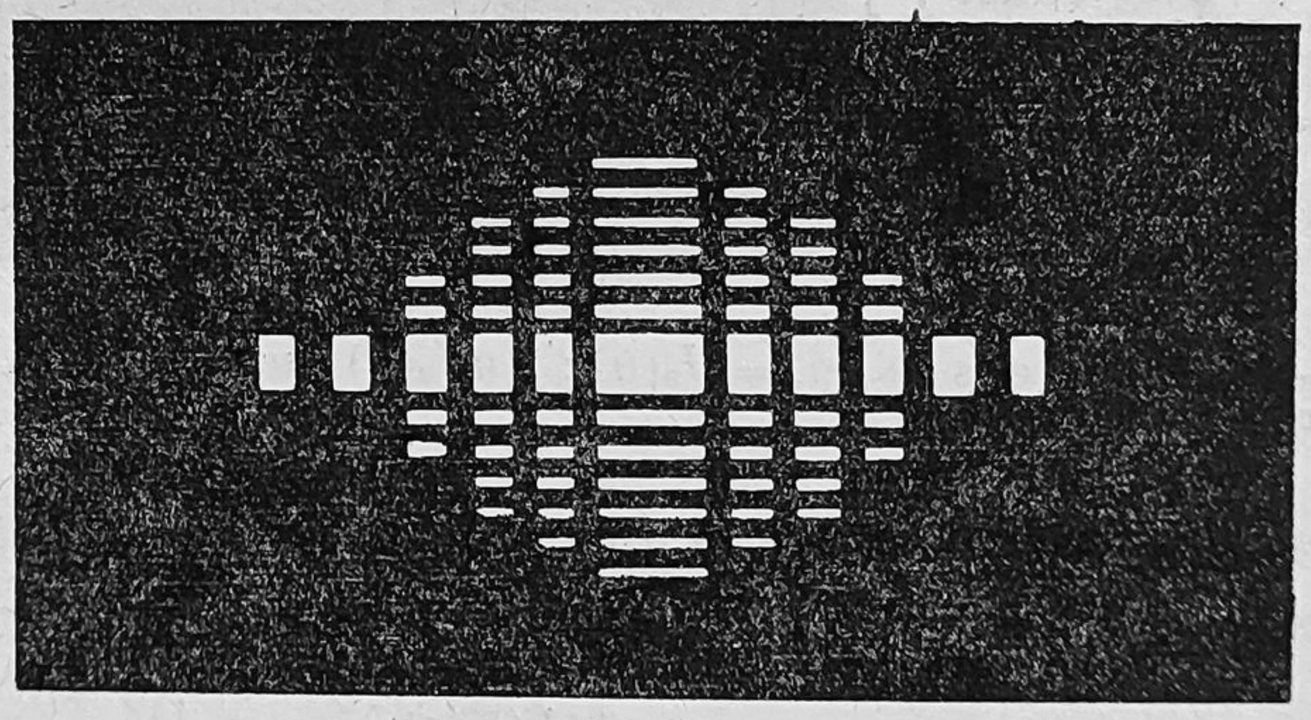


Fig. 5.13

unde

$$\alpha = \frac{Ka}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0), \quad \beta = \frac{Kb}{2}(\sin\chi - \sin\chi_0).$$

După integrare obținem

$$I = I_0 \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}. \tag{5.27}$$

În figura 5.13 se arată figura de difracție obținută în cazul deschiderii dreptunghiulare.

5.8. Difracția Fraunhofer printr-o deschidere circulară

Pentru calculul difracției în acest caz, ne vom referi din nou la figura 5.8 și la relația (5.19) în care se dă următoarea expresie pentru Φ_1

$$\Phi_1 = -\xi\left(\frac{X}{s_0} + \frac{x}{r_0}\right) - \eta\left(\frac{Y}{s_0} - \frac{y}{r_0}\right).$$

Vom situa originea axelor de coordonate în centrul deschiderii circulare și vom trece apoi la coordonate polare cu ajutorul substituțiilor

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos\theta \\ \eta = \rho \sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{X}{s_0} + \frac{x}{r_0} = \sigma \cos\varepsilon \\ \frac{Y}{s_0} + \frac{y}{r_0} = \sigma \sin\varepsilon. \end{cases}$$

Cu aceste substituții Φ_1 se va scrie

$$\Phi_1 = -\rho\sigma \cos(\theta - \varepsilon)$$

iar relația (5.22), care dă funcția de undă în cazul difracției Fraunhofer, capătă forma

$$\psi = \text{const} \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \exp[iK\rho\sigma \cos(\theta - \varepsilon)]\rho \, d\rho \, d\theta$$

unde a este raza orificiului circular considerat.

În teoria funcțiilor Bessel* se arată că

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(iu \cos\gamma)\, d\gamma = J_0(u)\,; \int_0^{u_0} uJ_0(u)\, du = u_0 J_1(u_0)$$

unde prin J_0, respectiv J_1 s-au notat funcțiile Bessel de speța întîi și de ordinul 0, respectiv 1. Ținînd seama de acestea rezultă ușor că

$$I = |\psi|^2 = I_0\left(\frac{J_1(Ka\sigma)}{Ka\sigma}\right)^2. \qquad (5.28)$$

Minimele intensității I sînt date de zerourile funcției Bessel J_1. Valorile corespunzătoare ale lui σ pentru primele patru zerouri sînt

$$0{,}61\,\frac{\lambda}{a};\ 1{,}12\,\frac{\lambda}{a};\ 1{,}62\,\frac{\lambda}{a};\ 2{,}12\,\frac{\lambda}{a}.$$

În figura 5.14 se arată figura de difracție obținută în acest caz.

---

* Vezi, de exemplu : A. Gray, G. B. Mathews, *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică*, Ed. Tehnică, București, 1957 (trad. din lb. engleză).

5.9. Difracția Fraunhofer prin rețele unidimensionale

Un sistem de fante coplanare, identice, paralele și echidistante constituie o rețea unidimensională (fig. 5.15). Lărgimea a a unei fante, echidistanța d dintre fante și numărul total N al fantelor constituie parametrii rețelei unidimensionale. Pentru a afla intensitatea undei difractate de rețea în funcție

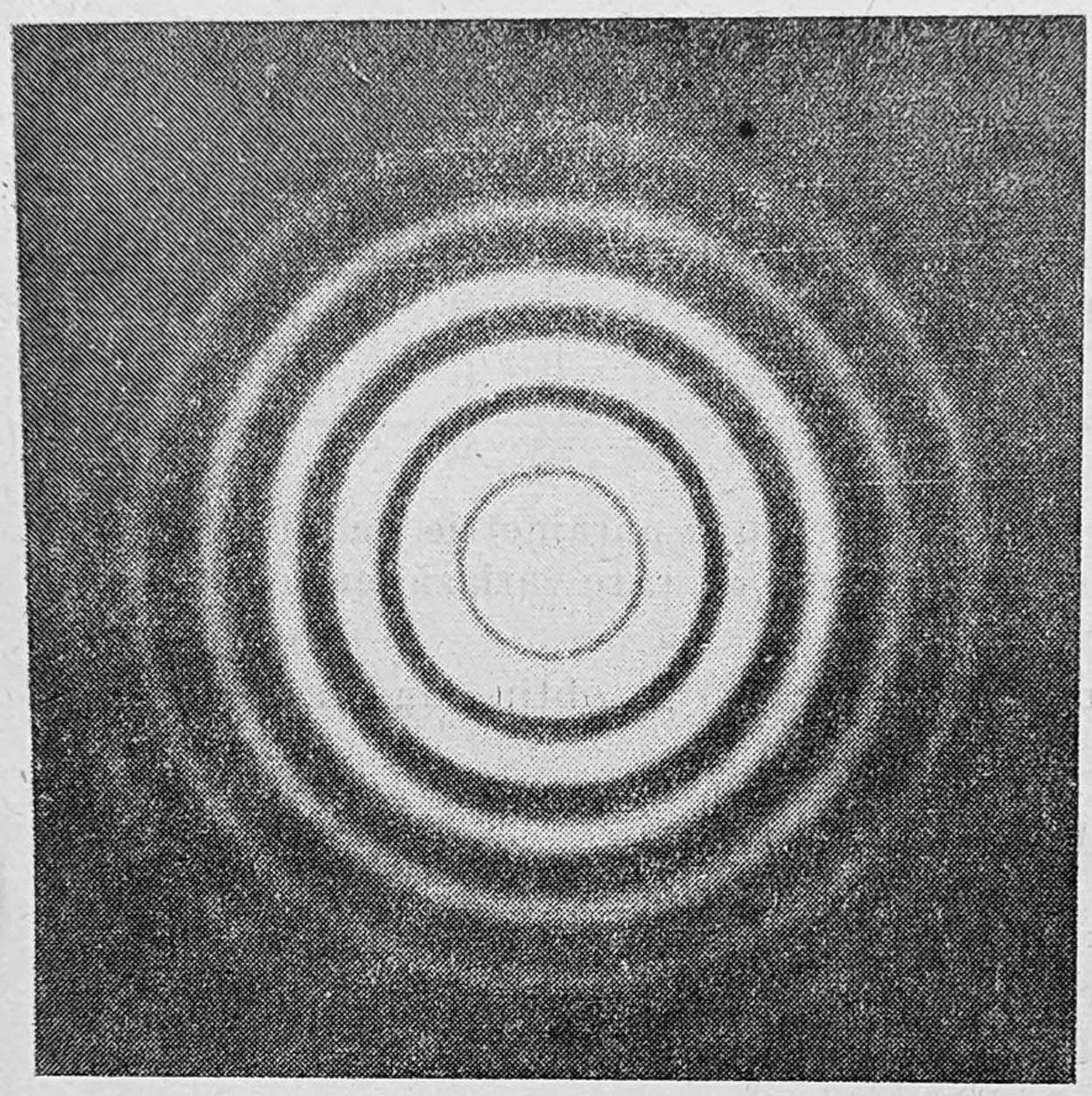


Fig. 5.14

Fig. 5.15

de unghiul de observație φ, vom proceda în același mod ca și în cazul difracției Fraunhofer printr-o fantă, dar vom extinde, de data aceasta, integrarea la toate cele N fante

$$\psi(\varphi) = \text{const.} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nd}^{nd+a} \exp[-\mathrm{i}Kx(\sin\varphi - \sin\varphi_0)]\,\mathrm{d}x.$$

Efectuînd integrarea termenului de rang n al sumei găsim

$$I_n = \frac{\exp[-\mathrm{i}K(nd+a)(\sin\varphi - \sin\varphi_0)] - \exp[-\mathrm{i}Knd(\sin\varphi - \sin\varphi_0)]}{-\mathrm{i}K(\sin\varphi - \sin\varphi_0)}$$

și introducînd notațiile

$$\delta = \frac{Kd}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0)\,; \quad \alpha = \frac{Ka}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0) \qquad (5.29)$$

rezultă

$$\psi = \text{const} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\exp(-i2\alpha) - 1}{-i2\alpha} (\exp(-i2\delta))^n. \tag{5.30}$$

După efectuarea sumei după n, găsim

$$\psi = \text{const} \frac{\exp(-i2\alpha) - 1}{-i2\alpha} \cdot \frac{1 - \exp(-i2N\delta)}{1 - \exp(-i2\delta)}.$$

Intensitatea undei va fi $I = \psi^*\psi$, sau în definitiv

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}. \tag{5.31}$$

Funcția $I = I(\delta, \alpha)$ este dată ca produsul a doi factori. Unul dintre acești factori, denumit de interferență

$$\mathcal{J}(\delta) = I_0 \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta} \tag{5.32}$$

este rapid variabil cu $(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$ și depinde parametric de N. Acest factor este *modulat* de factorul de difracție $\sin^2 \alpha/\alpha^2$, care variază lent cu $(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$.

Maximele principale ale funcției $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\delta)$ se obțin cînd este îndeplinită condiția

$$\delta = m\pi, \; m \in \mathbb{Z} \tag{5.33}$$

deoarece

$$\lim_{\delta \to m\pi} \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta} = N^2 \Rightarrow \mathcal{J}(\delta = m\pi) = N^2 I_0.$$

Maximele secundare ale acestei funcții se obțin cînd este îndeplinită condiția $d\mathcal{J}/d\delta = 0$. Anularea acestei derivate conduce, așa cum se poate constata ușor, la ecuația transcendentă

$$N \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} N\delta \tag{5.34}$$

rădăcinile acestei ecuații reprezentînd valorile lui δ pentru care se obțin maximele secundare. Maximele principale sînt mult mai intense decît cele secundare chiar dacă N este mic, iar pentru valori mari ale lui N nu se observă practic decît maximele principale, date de condiția (5.33). Ținînd seama de (5.29), această condiție se va scrie sub forma

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m\lambda. \tag{5.35}$$

Dependența $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\delta)$ este arătată în figura 5.16. Pe cînd $\mathcal{J}$ variază rapid cu argumentul φ, factorul de difracție $\sin^2 \alpha/\alpha^2$ prezintă o variație comparativ mult mai lentă. În fond, acest factor limitează valoarea relativă a intensității maximelor principale de diverse ordine în raport cu maximul corespunzător lui $\alpha = 0$. Curba punctată din figura 5.17 arată variația cu α a factorului de difracție, iar curba plină arată variația $I = I(\delta, \alpha)$.

Vom calcula acum intensitatea I_r a maximului principal de ordinul r. În acest scop vom înlocui în (5.31) pe α cu expresia din (5.29)

$$I_r = I_0 N^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right)}{\frac{\pi^2 a^2}{\lambda^2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)}$$

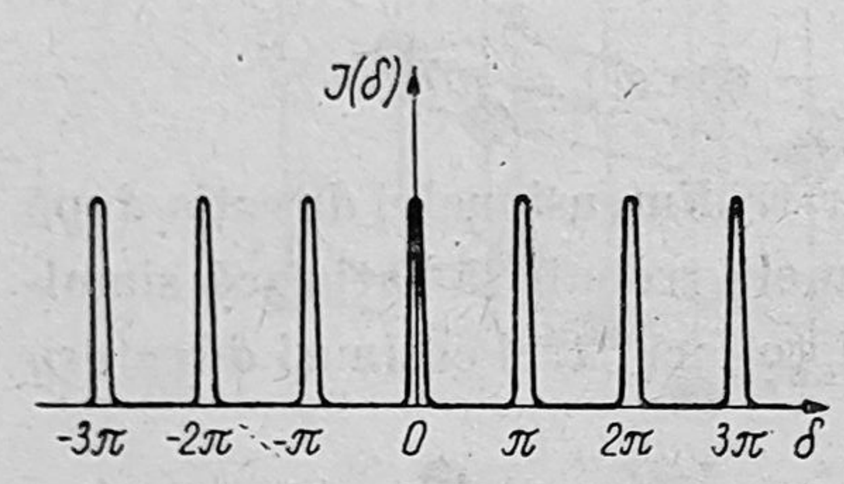


Fig. 5.16

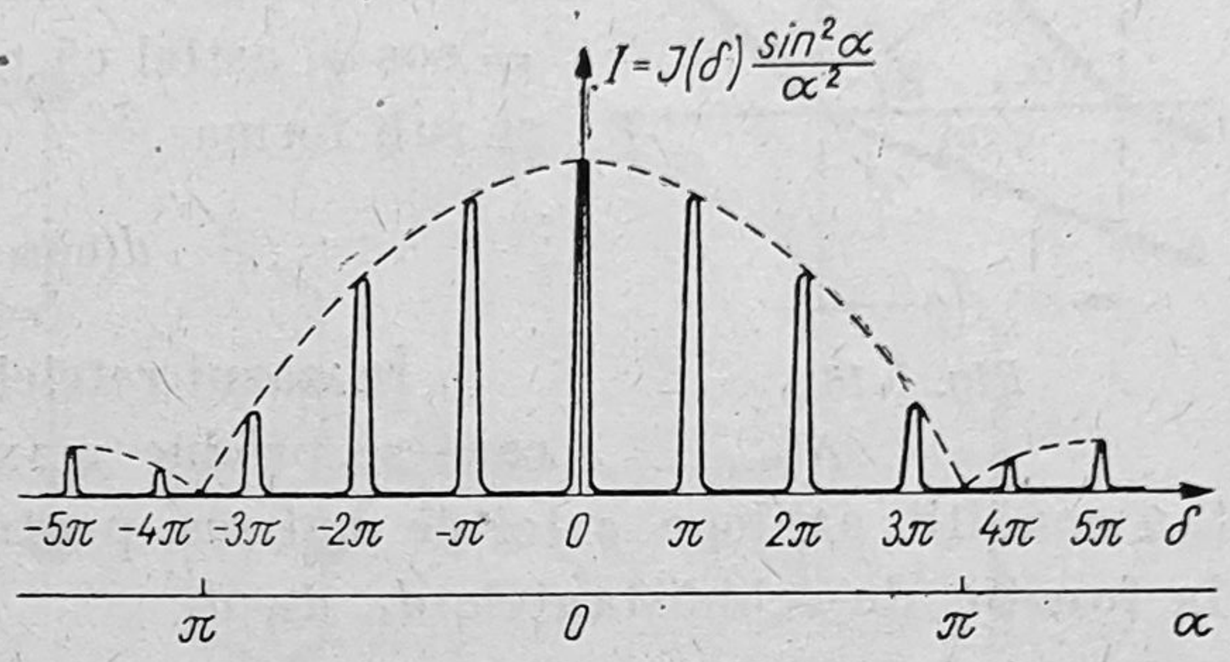


Fig. 5.17

și apoi pe $(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$ prin expresia rezultată din (5.35) particularizată pentru $m = r$

$$\sin \varphi - \sin \varphi_0 = \frac{r\lambda}{d} \cdot$$

După efectuarea calculelor rezultă

$$I_r = \frac{I_0 N^2 d^2}{\pi^2 r^2 a^2} \sin^2 \left(\pi \frac{ra}{d} \right). \tag{5.36}$$

Dacă a/d este o fracție rațională, există anumite valori ale lui r, pentru care raportul ra/d este un număr întreg și deci maximul respectiv lipsește, deoarece în acest caz intensitatea este nulă. De exemplu, dacă $a/d = 1/3$, lipsesc maximele de ordinele III, VI, IX, ...

5.10. Difracția Fraunhofer prin rețele tridimensionale

Ecuațiile lui von Laue. Un sistem tridimensional de deschideri dispuse spațial periodic după trei direcții necoplanare constituie o rețea tridimensională, sau spațială, deschiderile fiind separate între ele prin echidistanțele d_1, d_2 și d_3.

Să considerăm difracția, pe o rețea tridimensională, a unei unde armonice plane, a cărei direcție incidentă de propagare este dată în raport cu un sistem de referință de cosinușii directori $\cos \alpha_0$, $\cos \beta_0$, $\cos \gamma_0$. După difracție, observăm unda difractată după o direcție a cărei cosinuși directori sînt $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. Pentru a putea exprima condiția de maximum în funcție de

$\cos \alpha_0$, $\cos \beta_0$, $\cos \gamma_0$ și $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, ne vom referi mai întîi la difracția unei unde incidente sub unghiul φ_0 pe o rețea unidimensională de echidistanță d (fig. 5.18). Așa cum s-a arătat în § 5.9 condiția de maximum este

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m\lambda, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

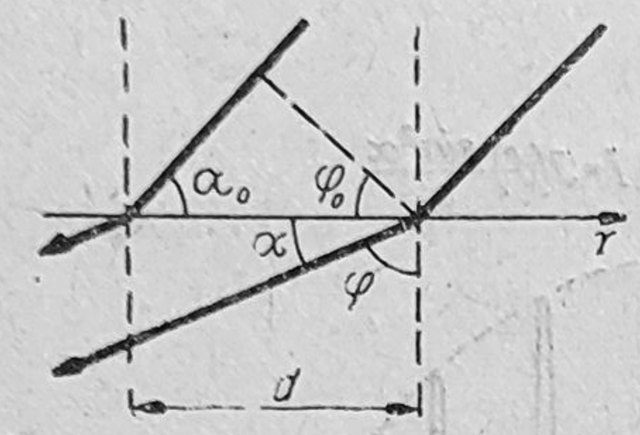


Fig. 5.18

Din figura 5.18 se vede însă imediat că există un referențial astfel că $\sin \varphi_0 = \cos \alpha_0$ și $\sin \varphi = \cos \varphi$, astfel că relația de mai sus se poate scrie și sub forma .

$$d(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda.$$

În cazul rețelelor tridimensionale, direcția după care se produc maximele trebuie să satisfacă simultan condiții analoge celei de mai sus, pentru toți cei trei cosinuși directori, în funcție de echidistanțele d_1, d_2, d_3

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \alpha_0 + \frac{m_1}{d_1} \lambda \\ \cos \beta &= \cos \beta_0 + \frac{m_2}{d_2} \lambda \qquad (5.37) \\ \cos \gamma &= \cos \gamma_0 + \frac{m_3}{d_3} \lambda \end{aligned}$$

$$m_1, \ m_2, \ m_3 \in \mathbb{Z}.$$

Aceste relații se numesc ecuațiile lui von Laue.

Putem elimina între aceste ecuații cosinușii directori $\cos \alpha$, $\cos \beta$ și $\cos \gamma$, ținînd seama că în general suma pătratelor cosinușilor directori este egală cu unitatea. Rezultă

$$\lambda = -2 \frac{\frac{m_1}{d_1} \cos \alpha_0 + \frac{m_2}{d_2} \cos \beta_0 + \frac{m_3}{d_3} \cos \gamma_0}{\frac{m_1^2}{d_1^2} + \frac{m_2^2}{d_2^2} + \frac{m_3^2}{d_3^2}}. \qquad (5.38)$$

Așadar, pentru fiecare direcție incidentă de cosinuși directori $\cos \alpha_0$, $\cos \beta_0$, $\cos \gamma_0$, maximele principale se produc numai pentru o anumită lungime de undă λ, dată de relația (5.38). Introducînd această expresie a lui λ în relațiile lui von Laue obținem

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= F_1(\alpha_0, \ \beta_0, \ \gamma_0 \ ; \ d_1, \ d_2, \ d_3 \ ; \ m_1, \ m_2, \ m_3) \\ \cos \beta &= F_2(\alpha_0, \ \beta_0, \ \gamma_0 \ ; \ d_1, \ d_2, \ d_3 \ ; \ m_1, \ m_2, \ m_3) \qquad (5.39) \\ \cos \gamma &= F_3(\alpha_0, \ \beta_0, \ \gamma_0 \ ; \ d_1, \ d_2, \ d_3 \ ; \ m_1, \ m_2, \ m_3). \end{aligned}$$

Întrucît m_1, m_2, m_3 sînt numere întregi, înseamnă că, pentru o rețea dată și o direcție de propagare incidentă dată, maximele de difracție au loc după o mulțime discretă de direcții privilegiate. Teoria de mai sus se referă la cristalele ortorombice, tetragonale și cubice, dar poate fi extinsă și în cazul cristalelor triclinice.

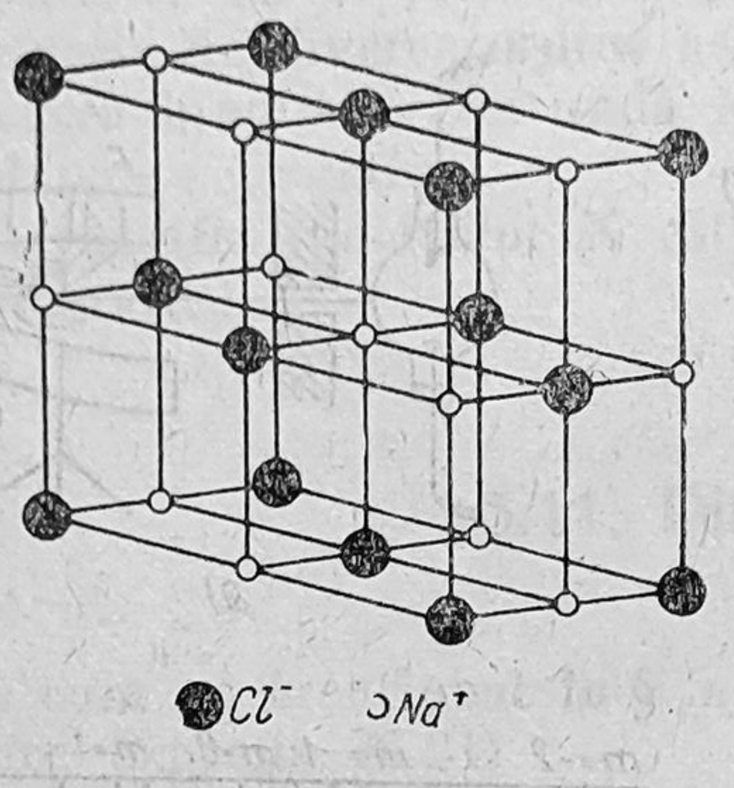


Fig. 5.19

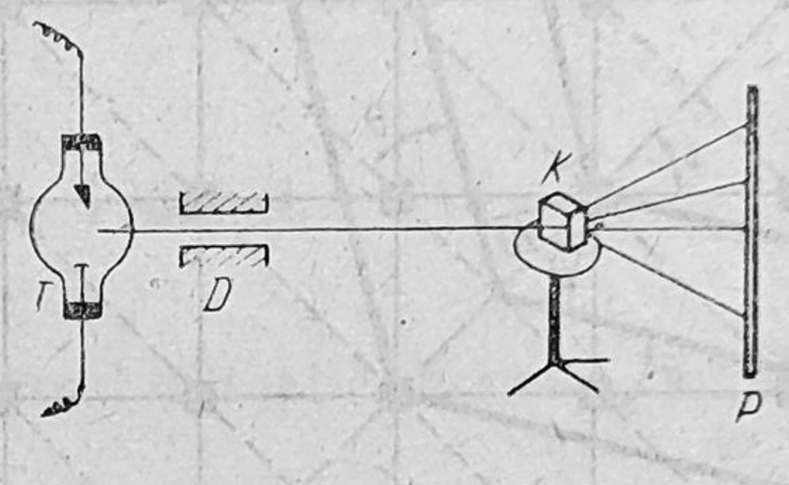


Fig. 5.20

Difracția radiațiilor X. Radiațiile X nu produc fenomene de difracție pe rețelele unidimensionale obișnuite, deoarece lungimea lor de undă este mult mai mică decît echidistanța dintre trăsăturile rețelei. Numai în cazul unei incidențe aproape razante, devine posibilă obținerea difracției pe rețelele de tip optic. De obicei, pentru difracția radiațiilor X se folosesc rețele cristaline naturale, echidistanțele avînd în aceste rețele dimensiuni comparabile cu lungimea de undă a radiațiilor X. În figura 5.19 se arată rețeaua unui cristal de clorură de sodiu.

În metoda von Laue (fig. 5.20), tubul T emite radiații X cu un spectru continuu. După trecerea prin diafragma D, practicată într-o placă de plumb, fasciculul de radiații se difractă în cristalul K, maximele producîndu-se în direcțiile privilegiate date de relația (5.39) și impresionează placa fotografică P într-un sistem discret de puncte. În figura 5.21 se arată o astfel de figură de difracție a radiațiilor X (lauegramă) produsă într-un monocristal de cuarț. Lauegramele prezintă mult interes în studiul proprietăților substanțelor cristalizate.

Fig. 5.21

Relația lui Bragg. Să considerăm într-o rețea cristalină tridimensională, un sistem de plane reticulare (I), (II), (III), ... paralele, distanța dintre acestea fiind d. O undă electromagnetică plană, din domeniul radiației X, cade sub un unghi de incidență α, pe acest sistem de plane reticulare. Între raza (1)

reflectată pe planul reticular (I) și raza (2), reflectată pe planul reticular (II), diferența de drum este

$$\Delta = 2d \sin \theta \tag{5.40}$$

unde d este echidistanța dintre planurile reticulare, iar $\theta = \frac{\pi}{2} - i$ complementul unghiului de incidență (fig. 5.22).

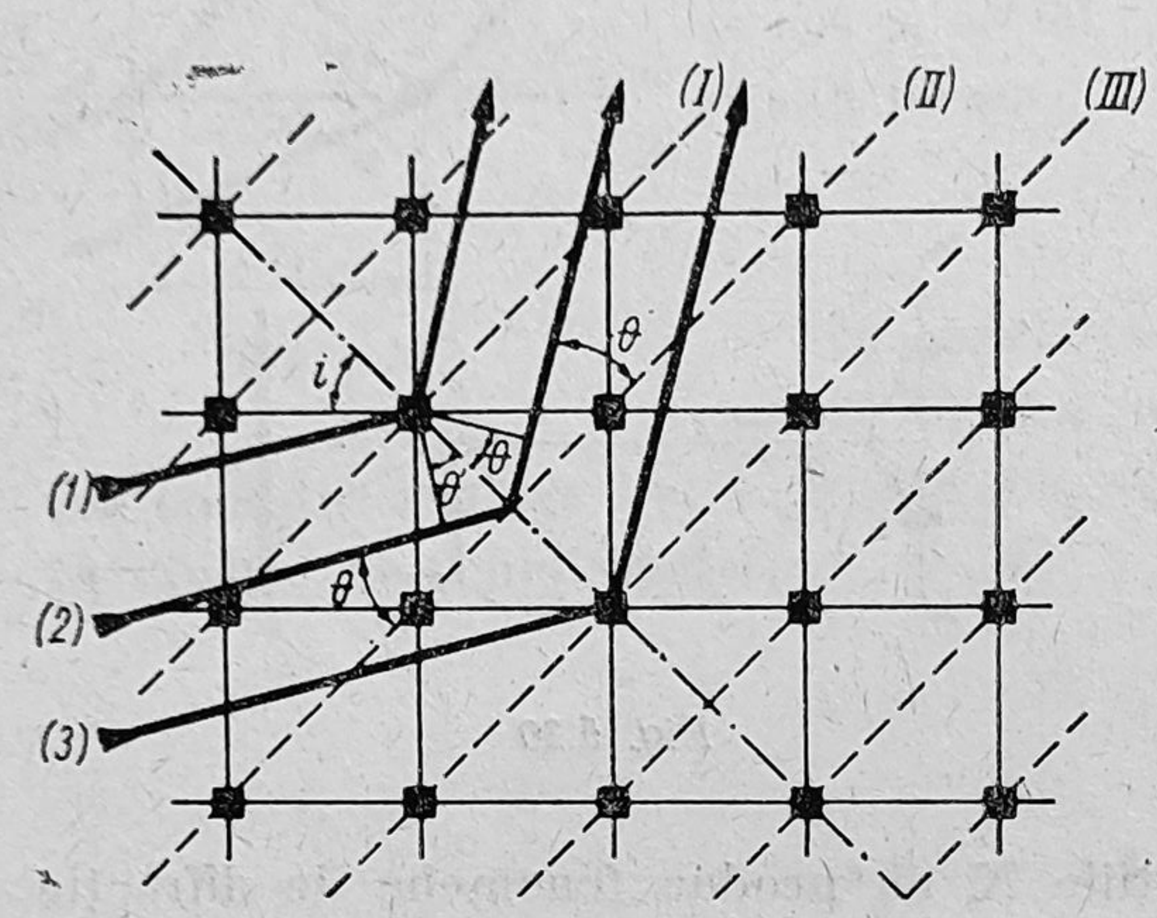


Fig. 5.22

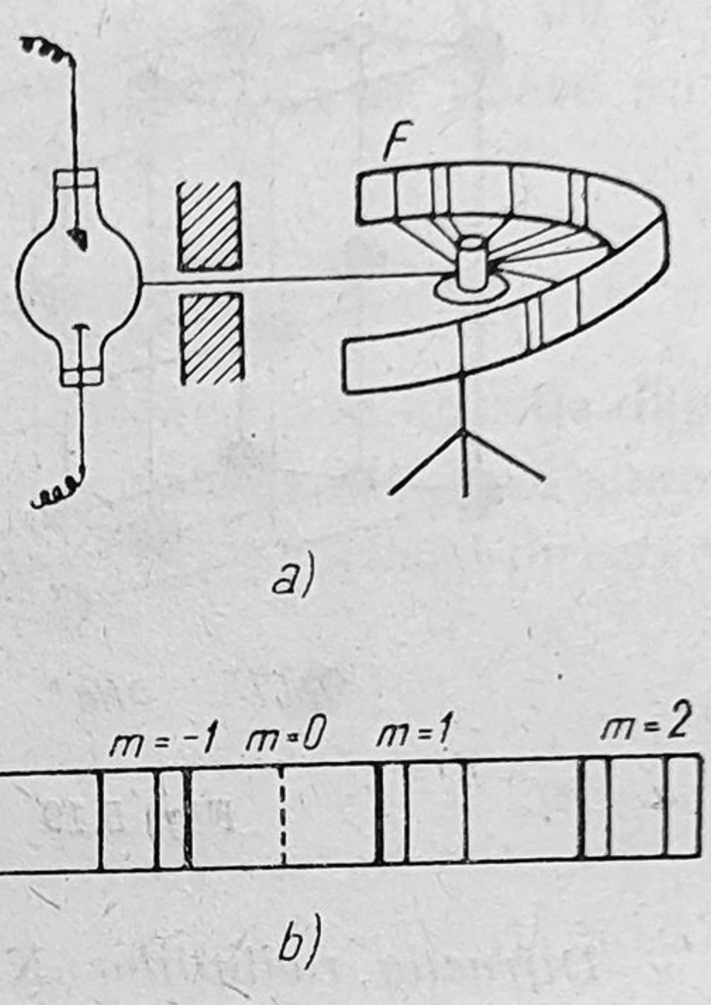


Fig. 5.23

Condiția ca prin suprapunerea acestor raze să se obțină maxime de interferență este

$$\Delta = m\lambda, \; m \in \mathbb{Z}. \tag{5.41}$$

Din (5.40) și (5.41) rezultă imediat relația lui Bragg

$$2d \sin \theta = m\lambda. \tag{5.42}$$

Reflexia nu are însă loc numai pe planurile reticulare (I) și (II) ci pe un număr imens de planuri reticulare paralele. Din acest motiv, maximele vor fi foarte nete, în fapt, avînd loc doar reflexia acelor unde a căror lungimi de undă satisfac relația (5.42). Menționăm că pentru a putea aplica relația lui Bragg este suficientă existența planurilor reticulare echidistante; așezarea ionilor în fiecare plan este indiferentă, fiind posibilă chiar și o repartiție aleatorie a acestora.

Spectrografia radiațiilor X. O metodă larg utilizată de spectrografie a radiațiilor X este metoda pulberilor cristaline. Fasciculul de radiații X, al cărui spectru ne interesează, după trecerea printr-o fantă îngustă, este îndreptat asupra unui cilindru obținut prin presarea unei pulberi cristaline fin măcinate (fig. 5.23, a).

Întrucît micile cristale din cilindru sînt orientate aleatoriu după toate direcțiile, înseamnă că există și cristale astfel orientate încît direcția de

propagare a undei incidente să formeze cu suprafața lor unghiuri $\theta_j^{(m)}$ care să corespundă relației lui Bragg

$$2d \sin \theta_j^{(m)} = m\lambda_j$$

pentru fiecare lungime de undă λ_j din spectrul radiației. În raport cu direcția de propagare a undei incidente, undele reflectate se vor propaga după o direcție deviată cu un unghi $2\theta_j^{(m)}$ și vor impresiona filmul fotografic FF curbat după un arc de cerc cu centrul situat pe axa cilindrului. Pe acest film apar spectrele de diverse ordine așa cum se arată în figura 5.23, b. Pentru determinarea lungimilor de undă λ_j este necesar să se cunoască distanța d dintre planele reticulare.

Spectrografia radiațiilor X este foarte importantă atît în chimie cît și în metalografie.

5.11. Difracția Fresnel

Așa cum s-a menționat în § 5.5 în cazul difracției Fresnel, amplitudinea undei are expresia (5.21)

$$\psi(M) = \text{const} \int_{\Omega} \exp[iK(\Phi_1 + \Phi_2)]\, d\xi\, d\eta$$

unde

$$\Phi_1 = -\xi\left(\frac{X}{s_0} + \frac{x}{r_0}\right) - \eta\left(\frac{Y}{s_0} + \frac{y}{r_0}\right) \tag{5.43}$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0}\right)\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - \frac{(X\xi + Y\eta)^2}{2s_0^3} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2r_0^3}. \tag{5.44}$$

În difracția Fresnel, dimensiunile deschiderii nu mai sînt neglijabile față de distanțele s și r (de la sursă la deschidere și de la punctul de observație la deschidere) așa încît trebuie să se țină seama atît de Φ_1 cît și de Φ_2. La studiul difracției Fresnel, este comod să se aleagă un astfel de sistem de coordonate încît Φ_1 să se anuleze.

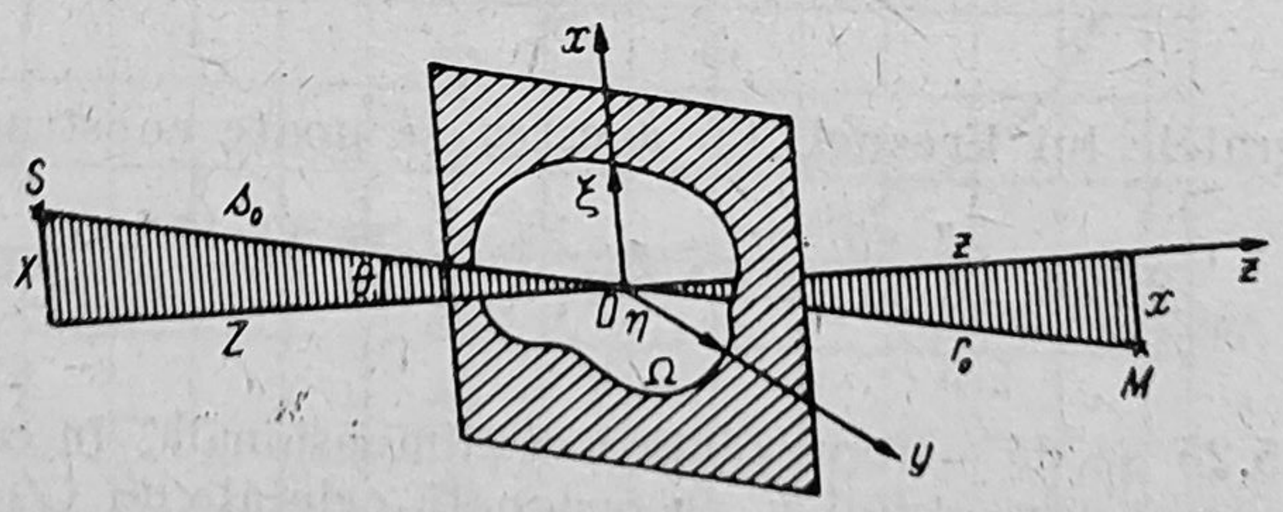


Fig. 5.24

Vom considera ca origine a sistemului de coordonate punctul O în care dreapta SM, care unește sursa cu punctul de observație, înțeapă planul deschiderii (vezi fig. 5.24). Axa $O\xi$ (și Ox) are direcția intersecției dintre planul deschiderii și planul de incidență (hașurat în figură), axa $O\eta$ (și Oy) este cu-

prinsă în planul deschiderii fiind normală pe $O\xi$ și Oz. Așa cum reiese din figură, ca urmare a alegerii acestui sistem de coordonate sînt valabile relațiile

$$\frac{X}{s_0} = -\frac{x}{r_0} = \sin\theta \tag{5.45 a}$$

$$\frac{Y}{s_0} = \frac{y}{r_0} = 0 \tag{5.45 b}$$

$$\frac{Z}{s_0} = \frac{z}{r_0} = \cos\theta. \tag{5.45 c}$$

Introducînd (5.45 a și b) în (5.43), rezultă* $\Phi_1 = 0$, iar expresia (5.44) a lui Φ_2 capătă acum forma

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0}\right)(\xi^2 \cos^2\theta + \eta^2). \tag{5.46}$$

Punînd

$$v = \xi\cos\theta\left[\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0}\right)\right]^{1/2};\quad w = \eta\left[\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{r_0}\right)\right]^{1/2} \tag{5.47}$$

urmează că

$$K\Phi_2 = \frac{\pi}{2}(v^2 + w^2) \tag{5.48}$$

astfel că expresia lui ψ devine

$$\psi(v,\ w) = \text{const}\int_{\Omega}\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(v^2 + w^2)\right]\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \tag{5.49}$$

Integralele lui Fresnel. Se pot introduce integralele

$$\mathrm{C}(u) = \int_0^u \cos\frac{\pi}{2}\tau^2\,\mathrm{d}\tau \tag{5.50}$$

$$\mathrm{S}(u) = \int_0^u \sin\frac{\pi}{2}\tau^2\,\mathrm{d}\tau \tag{5.51}$$

denumite integralele lui Fresnel. Cu acestea se poate construi funcția

$$\mathrm{F}(u) = \int_0^u \exp\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\tau^2\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{C}(u) + \mathrm{i}S(u). \tag{5.52}$$

În figura 5.25 se dă o reprezentare tridimensională, în care în abscisă se înscriu valorile argumentului u, în ordonată cele ale lui $\mathrm{C}(u)$, iar în cotă, cele ale lui $\mathrm{S}(u)$.

---

* Anularea lui Φ_1 este supusă următoarelor limitări : (i) riguros vorbind, fiecărui punct de observație M ar trebui să i se atribuie cîte un sistem de coordonate și (ii) în cazul punctelor de observație situate în exteriorul conului cu vîrful în S și ale cărui generatoare se reazemă pe conturul deschiderii Ω, originea coordonatelor cade în afara acestei deschideri. Observația difracției trebuie limitată la o regiune care nu pătrunde mult în umbra geometrică.

Din această reprezentare, se poate constata că în planul complex C, iS, dependența dintre aceste două funcții este dată de o curbă spirală, denumită *spirala lui Cornu*. Valorile integralelor $C(u)$ și $S(u)$ se pot obține fie din diagrame de tipul celor din figura 5.26, în care se reprezintă spirala lui Cornu, fie din tabele (de exemplu : E. Janke, F. Emde, *Functionentafeln mit Formel und Kurven*, Teubner Verlag).

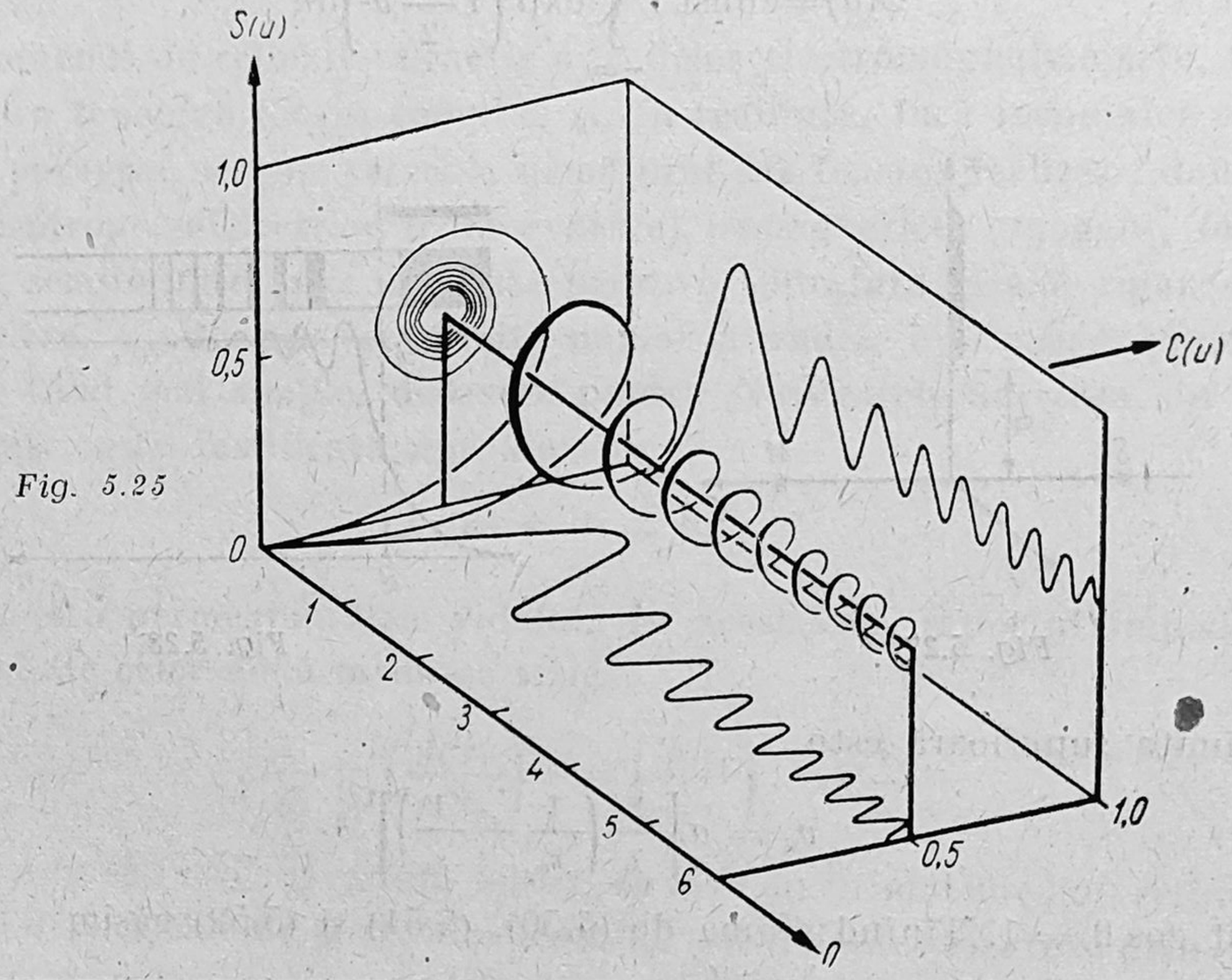


Fig. 5.25

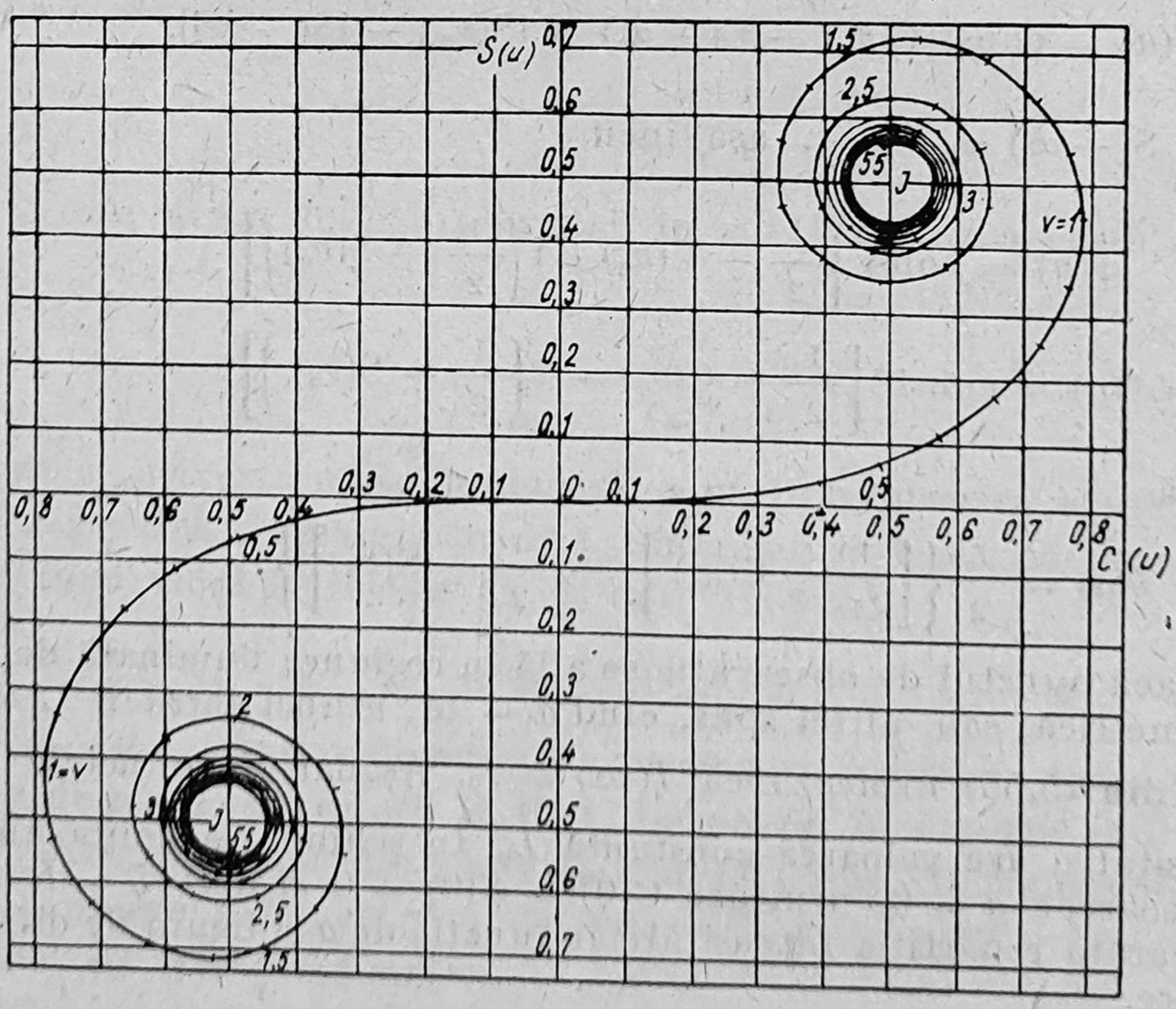


Fig. 5.26

Difracția Fresnel la muchia unui ecran semiinfinit. Să considerăm, așa cum se arată în figura 5.27, un ecran semiinfinit care prezintă o muchie rectilinie paralelă cu axa η. Muchia ecranului se află la distanța a de axa z, care coincide cu dreapta care unește sursa S de punctul de observație M. În acest caz, relația (5.49) capătă forma mai simplă

$$\psi(a)=\text{const}\cdot\int_{-\infty}^{v_a}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}v^2\right)\mathrm{d}v \tag{5.53}$$

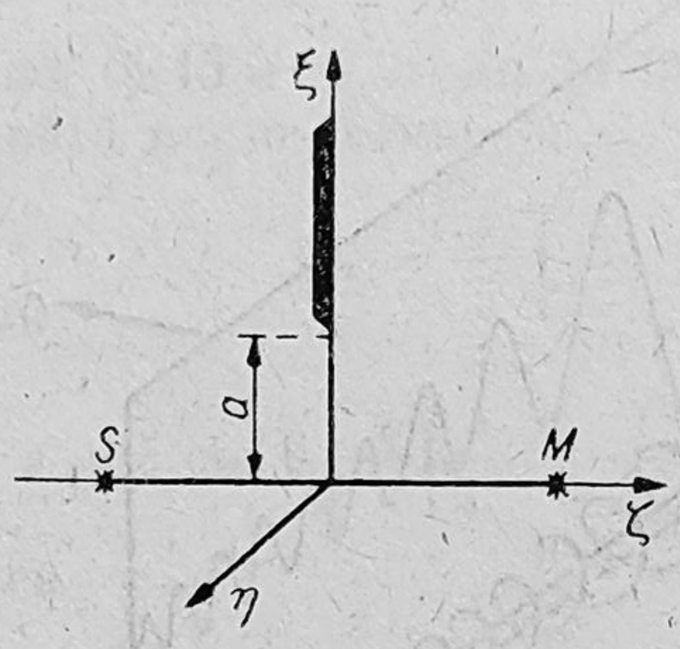


Fig. 5.27

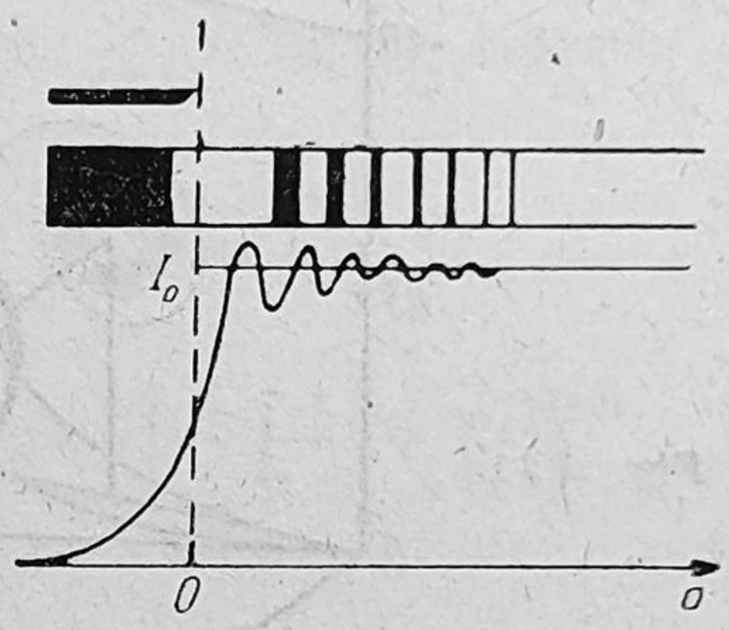


Fig. 5.28

unde limita superioară este

$$v_a=a\left[\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{s_0}\right)\right]^{1/2} \tag{5.54}$$

întrucît $\cos\theta=1$. Ținînd seama de (5.50), (5.51) și (5.52) găsim

$$\psi(a)=\text{const}[\mathrm{C}(v_a)-\mathrm{C}(-\infty)+\mathrm{iS}(v_a)-\mathrm{iS}(-\infty)].$$

Însă $\mathrm{C}(-\infty)=\mathrm{S}(-\infty)=-\frac{1}{2}$, așa încît

$$\psi(a)=\text{const}\left[\frac{1}{2}+\mathrm{C}(v_a)+\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{S}(v_a)\right)\right]$$

$$\psi^*(a)=\text{const}^*\left[\frac{1}{2}+\mathrm{C}(v_a)-\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{S}(v_a)\right)\right].$$

De aici rezultă

$$I(a)=\frac{I_0}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}+\mathrm{C}(v_a)\right]^2+\left[\frac{1}{2}+\mathrm{S}(v_a)\right]^2\right\}. \tag{5.55}$$

De exemplu, dacă punctul de observație se află în regiunea iluminată departe de umbra geometrică, sau, altfel spus, cînd $a\to\infty$, atunci întrucît $\mathrm{C}(\infty)=\mathrm{S}(\infty)=\frac{1}{2}$ din (5.55) urmează că $I(\infty)=I_0$. Așadar, în punctele îndepărtate, intensitatea are valoarea constantă I_0. În schimb, la limita umbrei geometrice, deoarece $a=0$, urmează $C(0)=S(0)=0$ și deci $I=I_0/4$. În figura 5.28 se arată repartiția intensității în funcție de a și figura de difracție corespunzătoare.

6. REFLEXIA-REFRACȚIA LUMINII LA FRONTIERA DINTRE DOUĂ MEDII DIELECTRICE OMOGENE

6.1. Considerații generale

Fenomenul de reflexie-refracție a undelor electromagnetice este, în cazul general, un fenomen foarte complex și, în realitate, încă incomplet elucidat. În acest paragraf ne vom referi la următorul caz foarte idealizat : două medii liniare, izotrope, dielectrice (conservative), nemagnetice, omogene, fără memorie și semiinfinite, sînt separate printr-o suprafață ideală, riguros plană, de întindere infinită. Ne vom limita numai la undele luminoase, în acest caz calculele fiind mai simple, deoarece pentru frecvențele acestora, în mediile considerate, este justificată aproximația

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \tag{6.1}$$

unde μ_0 este permeabilitatea vidului. În acest caz, raportul impedanțelor intrinseci ale celor două medii se scrie

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \left(\frac{\mu_0/\varepsilon_1}{\mu_0/\varepsilon_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mu_0\varepsilon_2}{\mu_0\varepsilon_1}\right)^{1/2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{6.2}$$

unde v_1, respectiv v_2 reprezintă viteza de fază în primul mediu, respectiv în cel de-al doilea. Mediile dielectrice izotrope pot fi caracterizate și prin indicele de refracție scalar

$$n = \frac{c}{v} \tag{6.3}$$

unde c este viteza de fază a luminii în vid. Folosind această mărime, putem scrie

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{6.4}$$

În ceea ce privește unda luminoasă, vom presupune că aceasta este o undă armonică plană și plan-polarizată, între latura electrică și cea magnetică a undei fiind valabilă relația (2.56) dată în § 2.5

$$\mathbf{E} = \zeta \mathbf{H} \times \mathbf{1}_n$$

unde $\mathbf{1}_n$ este versorul direcției de propagare a undei. Așa cum rezultă din relația de mai sus, vectorii **E**, **H**, $\mathbf{1}_n$ formează, în această ordine, un triedru drept. Această proprietate este intrinsecă undei electromagnetice și trebuie să se conserve, atît pentru unda reflectată, cît și pentru cea refractată și în procesul de reflexie-refracție.

Să presupunem că o undă incidentă are direcția de propagare normală pe planul Π pe care are loc fenomenul de reflexie-refracție. Pentru menținerea proprietății de mai sus, există două posibilități de orientare a vectorilor $\mathbf{E}^r$, $\mathbf{H}^r$, $\mathbf{1}_r$ ai undei reflectate (fig. 6.1) :

(α) $\mathbf{E}^r$ are același sens cu $\mathbf{E}^i$, dar $\mathbf{H}^r$ are sensul opus față de $\mathbf{H}^i$;

(β) $\mathbf{E}^r$ își schimbă sensul în raport cu $\mathbf{E}^i$, dar $\mathbf{H}^r$ are același sens cu $\mathbf{H}^i$. (Menționăm că indicele *i* se referă la unda incidentă, iar indicele *r* la cea reflectată.)

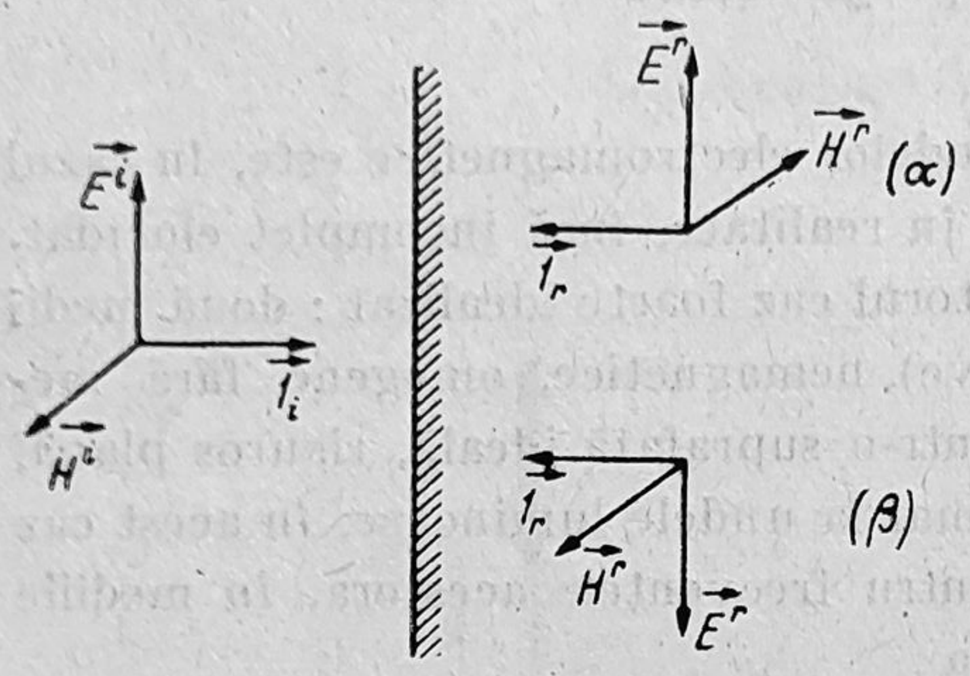


Fig. 6.1

Teoria lui Maxwell este incapabilă să răspundă care dintre cele două variante se realizează în realitate.

Pentru a cuprinde ambele variante, vom scrie

$$\frac{\mathbf{E}^r}{E^r} = f\frac{\mathbf{E}^i}{E^i}, \qquad \frac{\mathbf{H}^r}{H^r} = -f\frac{\mathbf{H}^i}{H^i} \tag{6.5}$$

unde $f = +1$ în varianta (α), respectiv $f = -1$ în varianta (β). Factorul f trebuie interpretat ca un *factor de fază*

$$f = \begin{cases} 1 = e^0 \\ -1 = e^{\pm i\pi} \end{cases} \tag{6.6}$$

în varianta (α) $\mathbf{E}^i$ și $\mathbf{E}^r$ aflîndu-se în fază, iar $\mathbf{H}^i$ și $\mathbf{H}^r$ în opoziție de fază, în timp ce în varianta (β) $\mathbf{E}^i$ și $\mathbf{E}^r$ sînt în opoziție de fază, iar $\mathbf{H}^i$ și $\mathbf{H}^r$ sînt în fază. În acest sens, relațiile (6.5) trebuie rescrise sub forma

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \mathbf{E}^r &= f \operatorname{sgn} \mathbf{E}^i \\ \operatorname{sgn} \mathbf{H}^r &= -f \operatorname{sgn} \mathbf{H}^i \end{aligned} \tag{6.7}$$

valabile pentru oricare incidență a undei. Pînă în prezent nu există o convenție unică de atribuire a valorii $+1$ sau -1 factorului f, diverși autori adoptînd convenții diferite.

În încheierea acestor remarci preliminare, observăm că o undă electromagnetică plan-polarizată admite descompunerea următoare. Fie Π suprafața de separare plană dintre cele două medii, $\mathbf{1}_i$ versorul direcției de propagare al undei incidente, iar $\mathbf{1}_n$ versorul normalei la suprafața de separație Π dintre cele două medii (vezi fig. 6.2). *Planul P_i determinat de versorii $\mathbf{1}_i$ și $\mathbf{1}_n$ se numește plan de incidență.* O undă electromagnetică plan-polarizată poate fi descompusă în două unde și anume :

Fig. 6.2

Fig. 6.3

(i) o undă E_s, H_p al cărei cîmp electric oscilează într-un plan normal la planul de incidenţă şi al cărei cîmp magnetic oscilează în planul de incidenţă ;

(ii) o undă E_p, H_s al cărei cîmp electric oscilează în planul de incidenţă şi al cărei cîmp magnetic oscilează într-un plan normal la planul de incidenţă.

Această descompunere este arătată în figura 6.3. Cele două unde se pot studia separat. Remarcăm că se poate demonstra uşor că în fiecare mediu

$$\zeta = \left|\frac{E}{H}\right| = \left|\frac{E_s}{H_p}\right| = \left|\frac{E_p}{H_s}\right|. \tag{6.8}$$

6.2. Reflexia-refracţia undei E_s, H_p

În cele ce urmează vom afecta cu indicele *i* mărimile referitoare la unda incidentă, cu indicele *r* cele referitoare la unda reflectată, iar cu indicele *t* cele referitoare la unda transmisă (refractată). Mărimile caracteristice mediului (I) vor fi afectate de indicele 1, iar cele caracteristice mediului (II) de indicele 2.

Intensitatea cîmpului electric pentru cele 3 unde (incidentă, reflectată şi transmisă) este

$$E_s^i = A_s \exp\left[\mathrm{i}\omega_i\left(\frac{\mathbf{1}_i\mathbf{r}}{v_1} - t\right)\right] = A_s \exp(\mathrm{i}\varphi_i)$$

$$E_s^r = R_s \exp\left[\mathrm{i}\omega_r\left(\frac{\mathbf{1}_r\mathbf{r}}{v_1} - t\right)\right] = R_s \exp(\mathrm{i}\varphi_r) \tag{6.9}$$

$$E_s^t = T_s \exp\left[\mathrm{i}\omega_t\left(\frac{\mathbf{1}_t\mathbf{r}}{v_2} - t\right)\right] = T_s \exp(\mathrm{i}\varphi_t).$$

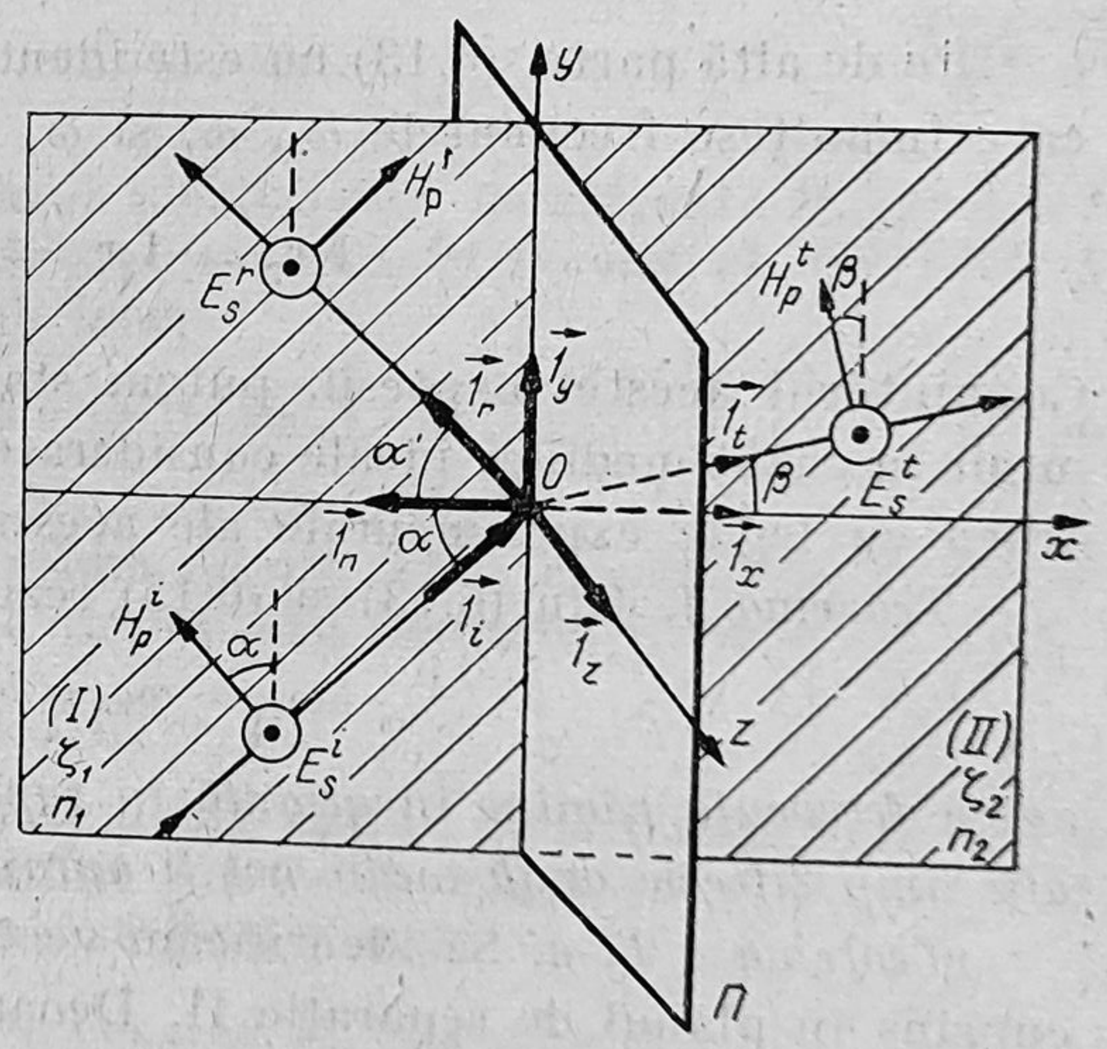


Fig. 6.4

A_s, R_s, T_s sînt amplitudinile celor 3 unde, $\mathbf{1}_i$, $\mathbf{1}_r$, $\mathbf{1}_t$ versorii direcţiilor de propagare ale acestora (fig. 6.4) iar ω_i, ω_r, ω_t frecvenţele celor trei unde, despre care nu putem spune, deocamdată, dacă sînt, sau nu, egale între ele. Prin $\mathbf{r}$ s-a notat vectorul de poziţie al unui punct oarecare de observaţie în raport cu punctul *O*. Planul (x, y) al figurii 6.4 este chiar planul de incidenţă, iar axa *z* normală pe acest plan şi deci şi pe planul hîrtiei.

În electrodinamică se arată că atît componenta tangenţială a intensităţii cîmpului electric, cît şi componenta tangenţială a intensităţii cîmpului mag-

netic sînt continue pe planul de separaţie Π dintre cele două medii. În cazul undei E_s, H_p continuitatea componentei tangenţiale a intensităţii cîmpului electric se scrie

$$(E_s^i + f_s E_s^r)\,|_\Pi = E_s^t\,|_\Pi \tag{6.10}$$

unde $f_s = \pm 1$ este factorul de fază. Notînd $\mathbf{r}\,|_\Pi = \mathbf{r}_\pi$ vectorul de poziţie al unui punct arbitrar de pe planul de separaţie Π şi înlocuind în (6.10) expresiile date de (6.9), găsim

$$A_s \exp[i\varphi_i(\mathbf{r}_\pi, t)] + f_s R_s \exp[i\varphi_r(\mathbf{r}_\pi, t)] = T_s \exp[i\varphi_t(\mathbf{r}_\pi, t)]. \tag{6.11}$$

Relaţia de mai sus trebuie să fie satisfăcută identic oricare ar fi valorile variabilelor independente $\mathbf{r}_\pi$ şi t. Aceasta însă nu are loc decît dacă pe planul de separaţie Π fazele sînt egale

$$\varphi_i(\mathbf{r}_\pi, t) = \varphi_r(\mathbf{r}_\pi, t) = \varphi_t(\mathbf{r}_\pi, t) \tag{6.12}$$

adică

$$\omega_i\left(\frac{\mathbf{1}_i\mathbf{r}_\pi}{v_1} - t\right) = \omega_r\left(\frac{\mathbf{1}_r\mathbf{r}_\pi}{v_1} - t\right) = \omega_t\left(\frac{\mathbf{1}_t\mathbf{r}_\pi}{v_2} - t\right). \tag{6.13}$$

Cu această condiţie, relaţia (6.11) se scrie

$$A_s + f_s R_s = T_s. \tag{6.14}$$

Pe de altă parte, (6.13) nu este identic satisfăcută decît dacă parantezele care înmulţesc frecvenţele ω_i, ω_r şi ω_t sînt egale între ele, ceea ce implică

$$\mathbf{1}_i\mathbf{r}_\pi = \mathbf{1}_r\mathbf{r}_\pi = \frac{v_1}{v_2}\mathbf{1}_t\mathbf{r}_\pi. \tag{6.15}$$

Cu ajutorul acestei expresii, putem stabili teoremele reflexiei-refracţiei luminii în cazul mediilor ideale considerate, teoreme al căror conţinut se identifică cu legile experimentale ale acestui fenomen.

Teorema I. Din (6.13) şi (6.15) rezultă imediat

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \tag{6.16}$$

adică *frecvenţa rămîne invariantă în raport cu fenomenul de reflexie-refracţie, atît timp cît cele două medii pot fi aproximate ca liniare.*

Teorema a II-a. Să identificăm vectorul $\mathbf{r}_\pi$ cu vectorul $\mathbf{1}_z$, de asemenea cuprins în planul de separaţie Π. Deoarece $\mathbf{1}_z$ este perpendicular pe planul de incidenţă, acest vector va fi perpendicular şi pe versorul $\mathbf{1}_i$, de asemenea din planul de incidenţă. De aici urmează

$$\mathbf{1}_i\mathbf{1}_z = \mathbf{1}_r\mathbf{1}_z = \frac{v_1}{v_2}\mathbf{1}_t\mathbf{1}_z = 0. \tag{6.17}$$

Direcţia de propagare a undei incidente, cea a undei reflectate şi cea a undei transmise, precum şi direcţia normalei la planul de reflexie-refracţie sînt direcţii coplanare în planul de incidenţă.

Teoremele III și IV. Dacă vom identifica acum vectorul $\mathbf{r}_\pi$ cu versorul $\mathbf{1}_y$, de asemenea conținut în planul de incidență, relația (6.15) devine

$$\mathbf{1}_i\mathbf{1}_y = \mathbf{1}_r\mathbf{1}_y = \frac{v_1}{v_2}\mathbf{1}_t\mathbf{1}_y. \tag{6.18}$$

Însă, din figura 6.4 se constată că

$$\mathbf{1}_i\mathbf{1}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\mathbf{1}_r\mathbf{1}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \sin\alpha'$$

$$\mathbf{1}_t\mathbf{1}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta.$$

Din aceste relații și din (6.18) rezultă.

Teorema reflexiei : unghiul de incidență α este egal cu unghiul de reflexie α', adică

$$\alpha = \alpha'; \tag{6.19}$$

Teorema refracției : raportul dintre sinusul unghiului de incidență α și sinusul unghiului de refracție β depinde numai de natura și starea celor două medii și este independent de unghiul de incidență

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{6.20}$$

Această lege, valabilă numai în cazul idealizărilor menționate la începutul acestui paragraf, a fost descoperită experimental în secolul al XVII-lea de către Wilibrord Snellius. Scrisă sub forma

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \tag{6.21}$$

relația este denumită *invariantul lui Descartes.*

Coeficienții Fresnel r_s și t_s. O primă relație între amplitudini este dată de condiția (6.14) de continuitate a intensității cîmpului electric

$$A_s + f_s R_s = T_s.$$

O a doua relație între amplitudini se poate obține dacă ținem seama că și componenta tangențială a intensității cîmpului magnetic este continuă. Întrucît așa cum s-a arătat $\alpha = \alpha'$, se poate scrie

$$(H_p^i - f_s H_p^r)\,|_\Pi \cos\alpha = H_p^t\,|_\Pi \cos\beta$$

sau, întrucît între E_s și H_p există relația (6.8),

$$(E_s^i - f_s E_s^r)\,|_\Pi \frac{\cos\alpha}{\zeta_1} = E_s^t\,|_\Pi \frac{\cos\beta}{\zeta_2}.$$

Ținînd seama și de data aceasta de egalitatea fazelor pe planul II, dată de (6.12), cît și de faptul că $\zeta_1/\zeta_2 = n_2/n_1$, obținem cea de-a doua relație

$$A_s - f_s R_s = \frac{n_2}{n_1}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} T_s. \tag{6.22}$$

Din sistemul de ecuații (6.14) și (6.22) rezultă imediat

$$t_s = \frac{T_s}{A_s} = \frac{2\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \dfrac{n_2}{n_1}} \tag{6.23}$$

$$r_s = \frac{1}{f_s}\frac{R_s}{A_s} = \frac{1}{f_s}\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \dfrac{n_2}{n_1}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \dfrac{n_2}{n_1}}. \tag{6.24}$$

r_s și t_s sînt *coeficienții lui Fresnel* de refracție, respectiv de transmisie pentru unda electrică E_s.

6.3. Reflexia-refracția undei E_p, H_s

Reflexia-refracția undei E_p, H_s se studiază în mod analog cu reflexia-refracția undei E_s, H_p (vezi fig. 6.5). Intensitatea cîmpului electric, pentru cele trei unde se va nota

$$E_p^i = A_p \exp\left[i\omega_i\left(\frac{\mathbf{1}_i\mathbf{r}}{v_1} - t\right)\right] = A_p \exp(i\varphi_i)$$

$$E_p^r = R_p \exp\left[i\omega_r\left(\frac{\mathbf{1}_r\mathbf{r}}{v_1} - t\right)\right] = R_p \exp(i\varphi_r) \tag{6.25}$$

$$E_p^t = T_p \exp\left[i\omega_t\left(\frac{\mathbf{1}_t\mathbf{r}}{v_2} - t\right)\right] = T_p \exp(i\varphi_t).$$

În schimb, condiția de continuitate a componentei tangențiale a intensității cîmpului electric E_p, pe planul de separație Π, se va scrie

$$(E_p^i \cos\alpha + f_p E_p^r \cos\alpha')\,|_\Pi = E_p^t|_\Pi \cos\beta \tag{6.26}$$

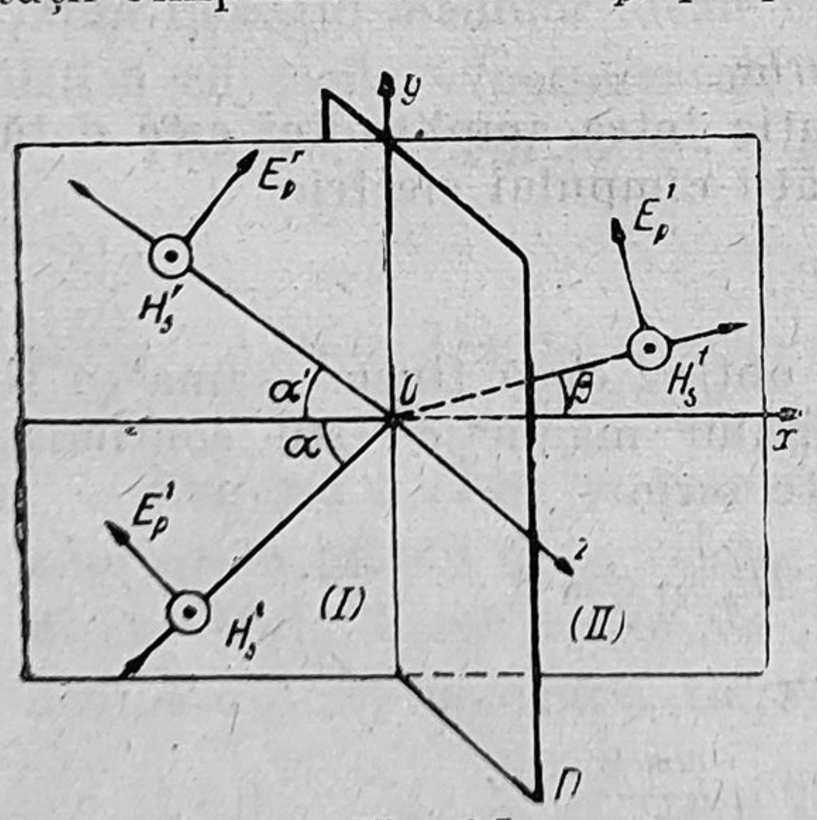


Fig. 6.5

unde $f_p = \pm 1$. Condiția egalității fazelor pe planul Π

$$\varphi_i(\mathbf{r}_\pi, t) = \varphi_r(\mathbf{r}_\pi, t) = \varphi_t(\mathbf{r}_\pi, t) \tag{6.27}$$

este însă identică cu condiția (6.12) pusă în paragraful precedent pentru satisfacerea continuității componentei tangențiale a cîmpului electric al undei E_s, H_p. Urmează de aici că cele patru teoreme ale reflexiei-refracției stabilite pentru unda E_s, H_p pornind de la condiția (6.12), rămîn valabile și pentru unda E_p, H_s. Ținînd seama de (6.25), de condiția egalității fazelor (6.27) și de faptul că și în acest caz $\alpha = \alpha'$, relația (6.26) se va putea scrie

$$A_p + f_p R_p = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} T_p. \tag{6.28}$$

Coeficienții Fresnel r_p *și* t_p. Pentru obținerea coeficienților Fresnel pentru unda E_p, H_s este necesară și condiția de continuitate pe planul Π a componentei tangențiale a cîmpului magnetic. Pentru această undă, condiția se formulează

$$(H_s^i - f_p H_s^r)\,|_\Pi = H_s^t\,|_\Pi. \tag{6.29}$$

Însă, conform relației $H_s = E_p/\zeta$, urmează că

$$(E_p^i - f_p E_p^r)\,|_\Pi = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\,E_p^t\,|_\Pi.$$

Ținînd seama și de data aceasta de egalitatea fazelor pe planul Π cît și de faptul că $\zeta_1/\zeta_2 = n_2/n_1$, obținem cea de-a doua relație între A_p, R_p și T_p

$$A_p - f_p R_p = \frac{n_2}{n_1}\,T_p. \tag{6.30}$$

Din sistemul de ecuații (6.28) și (6.30) rezultă coeficienții lui Fresnel r_p și t_p

$$t_p = \frac{T_p}{A_p} = \frac{2}{\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{n_2}{n_1}} \tag{6.31}$$

$$r_p = \frac{1}{f_p}\,\frac{R_p}{A_p} = \frac{\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \dfrac{n_2}{n_1}}{\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{n_2}{n_1}}. \tag{6.32}$$

O altă formă a coeficienților Fresnel. Coeficienții Fresnel pot fi exprimați în funcție exclusiv de unghiurile α și β. Pentru a-i aduce la o astfel de formă ținem seama că după teorema refracției $n_2/n_1 = \sin\alpha/\sin\beta$. Înlocuind această relație în expresiile coeficienților Fresnel și folosind identitatea trigonometrică

$$\sin\beta\cos\beta \pm \sin\alpha\cos\alpha = \sin(\beta \pm \alpha)\cos(\beta \mp \alpha)$$

rezultă

$$t_p = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}; \qquad t_s = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \tag{6.33}$$

$$r_p = \frac{1}{f_p}\,\frac{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}{\operatorname{tg}(\beta+\alpha)}; \qquad r_s = \frac{1}{f_s}\,\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}. \tag{6.34}$$

6.4. Reflectanța și transmitanța*

Mărimile energetice caracteristice reflexiei-refracției undelor sînt reflectanța și transmitanța.

Reflectanța este prin definiție valoarea absolută a raportului dintre fluxul vectorului Poynting al undei reflectate printr-un element de arie aparținînd

---

* Aceste mărimi se mai numesc și *factor de reflexie*, respectiv *factor de transmisie*.

suprafeței de separație și fluxul prin același element de arie al vectorului Poynting al undei incidente

$$\mathcal{R}_{p,s} = \left| \frac{\mathbf{S}^r_{p,s}\, \mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathbf{S}^i_{p,s}\, \mathrm{d}\mathbf{A}} \right| = \frac{\frac{1}{\zeta_1} \mid E^r_{p,s} \mid^2 \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha}{\frac{1}{\zeta_1} \mid E^i_{p,s} \mid^2 \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha}$$

întrucît, așa cum s-a arătat în § 2.5, $\mid S \mid = \mid E \mid^2/\zeta$. Pe de altă parte

$$\left| \frac{E^r_{p,s}}{E^i_{p,s}} \right| = \frac{E^2_{p,s}}{A^2_{p,s}} = r^2_{p,s}$$

și deci

$$\mathcal{R}_{p,s} = r^2_{p,s}. \tag{6.35}$$

Ținînd seama de relațiile (6.34) din paragraful precedent și observînd că $f_p^2 = f_s^2 = 1$ obținem

$$\mathcal{R}_p = \frac{\mathrm{tg}^2(\beta - \alpha)}{\mathrm{tg}^2(\beta + \alpha)}; \qquad \mathcal{R}_s = \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2(\beta + \alpha)}. \tag{6.36}$$

În figura 6.6 se arată alura curbelor $\mathcal{R}_s(\alpha)$ și $\mathcal{R}_p(\alpha)$. Se observă că există un unghi α_B, denumit unghi de *incidență brewsteriană* pentru care $\mathcal{R}_p(\alpha_B) = 0$. Din prima relație (6.36) rezultă că $\mathcal{R}_p$ se anulează dacă $tg(\alpha_B + \beta_B) = \infty$, astfel că unghiul de incidență brewsteriană este dat de condiția

$$\alpha_B + \beta_B = \frac{\pi}{2}. \tag{6.37}$$

Pentru unghiul de incidență α_B, legea lui Snellius ia forma

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\alpha_B}{\sin\beta_B} = \frac{\sin\alpha_B}{\cos\beta_B}$$

sau

$$\mathrm{tg}\,\alpha_B = \frac{n_2}{n_1}. \tag{6.38}$$

Această relație este cunoscută sub numele de legea lui Brewster.

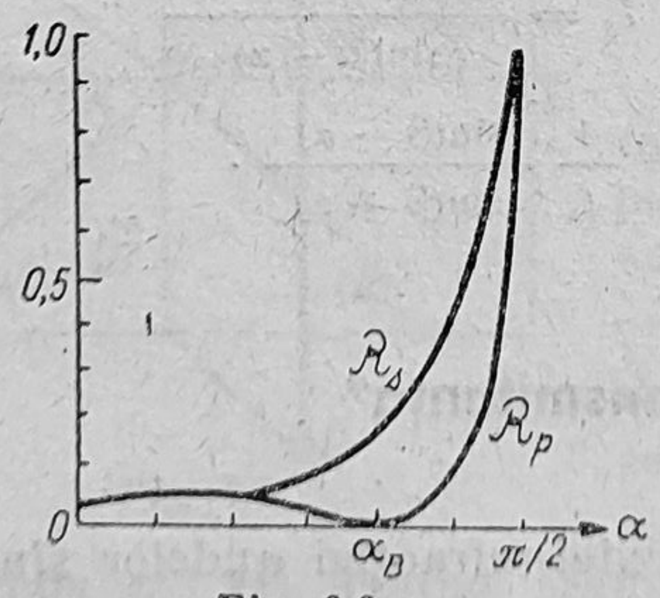


Fig. 6.6

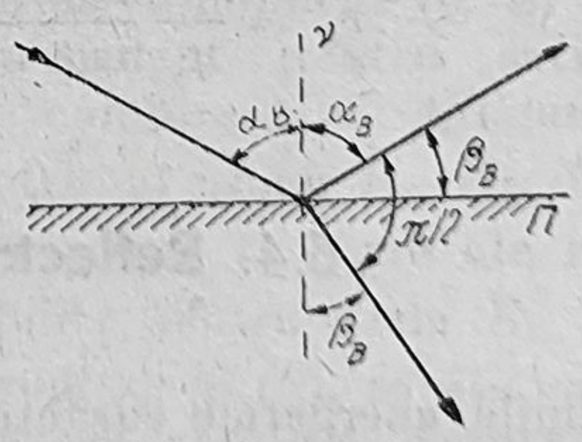


Fig. 6.7

Așa cum se vede din figura 6.7 la incidența brewsteriană direcția de propagare a undei reflectate este perpendiculară pe direcția de propagare a undei transmise. Atragem atenția că existența unghiului de incidență brewsteriană are sens numai în cazul în care cele două medii sînt ideal dielectrice, deci

riguros neabsorbante și separate printr-o suprafață ideală, între acestea neexistînd nici un fel de strat de tranziție.

Transmitanța este prin definiție valoarea absolută a raportului dintre fluxul vectorului Poynting al undei transmise, printr-un element de arie aparținînd suprafeței de separație și fluxul prin același element de arie al vectorului Poynting al undei incidente

$$\mathcal{T}_{p,s} = \left| \frac{\mathbf{S}^t_{p,s}\ \mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathbf{S}^i_{p,s}\ \mathrm{d}\mathbf{A}} \right| = \frac{\frac{1}{\zeta_2} \mid E^t_{p,s} \mid \mathrm{d}A \cos\beta}{\frac{1}{\zeta_1} \mid E^i_{p,s} \mid \mathrm{d}A \sin\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} \frac{T^2_{p,s}}{A^2_{p,s}} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} t^2_{p,s}.$$

Ținînd seama de expresiile (6.33) ale coeficienților t_p și t_s, date în paragraful precedent, obținem

$$\mathcal{T}_p = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2(\beta+\alpha)\cos^2(\beta-\alpha)}; \qquad \mathcal{T}_s = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2(\beta+\alpha)}. \tag{6.39}$$

Se observă că

$$\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_p \cos^2(\beta-\alpha) \tag{6.40}$$

astfel că $\mathcal{T}_s \leqslant \mathcal{T}_p$, egalitatea celor două transmitanțe avînd loc numai în cazul incidenței normale.

Se verifică de asemenea că

$$\mathcal{R}_p + \mathcal{T}_p = 1; \quad \mathcal{R}_s + \mathcal{T}_s = 1 \tag{6.41}$$

cum de altfel era și de așteptat, întrucît ambele medii sînt conservative.

6.5. Reflexia totală a luminii

Să considerăm că unda incidentă se propagă într-un mediu al cărui indice de refracție n_1 este mai mare decît indicele de refracție n_2 al mediului în care se propagă unda reflectată. În acest caz, din legea lui Snellius rezultă

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha \Rightarrow \sin\beta \geqslant \sin\alpha$$

adică direcția de propagare se depărtează de normală în urma refracției. Există o incidență critică

$$\alpha_L = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

denumită unghi limită, pentru care

$$\sin\beta(\alpha_L) = 1 \Rightarrow \beta(\alpha_L) = \frac{\pi}{2}$$

adică direcţia de propagare a undei refractate este paralelă cu planul de separaţie Π dintre cele două medii. Întrucît, aşa cum s-a arătat, dacă $n_1 > n_2$ atunci $\sin\beta > \sin\alpha$, ar urma că pentru incidenţa $\alpha > \alpha_L$, să rezulte $\sin\beta(\alpha > \alpha_L) > 1$. Sinusul nu este însă supraunitar decît pentru argumente complexe. Aşadar, nu există, în acest caz, nici un unghi real după care să aibă loc refracţia luminii în cel de-al doilea mediu şi în consecinţă unda se reflectă integral. Fenomenul, confirmat de experienţă, se numeşte *reflexie totală.*

Deşi, aşa cum vom vedea mai departe, reflectanţa este egală cu unitatea, dacă unghiul de incidenţă este mai mare decît unghiul limită, totuşi ar fi greşit să tragem concluzia că în fenomenul de reflexie totală unda nu pătrunde în mediul al doilea. Într-adevăr, pătrunderea undei în cel de-al doilea mediu trebuie să aibă loc în orice caz, pentru a putea fi satisfăcută continuitatea componentelor tangenţiale ale intensităţii cîmpului electric şi a celui magnetic. Să cercetăm mai atent propagarea undei în mediul al doilea, în condiţiile unghiului complex de refracţie. Indiferent dacă ne referim la unda E_s sau la unda E_p, intensitatea cîmpului electric al undei transmise este

$$E^t_{p,s} = T_{p,s} \exp\left[\mathrm{i}(\mathbf{Kr} - \omega t)\right] = T_{p,s} \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\omega}{v_2}\,\mathbf{1}_t\mathbf{r} - \omega t\right)\right] \qquad (6.42)$$

Dar

$$\frac{\omega}{v_2}\,\mathbf{1}_t\mathbf{r} = \frac{\omega}{v_2}\,(x\cos\beta + y\sin\beta)$$

sau, ţinînd seama că,

$$\cos\beta = \pm\,(1 - \sin^2\beta)^{1/2} = \pm\,\mathrm{i}(\sin^2\beta - 1)^{1/2}$$

şi

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha\,;\quad \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi}{\lambda^2}$$

rezultă

$$\frac{\omega}{v_2}\,\mathbf{1}_t\mathbf{r} = \pm\,\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\lambda_2}\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)^2 - 1\right]^{1/2} x + \frac{\omega}{v_1}\,y\sin\alpha$$

unde λ_2 este lungimea de undă în mediul al doilea. Introducînd notaţiile

$$p = 4\pi\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)^2 - 1\right]^{1/2};\quad \theta(y) = \frac{\omega}{v_1}\,y\sin\alpha$$

găsim

$$\mathbf{Kr} = \pm\,\mathrm{i}\,\frac{p}{2}\,\frac{x}{\lambda_2} + \theta(y). \qquad (6.43)$$

Intensitatea cîmpului electric al undei transmise va fi

$$E^t_{p,s} = T_{p,s} \exp\left(\mp\,\frac{px}{2\lambda_2}\right) \exp\left[-\mathrm{i}(\omega t - \theta(y))\right]. \qquad (6.44)$$

În această expresie trebuie luat semnul minus, întrucît soluţia exponenţial crescătoare cu x nu are semnificaţie fizică. Cu această fixare a semnului, intensitatea undei transmise este

$$I^t_{p,s} = T^2_{p,s} \exp\left(-\,\frac{px}{\lambda_2}\right). \qquad (6.45)$$

Prin urmare, și în cazul unghiului de refracție complex (cînd $\alpha > \alpha_L$) unda pătrunde în mediul al doilea, dar se atenuează rapid, intensitatea ei scăzînd exponențial cu distanța. O astfel de undă este numită și undă evanescentă.

Determinînd reflectanța, se constată că în cazul reflexiei totale $\mathcal{R} = 1$, ceea ce justifică denumirea acestui fenomen. Într-adevăr, calculînd coeficientul de reflexie Fresnel al undei E_s, de exemplu, găsim

$$r_s = \frac{1}{f_s} \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta}.$$

Așa cum s-a arătat mai sus, cos β este pur imaginar, astfel că numărătorul și numitorul sînt complex conjugate

$$r_s = \frac{1}{f_s} \frac{M_s - iN_s}{M_s + iN_s} = \frac{1}{f_s} \frac{(M_s^2 + N_s^2)^{1/2} \exp\left(i \frac{\delta_s}{2}\right)}{(M_s^2 + N_s^2)^{1/2} \exp\left(-i \frac{\delta_s}{2}\right)} = \exp(i\delta_s).$$

De aici rezultă pentru reflectanță

$$\mathcal{R}_s = r_s^* r_s = 1 \tag{6.46}$$

Analog, coeficientul de reflexie al undei E_p are forma

$$r_p = \frac{1}{f_p} \exp(i\delta_p)$$

și deci

$$\mathcal{R}_p = r_p^* r_p = 1. \tag{6.47}$$

Așadar, deși pătrunde și în mediul al doilea, unda se reflectă totuși total. Mai observăm că întrucît, în general, diferența de fază

$$\delta = \delta_p - \delta_s$$

dintre cele două unde E_s și E_p polarizate în planuri perpendiculare are valori diferite de $n\pi$, unda reflectată total este polarizată eliptic.

Unde eterogene. Expresia intensității cîmpului electric al undei transmise în mediul al doilea este

$$E_{p,s}^t = E_{p,s}^{ot}(x) \exp[-i(\omega t - \theta(y)] \tag{6.48}$$

unde mărimea

$$E_{p,s}^{ot}(x) = T_{p,s} \exp\left(-\frac{px}{2\lambda_2}\right)$$

este amplitudinea intensității cîmpului electric. Se vede că în unda transmisă, planele echiamplitudine $x = \text{const}$, diferă de planele echifază $y = \text{const}$. Din acest motiv, direcția de propagare a planelor echiamplitudine diferă de direcția de propagare a planelor echifază, aceste două direcții făcînd între ele unghiul χ. Astfel de unde se numesc eterogene, iar unghiul χ este *unghiul de eterogenitate.* În cazul particular al reflexiei totale $\chi = \pi/2$ (fig. 6.8).

Vectorul indice de refracție. Așa cum rezultă din relația (6.43) produsul scalar **Kr** este o mărime complexă. Deoarece, însă, r este real, urmează că în acest caz vectorul de undă este complex

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}' + i\mathbf{K}''. \tag{6.49}$$

Tot din relația (6.43) rezultă că partea reală este

$$\mathbf{K}' = \frac{\omega}{v_1} \sin \alpha \, \mathbf{1}_y$$

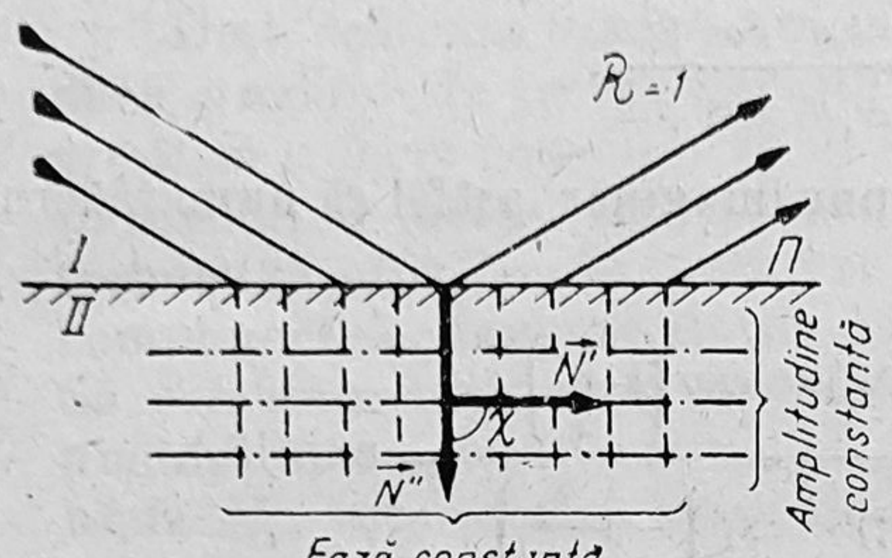


Fig. 6.8

și că această mărime descrie propagarea planelor echifază, iar partea imaginară este

$$\mathbf{K}'' = \frac{p}{2\lambda_2} \mathbf{1}_x$$

această mărime descriind propagarea planelor echiamplitudine. În studiul undelor eterogene este utilă introducerea vectorului complex adimensional

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{c}{\omega} \tilde{\mathbf{K}}$$

denumit *vector indice de refracție.* În cazul general

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}' + i\mathbf{N}'' \tag{6.50}$$

unde $\mathbf{N}' = \frac{c}{\omega}\mathbf{K}'$, iar $\mathbf{N}'' = \frac{c}{\omega}\mathbf{K}''$. În particular, în cazul undelor omogene, **K** este real și are valoarea $\mathbf{K} = \frac{\omega}{v} \mathbf{1}_n$, astfel că $\mathbf{N} = n\mathbf{1}_n$.

6.6. Presiunea luminii

Cîmpul electromagnetic este un sistem fizic caracterizat local prin densitatea volumică de energie w și prin densitatea volumică de impuls **g**, între aceste mărimi și vectorul Poynting existînd în vid relațiile

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \tag{6.51 a}$$

$$\mathbf{S} = cw\mathbf{1}_s. \tag{6.51 b}$$

Impulsul este o mărime conservativă, astfel că la interacțiunea unei unde electromagnetice cu un corp, orice variație a impulsului cîmpului este echivalată de impulsul căpătat de către corp în urma interacțiunii.

Fie o undă, care se propagă în vid, incidentă, sub unghiul α, pe un perete. Să construim un cilindru înclinat, cu baza δA situată pe suprafața peretelui și cu generatoarele de lungime $c\delta t$, orientate normal pe suprafețele echifaze. În timpul δt aceste suprafețe parcurg volumul $\delta\tau_i$ al cilindrului. Impulsul electromagnetic $\delta\mathbf{G}_i$ al cîmpului din acest cilindru este

$$\delta\mathbf{G}_i = \mathbf{g}_i \delta A \cos\alpha\, c\delta t = \frac{1}{c}\mathbf{S}_i \delta A \cos\alpha \delta t.$$

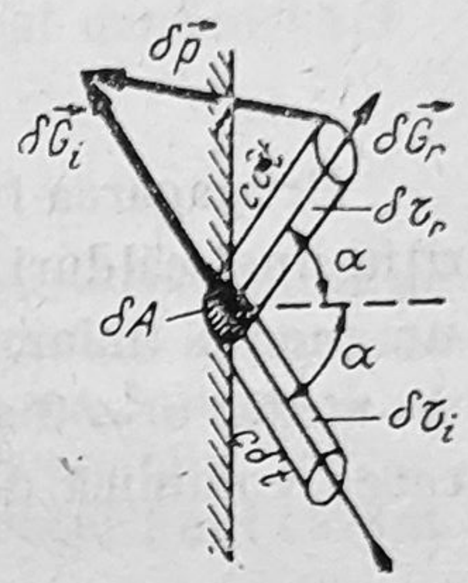


Fig. 6.9

Analog, impulsul cîmpului din volumul $\delta\tau_r$ al cilindrului parcurs în timpul δt de suprafețele echifaze ale undei reflectate va fi

$$\delta\mathbf{G}_r = \mathbf{g}_r \delta A \cos\alpha\, c\delta t = \frac{1}{c}\mathbf{S}_r \delta A \cos\alpha\, \delta t.$$

În conformitate cu teorema conservării impulsului diferența dintre vectorii $\delta\mathbf{G}_i$ și $\delta\mathbf{G}_r$ este preluată de perete, acesta căpătînd impulsul

$$\delta\mathbf{P} = \delta\mathbf{G}_i - \delta\mathbf{G}_r.$$

Acest vector se poate descompune într-o componentă normală la perete și o componentă tangențială

$$\delta P_n = (|\,\delta\mathbf{G}_i\,| + |\,\delta\mathbf{G}_r\,|)\cos\alpha = \frac{1}{c}(|\,\mathbf{S}_i\,| + |\,\mathbf{S}_r\,|)\cos^2\alpha\,\delta A\,\delta t$$

$$\delta P_t = (|\,\delta\mathbf{G}_i\,| - |\,\delta\mathbf{G}_r\,|)\sin\alpha = \frac{1}{c}(|\,\mathbf{S}_i\,| - |\,\mathbf{S}_r\,|)\cos\alpha\sin\alpha\,\delta A\,\delta t.$$

Întrucît $\delta P_n/\delta t$ este forța normală aplicată asupra elementului de arie δA, urmează că presiunea exercitată de cîmpul magnetic asupra peretelui va fi

$$p = \frac{\delta p_n}{\delta A\,\delta t}.$$

Și, întrucît din definiția reflectanței

$$\mathbf{S}_r \,|\, \delta A\cos\alpha = \mathcal{R}\,|\,\mathbf{S}_i\,|\,\delta A\cos\alpha$$

rezultă

$$p = \frac{1}{c}|\,\mathbf{S}_i\,|\,(1+\mathcal{R})\cos^2\alpha. \qquad (6.52)$$

Bineînțeles, întrucît cîmpul electromagnetic este rapid variabil în timp, în relația (6.52) prin $|\,\mathbf{S}_i\,|$ trebuie înțeleasă valoarea medie a vectorului Poynting, iar prin p valoarea medie a presiunii, aceste medii fiind calculate pentru o durată foarte mare în raport cu perioada de oscilație a cîmpului. Conform calculelor efectuate de către Maxwell, presiunea exercitată de lumina solară asupra Pămîntului este de ordinul 10^{-6} kg/m^2.

Determinări experimentale foarte îngrijite asupra presiunii luminii au fost efectuate la începutul acestui secol de către Lebedev, valorile obținute concordînd cu cele teoretice cu o abatere de circa 20%. Experiențe ulterioare, efectuate de către Gerlach au redus abaterea lor la circa 2%.

7. PROPAGAREA LUMINII ÎN MEDII ABSORBANTE

7.1. Ecuația de propagare în medii absorbante. Indici optici

Propagarea luminii în medii absorbante (disipative) este însoțită de apariția unei călduri ireversibile, deci de scăderea energiei undei. Să considerăm un mediu liniar, izotrop, omogen nemărginit, dar disipativ. Într-un astfel de mediu $\sigma \neq 0$ și în consecință și $\mathbf{J} \neq 0$. În schimb, în astfel de medii densitatea volumică de sarcină $\rho = 0$. Între vectorii $\mathbf{E}$ și $\mathbf{D}$ există relația

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\varepsilon}\tilde{\mathbf{E}}. \tag{7.1}$$

Permitivitatea $\tilde{\varepsilon}$ este constantă, dar complexă, deoarece, așa cum se constată experimental, există un defazaj γ_ε între $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$ așa încît

$$\tilde{\varepsilon} = |\varepsilon| \exp(i\gamma_\varepsilon) = \varepsilon' + i\varepsilon'', \tag{7.2}$$

De asemenea și vectorii $\mathbf{E}$ și $\mathbf{J}$ sînt defazați unul față de celălalt, conductivitatea fiind o constantă complexă

$$\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\sigma}\mathbf{E} \tag{7.3}$$

$$\tilde{\sigma} = |\sigma| \exp(i\gamma_\sigma) = \sigma' + \sigma''. \tag{7.4}$$

În schimb, în domeniul luminii vizibile, vectorii $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ sînt în fază, între aceștia avînd loc relația

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \tag{7.5}$$

permeabilitatea mediului confundîndu-se, practic, cu constanta universală μ_0 (permeabilitatea vidului).

Sistemul ecuațiilor lui Maxwell se va scrie :

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\varepsilon}\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} + \tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{E}} \tag{7.6}$$

$$\nabla\tilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{7.7}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\mu_0\frac{\partial\tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} \tag{7.8}$$

$$\nabla\tilde{\mathbf{H}} = 0. \tag{7.9}$$

Aplicînd operatorul rotor asupra ecuației (7.8) găsim, ținînd seama de (7.6)

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -\mu_0\tilde{\varepsilon}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0\tilde{\sigma}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

și, întrucît $\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) = -\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \nabla(\nabla \tilde{\mathbf{E}})$, dacă luăm în considerație și relația (7.7) urmează că

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} - \mu_0 \tilde{\sigma} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} - \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{7.10}$$

Aceasta este ecuația de propagare a undelor în mediul disipativ considerat.

În timp ce ecuația de propagare a undelor în mediul ideal neabsorbant

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} - \mu_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$$

este invariantă în raport cu inversarea sensului timpului ($t \to -t$) ecuația de propagare în medii disipative nu este invariantă în raport cu inversarea sensului timpului. Din punctul de vedere termodinamic, aceasta înseamnă că procesele de propagare a undelor în medii disipative sînt ireversibile. Ireversibilitatea este datorată scăderii energiei, ca urmare a existenței unui curent nenul și deci a apariției unei călduri Joule ireversibile.

Vom încerca soluții de forma

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathrm{r}) \exp(-\mathrm{i}\omega t). \tag{7.11}$$

Observăm că pentru astfel de soluții

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega \tag{7.12 a}$$

$$\nabla \to \mathrm{i}\tilde{\mathbf{K}}. \tag{7.12 b}$$

Introducînd (7.11) în (7.10) și ținînd seama de (7.12 a) găsim

$$\{\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \mu_0(\mathrm{i}\omega\tilde{\sigma} + \omega^2\tilde{\varepsilon})\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\} \exp(-\mathrm{i}\omega t) = 0.$$

Ecuația este identic satisfăcută numai dacă

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \mu_0(\mathrm{i}\omega\tilde{\sigma} + \omega^2\tilde{\varepsilon})\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0. \tag{7.13}$$

Ținînd acum seama de (7.12 b) găsim

$$\tilde{\mathbf{K}}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2 = \mu_0 \omega^2 \left(\tilde{\varepsilon} + \mathrm{i} \frac{\tilde{\sigma}}{\omega} \right) \tag{7.14}$$

ceea ce ne permite să aducem ecuația (7.13) la forma Helmholtz

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{K}}^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0. \tag{7.15}$$

Introducem vectorul indice de refracție complex $\tilde{\mathbf{N}}$ legat de $\tilde{\mathbf{K}}$ prin relația

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{\omega}{c} \tilde{\mathbf{N}}. \tag{7.16}$$

Din (7.14) și (7.16) obținem

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\mathbf{N}}^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \tilde{\mathbf{K}}^2. \tag{7.17}$$

Punînd acum

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}' + i\mathbf{K}'' \tag{7.18}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}' + i\mathbf{N}'' \tag{7.19}$$

soluția (7.11) se va scrie :

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c}\tilde{\mathbf{N}}''\mathbf{r}\right) \exp\left[i\omega\left(\frac{\mathbf{N}'\mathbf{r}}{c} - t\right)\right]. \tag{7.20}$$

Se vede că amplitudinea undei scade exponențial cu distanța. Vectorul $\mathbf{N}'$ este normal pe suprafețele echifaze, iar $\mathbf{N}''$ este normal pe suprafețele echiamplitudine. Unghiul χ dintre acești doi vectori (fig. 7.1) este unghiul de eterogenitate. Cum în general $\chi \neq 0$, rezultă că în mediile absorbante undele electromagnetice sînt unde eterogene.

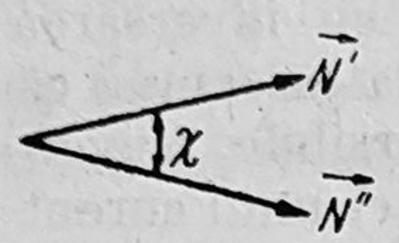


Fig. 7.1

Mai observăm că din (7.7), (7.9) și (7.12) rezultă condițiile

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{E}} = 0\,; \qquad \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{H}} = 0.$$

Aceste relații nu implică însă în mod obligatoriu

$$\mathbf{K}'\mathbf{E}' = 0\,; \qquad \mathbf{K}'\mathbf{H}' = 0\,;$$

adică transversalitatea undei electromagnetice. Se arată că orice undă electromagnetică omogenă se poate descompune într-o undă electrică transversală *TE* și o undă magnetică transversală *TM*. În unda electrică *TE*, vectorii $\mathbf{E}'$ și $\mathbf{E}''$ sînt paraleli între ei, dar perpendiculari pe planul determinat de $\mathbf{K}'$ și $\mathbf{K}''$, pe cînd $\mathbf{H}'$ și $\mathbf{H}''$ formează un unghi între ei, fiind însă conținuți în planul determinat de $\mathbf{K}'$ și $\mathbf{K}''$. În unda magnetică *TM* situația este inversă.

Indicii optici ai lui Drude. Din punctul de vedere optic, mediul în care se propagă unda electromagnetică se caracterizează prin mărimea complexă

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{N}}$$

Acestei mărimi complexe îi corespund două mărimi de material n_d și k_d, denumite *indicii Drude* și definiți prin relația

$$\tilde{n} = n_d + ik_d \tag{7.21}$$

Ținînd seama de (7.14)

$$n_d^2 - k_d^2 + 2in_dk_d = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0} + i\frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0\omega} = F + iG$$

sau, identificînd separat partea reală și cea imaginară,

$$n_d^2 - k_d^2 = F$$

$$2n_dk_d = G. \tag{7.22}$$

Relațiile (7.22) se numesc relațiile lui Ketteler. Rezolvînd sistemul format de aceste relații găsim

$$n_d = \frac{1}{2^{1/2}}\left[F + (F^2 + G^2)^{1/2}\right]^{1/2} \tag{7.23}$$

$$k_d = \frac{1}{2^{1/2}}\left[-F + (F^2 + G^2)^{1/2}\right]^{1/2}. \tag{7.24}$$

Indicii optici ai lui Drude n_d și k_d sînt independenți de direcția de propagare, fiind constante de material care depind numai de natura și de starea mediului.

Indicii optici ai lui Vašiček. Acești indici sînt legați direct de propagarea undei și sînt definiți prin relațiile

$$n_v = |\mathbf{N}'|; \quad k_v = |\mathbf{N}''|. \tag{7.25}$$

De aici urmează

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\mathbf{N}}^2 = |\mathbf{N}'|^2 - |\mathbf{N}''|^2 + 2\mathrm{i}\,|\mathbf{N}'| \cdot |\mathbf{N}''| \cos\chi$$

sau

$$\tilde{n}^2 = n_v^2 - k_v^2 + 2\mathrm{i}n_v k_v \cos\chi. \tag{7.26}$$

Pe de altă parte însă

$$\tilde{n}^2 = F + \mathrm{i}G.$$

Identificînd și de data aceasta părțile reale și cele imaginare ale expresiilor lui $\tilde{n}^2$, obținem

$$n_v = |\mathbf{N}'| = \frac{1}{2^{1/2}}\left[F + \left(F^2 + \frac{G^2}{\cos^2\chi}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \tag{7.27}$$

$$k_v = |\mathbf{N}''| = \frac{1}{2^{1/2}}\left[-F + \left(F^2 + \frac{G^2}{\cos^2\chi}\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \tag{7.28}$$

7.2. Studiul reflexiei-refracției la suprafața de separare a două medii absorbante

Considerăm două medii liniare, izotrope, omogene, absorbante și o undă incidentă de expresie

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \tilde{\mathbf{E}}_{0i}\exp\left[\mathrm{i}\omega_i\left(\frac{\tilde{\mathbf{N}}_i\mathbf{r}}{c} - t\right)\right].$$

Unda reflectată va fi de forma

$$\tilde{\mathbf{E}}_r = \tilde{\mathbf{E}}_{0r}\exp\left[\mathrm{i}\omega_r\left(\frac{\tilde{\mathbf{N}}_r\mathbf{r}}{c} - t\right)\right]$$

iar cea transmisă, de forma

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \tilde{\mathbf{E}}_{0t}\exp\left[\mathrm{i}\omega_t\left(\frac{\tilde{\mathbf{N}}_t\mathbf{r}}{c} - t\right)\right].$$

La suprafața de separare dintre cele două medii, componenta tangențială a cîmpului electric este continuă

$$(\tilde{\mathbf{E}}_i + \tilde{\mathbf{E}}_r)\mathbf{1}_\tau|_\Pi = \tilde{\mathbf{E}}_t\mathbf{1}_\tau|_\Pi \tag{7.29}$$

unde $\mathbf{1}_\tau$ este versorul tangentei la planul de separație Π.

Pentru ca relația de mai sus să fie îndeplinită pentru orice $\mathbf{r}$ și l, este necesar ca pe planul Π fazele undelor $\tilde{\mathbf{E}}_i$, $\tilde{\mathbf{E}}_r$, $\tilde{\mathbf{E}}_t$ să fie aceleași. Punînd $\mathbf{r}_\pi = \mathbf{1}_\tau$ rezultă

$$\tilde{\mathbf{N}}_i \mathbf{1}_\tau = \tilde{\mathbf{N}}_r \mathbf{1}_\tau = \tilde{\mathbf{N}}_t \mathbf{1}_\tau. \tag{7.30}$$

Ținînd seama că $\tilde{\mathbf{N}}$ are atît parte reală cît și parte imaginară, ambele satisfăcînd condiția de mai sus, rezultă :

I) *Teorema reflexiei*

a) pentru propagarea fazei

$$\mathbf{N}_i' \mathbf{1}_\tau = \mathbf{N}_r' \mathbf{1}_\tau, \tag{7.31}$$

b) pentru propagarea amplitudinii

$$\mathbf{N}_i'' \mathbf{1}_\tau = \mathbf{N}_r'' \mathbf{1}_\tau ; \tag{7.32}$$

II) *Teorema refracției*

a) pentru propagarea fazei

$$\mathbf{N}_i' \mathbf{1}_\tau = \mathbf{N}_t' \mathbf{1}_\tau, \tag{7.33}$$

b) pentru propagarea amplitudinii

$$\mathbf{N}_i' \mathbf{1}_\tau = N_t'' \mathbf{1}_\tau. \tag{7.34}$$

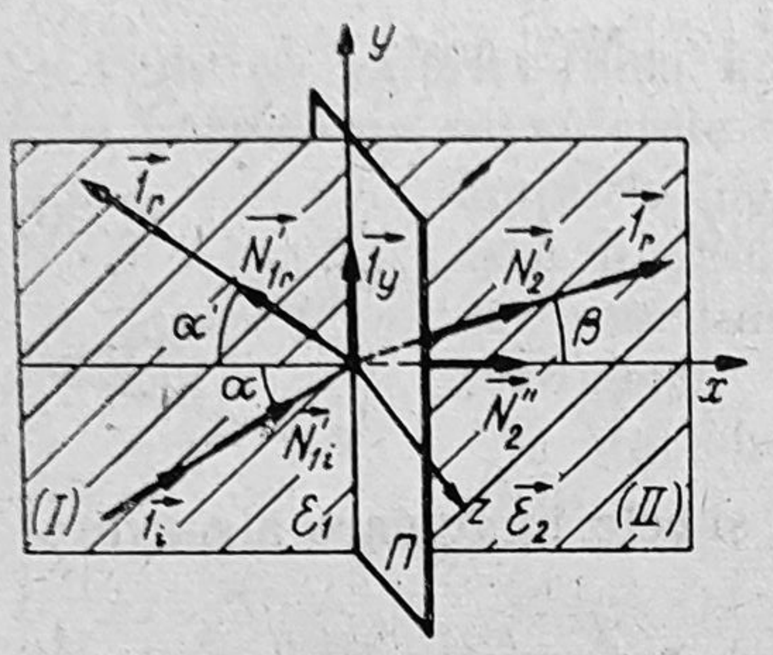


Fig. 7.2

Vom aplica aceste relații în următorul caz particular simplu (fig. 7.2). Planul Π separă două medii semiinfinite izotrope, liniare, omogene și fără memorie. Mediul (I) este conservativ, avînd permitivitatea reală, astfel că

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}_1'|^2 &= n_{v1}^2 = n_{d1}^2 = n_1^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_0 \\ |\mathbf{N}_1''| &= k_{v1} = 0 \end{aligned} \tag{7.35}$$

Mediul al doilea, în schimb, este absorbant avînd permeabilitatea complexă

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}_0 n_2^2. \tag{7.36}$$

Notînd cu $\mathbf{1}_i$, respectiv $\mathbf{1}_r$, versorii direcției de propagare a undei incidente, respectiv a undei reflectate, legea (7.31) se va scrie

$$n_1 \mathbf{1}_i \mathbf{1}_\tau = n_1 \mathbf{1}_r \mathbf{1}_\tau$$

Punînd $\mathbf{1}_\tau = \mathbf{1}_y$ și observînd că

$$\mathbf{1}_i \mathbf{1}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \tag{7.37 a}$$

$$\mathbf{1}_r \mathbf{1}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \sin\alpha' \tag{7.37 b}$$

și că ambele unghiuri se găsesc în primul cadran, rezultă

$$\alpha = \alpha' \tag{7.38}$$

adică egalitatea dintre unghiul de incidență și unghiul de reflexie. Unda reflectată este omogenă întrucît $|\mathbf{N}_1''| = 0$. În ceea ce privește legile refracției, particularizînd (7.33) rezultă

$$n_1 \mathbf{1}_i \mathbf{1}_y = n_{v2}(\beta) \mathbf{1}_i \mathbf{1}_y \tag{7.39}$$

și întrucît

$$\mathbf{1}_t \mathbf{1}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta \tag{7.40}$$

din (7.37 a), (7.39) și (7.40) rezultă

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_{v2}(\beta)}{n_1}. \tag{7.41}$$

Așadar, în acest caz legea lui Snellius nu mai este respectată deoarece raportul $\sin\alpha/\sin\beta$ depinde de β și deci de unghiul de incidență α. În ceea ce privește caracterul eterogen al undei, din (7.34) rezultă

$$\mathbf{N}_2'' \mathbf{1}_y = 0 \Rightarrow \mathbf{N}_2'' \perp \mathbf{1}_y \tag{7.42}$$

deci $\mathbf{N}_2''$ și, în consecință, și $\mathbf{K}_2''$ sînt normali pe planul Π, de unde urmează că

$$\chi = \beta$$

adică unghiul de eterogenitate se confundă cu cel de refracție.

Formalismul unghiului de refracție complex. Formal, este posibil să se scrie o lege analogă legii lui Snellius și în cazul mediilor absorbante, introducînd argumentul complex $\tilde{\beta}$ definit prin relația

$$n_{v2}(\beta) \sin\beta = \tilde{n}_2 \sin\tilde{\beta}.$$

Atunci, relația (7.41) se va scrie

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\tilde{n}_2}{n_1} = \frac{n_{d2} + ik_{d2}}{n_1}. \tag{7.43}$$

Întrucît indicii Drude n_{d2} și k_{d2} sînt constante de material independente de unghiul β, relația (7.43) este într-adevăr analogă legii lui Snellius. Așadar, refracția unei unde într-un mediu absorbant poate fi *modelată* prin refracția în acest mediu sub un unghi de refracție complex. Atragem atenția că acest unghi complex nu este decît un artificiu de calcul, fără a avea însă vreo semnificație fizică. În cadrul formalismului unghiului de refracție complex, formulele lui Fresnel capătă o formă analogă celor stabilite în §§ 6.2 și 6.3, coeficienții Fresnel fiind însă și ei mărimi complexe

$$\tilde{r}_p = \frac{1}{f_p} \frac{n_1 \cos\tilde{\beta} - \tilde{n}_2 \cos\alpha}{n_1 \cos\tilde{\beta} + \tilde{n}_2 \cos\alpha}; \quad \tilde{r}_s = \frac{1}{f_s} \frac{n_1 \cos\alpha - \tilde{n}_2 \cos\tilde{\beta}}{n_1 \cos\alpha + \tilde{n}_2 \cos\tilde{\beta}} \tag{7.44}$$

$$\tilde{t}_p = \frac{2n_1 \cos\alpha}{n_1 \cos\tilde{\beta} + \tilde{n}_2 \cos\alpha}; \quad \tilde{t}_s = \frac{2n_1 \cos\alpha}{n_1 \cos\alpha + \tilde{n}_2 \cos\tilde{\beta}} \tag{7.45}$$

Unghiul principal de incidență. O analiză mai detaliată a reflexiei pe un mediu absorbant a unei unde luminoase, plan-polarizate, incidentă dintr-un mediu ideal, arată că lumina reflectată este eliptic polarizată în toate cazurile, cu excepția incidenței normale și a celei razante. În același timp, se arată că există un unghi de incidență α_p, numit un unghi de incidență principal (sau unghi de incidență pseudobrewsteriană) pentru care axele elipsei undei

reflectate se confundă cu tangenta, respectiv cu normala la planul de incidență, expresia acestui unghi fiind dată de

$$\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{1}{n_0} (n_v^2 + k_v^2)^{1/2}. \tag{7.46}$$

Incidența brewsteriană apare acum ca un caz particular, caracteristic materialelor neabsorbante, pentru care $k_v = 0$ și $n_v = n$

$$\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{n}{n_0} = \operatorname{tg} \alpha_\beta. \tag{7.47}$$

7.3. Reflexia-refracția luminii pe medii stratificate

În discuțiile anterioare, privitoare la reflexia-refracția luminii, s-a presupus că între materialul considerat și exterior există o suprafață de separație ideală. O astfel de presupunere nu este însă decît o ipoteză simplificatoare, în realitate întotdeauna între mediul exterior și material existînd un film superficial cu o structură mai mult sau mai puțin complicată. Originea acestui film este multiplă. Mai întîi, ca urmare a prelucrării suprafeței materialului — călire imperfectă sau alte tratamente termice, polisare, atac chimic etc. — chiar la suprafața materialului apare un strat de tranziție. În afară de aceasta, sub acțiune oxigenului atmosferic și al vaporilor de apă, multe materiale se acoperă cu un film de oxid cu o grosime care poate varia de la sutimi de nanometru la zeci sau chiar sute de nanometri. În general, aceste filme superficiale pot fi aproximate ca o suprapunere de straturi paralele, omogene. În principiu, coeficienții de reflexie și de transmisie ai unui astfel de film pot fi calculați exact, folosind o metodă matriceală*.

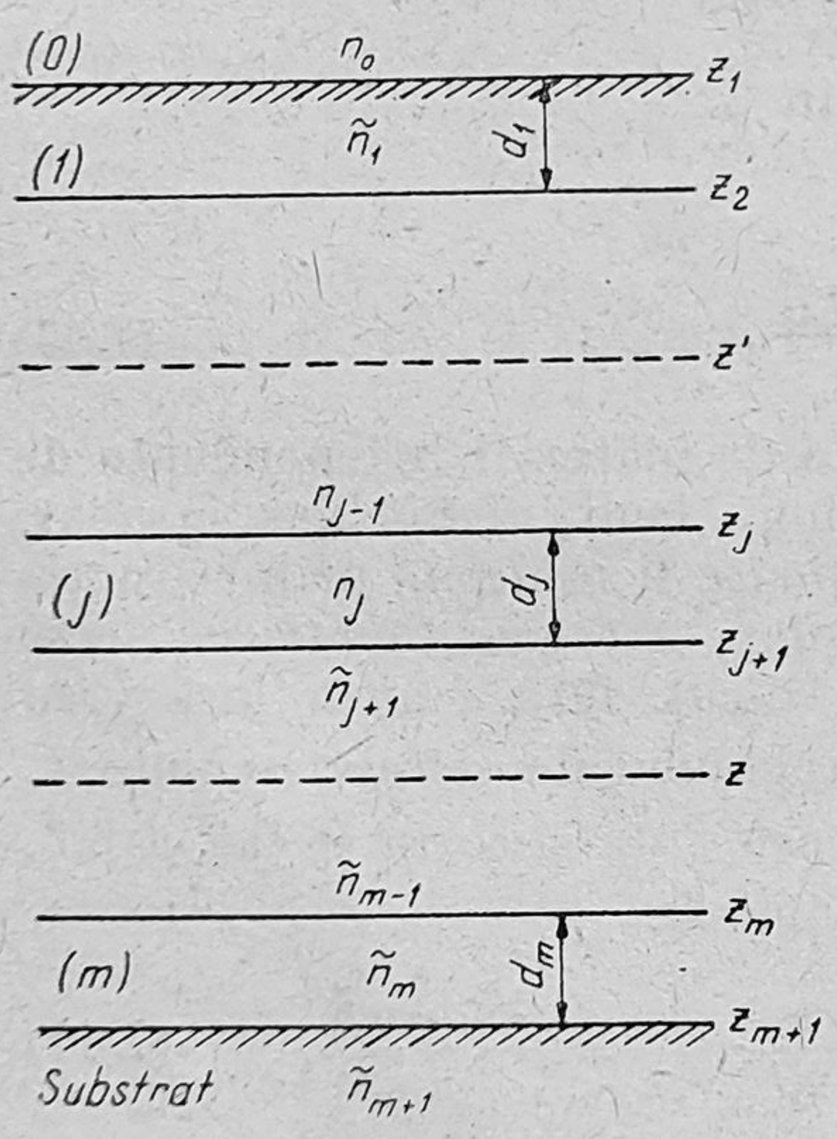


Fig. 7.3

Să considerăm (vezi fig. 7.3) un film format din m straturi paralele (*1*), (*2*), ..., (*j*), ..., (*m*), fiecare strat fiind presupus izotrop, liniar, omogen și fără memorie, de grosime d_j și caracterizat de indicele de refracție complex $\tilde{n}_j$. Mediul exterior (0) este neabsorbant, n_0 fiind real, în schimb substratul pe care este depus filmul este presupus absorbant, avînd indicele de refracție complex $\tilde{n}_{m+1}$. Vom nota cu z_j cota

* Vezi ; C. S. Hayfield, G. W. T. White in „The Symposium on the Ellipsometry andits Use in the Measurements of Surfaces and Thin Films", Washington, 1963. Nat. Bur. Stds. Misc. Publ. **256**, p. 157 ; F. Partovi, in J. Opt. Soc. Am., **52** 918 (1962).

UNIV. „AL. I. CUZA" DE FIZICĂ

suprafeței de separație dintre stratul $(j-1)$ și stratul (j). În particular, z_1 specifică planul de separație dintre mediul exterior și film, iar z_{m+1} cel dintre film și substrat.

Vom presupune că unda luminoasă incidentă din mediul (O) este o undă plană, monocromatică, omogenă și plan-polarizată. Ca de obicei, vom descompune unda electrică într-o componentă E_p, care oscilează în planul de incidență și o componentă E_s, care oscilează într-un plan normal pe cel de incidență. Întrucît, formal, ambele unde se comportă analog vom nota unda electrică cu E_ν, indicele ν putînd semnifica p, respectiv s, după cum este vorba de una sau de cealaltă componentă. Mai observăm că întrucît planele echiamplitudine din filmul stratificat sînt paralele cu planele de separație dintre straturi, este justificat să se utilizeaze formalismul unghiului de refracție complex. Vom face convenția de a denumi „sens +" sensul dinspre mediul înconjurător spre substrat și „sens —" sensul dinspre substrat spre mediul înconjurător. În acord cu aceste notații, $\tilde{E}^+(z)$ va semnifica intensitatea rezultantă într-un plan de cotă z a cîmpului electric al tuturor undelor de diverse ordine de reflexie, sau refracție, care se propagă în sensul $(+)$ iar $\tilde{E}^-(z)$, cea corespunzătoare propagării în sensul $(-)$. În fiecare plan $z = \text{const}$ se poate defini matricea unicoloană

$$\check{E}_\nu(z) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_\nu^+(z) \\ \tilde{E}_\nu^-(z) \end{pmatrix}. \tag{7.48}$$

Fie două plane arbitrare de cotă z', respectiv z'', caracterizate prin matricele $\check{\mathbf{E}}_\nu(z')$, respectiv $\check{\mathbf{E}}_\nu(z'')$. dependența dintre acestea fiind dată de relația

$$\check{\mathbf{E}}_\nu(z') = \check{\mathbf{Q}}_\nu(z', z'')\check{\mathbf{E}}_\nu(z'') \tag{7.49}$$

unde $\check{\mathbf{Q}}_\nu(z', z'')$ este o matrice 2×2 caracteristică sistemului optic cuprins între cele două planuri. Acest sistem consistă dintr-un lanț de subsisteme formate din straturile filmului care alternează cu interfețele dintre două straturi. Notînd cu

$$\check{\mathbf{I}}_{\nu j} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{\nu j} & \tilde{B}_{\nu j} \\ \tilde{C}_{\nu j} & \tilde{D}_{\nu j} \end{pmatrix} \tag{7.50}$$

matricea interfeței $z = z_j$ dintre stratul $(j-1)$ și stratul (j) găsim

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_\nu^+(z_j - 0) \\ \tilde{E}_\nu^-(z_j - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{\nu j} & \tilde{B}_{\nu j} \\ \tilde{C}_{\nu j} & \tilde{D}_{\nu j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_\nu^+(z_j + 0) \\ \tilde{E}_\nu^-(z_j + 0) \end{pmatrix}. \tag{7.51}$$

Pe de altă parte, fiecare strat (j), cuprins între fețele $z = z_j$ și $z = z_{j+1}$, va fi caracterizat printr-o matrice

$$\check{\mathbf{S}}_j = \begin{pmatrix} \tilde{K}_j & \tilde{L}_j \\ \tilde{M}_j & \tilde{N}_j \end{pmatrix} \tag{7.52}$$

astfel că matricele $\check{\mathbf{E}}_\nu(z_j + 0)$ și $\check{\mathbf{E}}_\nu(z_{j+1} - 0)$ sînt legate între ele prin relația

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_\nu^+(z_j + 0) \\ \tilde{E}_\nu^-(z_j + 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_j & \tilde{L}_j \\ \tilde{M}_j & \tilde{N}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_\nu^+(z_{j+1} - 0) \\ \tilde{E}_\nu^-(z_{j+1} - 0) \end{pmatrix}. \tag{7.53}$$

Matricea caracteristică întregului film va fi dată de produsul dintre matricile interfață și strat în ordinea strictă a succesiunii lor în sistem

$$\check{\mathbf{Q}}_\nu(z_1,\ z_{m+1}) = \check{\mathbf{I}}_{\nu 1}\ \check{\mathbf{S}}_1\check{\mathbf{I}}_{\nu 2}\check{\mathbf{S}}_2 \ldots \check{\mathbf{I}}_{\nu m}\check{\mathbf{S}}_m\check{\mathbf{I}}_{\nu'(m+1)}. \tag{7.54}$$

Cu ajutorul acestei matrice găsim

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_\nu^+(z_1 - 0) \\ \tilde{E}_\nu^-(z_1 - 0) \end{pmatrix} = \check{\mathbf{Q}}_\nu(z_1,\ z_{m+1}) \begin{pmatrix} \tilde{E}_\nu^+(z_{m+1} + 0) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.55}$$

ținînd seama că în substratul presupus semiinfinit nu există unda inversă ($\tilde{E}_\nu^-(z_{m+1} + 0) = 0$). Relația matriceală (7.55) este echivalentă cu două ecuații algebrice din care se deduc ușor coeficienții de reflexie și de transmisie pentru întregul film cuprins între mediul înconjurător și substrat

$$\tilde{R}_\nu = \frac{1}{f_\nu} \frac{\tilde{E}_\nu^-(z_1 - 0)}{\tilde{E}_\nu^+(z_1 - 0)}; \quad \tilde{T}_\nu = \frac{\tilde{E}_\nu^+(z_{m+1} + 0)}{\tilde{E}_\nu^+(z_1 - 0)} \tag{7.56}$$

unde $\nu = p,\ s$.

Determinarea elementelor matricei interfață $\mathbf{I}_j$. Elementele acestor matrice nu depind decît de caracteristicile celor două medii în vecinătatea interfeței. Este comod ca, în vederea determinării acestor elemente, să considerăm cele două medii semiinfinite, ceea ce ne permite utilizarea formulelor lui Fresnel (7.44) și (7.45). Vom presupune în prima etapă a calculului că unda incidentă și cea transmisă se propagă în sensul (+), iar cea reflectată în sensul (—). Urmează că

$$\tilde{E}_\nu^+(z_j + 0) = \tilde{t}_{\nu j}\tilde{E}_\nu^+(z_j - 0) \text{ (transmisie)} \tag{7.57 a}$$

$$\tilde{E}_\nu^-(z_j - 0) = \tilde{r}_{\nu j} \cdot \tilde{E}_\nu^+(z_j - 0) \text{ reflexie).} \tag{7.57 b}$$

Pe de altă parte, ținînd seama că $\tilde{E}_\nu^-(z_j + 0) = 0$, întrucît în stratul ($j$), considerat semiinfinit undele nu se propagă în sensul (—), relația (7.50) conduce la

$$\tilde{E}_\nu^+(z_j - 0) = \tilde{A}_{\nu j}\tilde{E}_\nu^+(z_j + 0) \tag{7.58 a}$$

$$\tilde{E}_\nu^-(z_j - 0) = \tilde{C}_{\nu j} \cdot \tilde{E}_\nu^+(z_j + 0). \tag{7.58 b}$$

Comparînd (7.57) cu (7.58) obținem :

$$\tilde{A}_{\nu j} = \frac{1}{\tilde{t}_{\nu j}}; \quad \tilde{C}_{\nu j} = \frac{\tilde{r}_{\nu j}}{\tilde{t}_{\nu j}} \tag{7.59}$$

Pentru determinarea elementelor $\tilde{B}_{\nu j}$ și $\tilde{D}_{\nu j}$ vom considera de data aceasta o undă incidentă pe interfața din mediul (j) în sensul (—). Urmează atunci să scriem în locul relațiilor (7.57) relațiile

$$\tilde{E}_\nu^-(z_j - 0) = \tilde{t}'_{\nu j}\tilde{E}_\nu^-(z_j + 0) \text{ (transmisie)} \tag{7.60 a}$$

$$\tilde{E}_\nu^+(z_j - 0) = \tilde{r}'_{\nu j}\tilde{E}_\nu^-(z_j + 0) \text{ (reflexie)} \tag{7.60 b}$$

coeficienţii Fresnel $\tilde{r}'_{\nu j}$ şi $\tilde{l}'_{\nu j}$, corespunzători propagării undei în sensul (—) fiind legaţi de coeficienţii $\tilde{r}_{\nu j}$ şi $\tilde{E}_{\nu j}$ prin relaţiile

$$\tilde{r}'_{\nu j} = -\tilde{r}_{\nu j} \tag{7.61 a}$$

$$\tilde{l}_{\nu j}\tilde{l}'_{\nu j} - \tilde{r}_{\nu j}\tilde{r}'_{\nu j} = 1. \tag{7.61 b}$$

Pe de altă parte, observînd că în acest caz $\tilde{E}^{+}_{\nu}(z_j - 0) = 0$, din (6.51) rezultă

$$0 = \tilde{A}_{\nu j}\tilde{E}^{+}_{\nu}(z_j + 0) + \tilde{B}_{\nu j}\tilde{E}^{-}_{\nu}(z_j + 0) \tag{7.62 a}$$

$$\tilde{E}^{-}_{\nu}(z_j - 0) = \tilde{C}_{\nu j}\tilde{E}^{+}_{\nu}(z_j + 0) + \tilde{D}_{\nu j}\tilde{E}^{-}_{\nu}(z_j + 0). \tag{7.62 b}$$

Din (7.60) şi (7.62), ţinînd seama de (7.59) şi (7.61), se obţine

$$\tilde{B}_{\nu j} = \frac{\tilde{r}_{\nu j}}{\tilde{t}_{\nu j}}; \quad \tilde{D}_{\nu j} = \frac{1}{\tilde{t}_{\nu j}}. \tag{7.63}$$

Din relaţia de mai sus şi din (7.59) rezultă în definitiv expresia matricei caracteristice interfeţii (j)

$$\check{\mathbf{I}}_{\nu j} = \frac{1}{\tilde{t}_{\nu j}}\begin{pmatrix} 1 & \tilde{r}_{\nu j} \\ \tilde{r}_{\nu j} & 1 \end{pmatrix} \tag{7.64}$$

Determinarea elementelor matricei strat $\mathbf{S}_j$. Referindu-ne la unde armonice plane, putem scrie pentru unda care se propagă în stratul (j) în sensul (+)

$$\tilde{E}^{+}_{\nu}(z_{j+1} - 0) = \tilde{E}^{+}_{\nu}(z_j + 0)\exp\,(\mathrm{i}\tilde{\delta}_j). \tag{7.65 a}$$

Analog pentru unda propagată în sensul (—)

$$\tilde{E}^{-}_{\nu}(z_{j+1} - 0) = \tilde{E}^{-}_{\nu}(z_j + 0)\exp\,(-\mathrm{i}\tilde{\delta}_j) \tag{7.65 b}$$

unde

$$\tilde{\delta}_j = \tilde{\mathbf{K}}_j\mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{N}'_j\mathbf{r} + \mathrm{i}\mathbf{N}''_j\mathbf{r}). \tag{7.66}$$

Introducînd indicii Vašiček $n_{vj} = |\,\mathbf{N}'_j\,|$, $k_{vj} = |\,\mathbf{N}''_j\,|$ şi notînd grosimea stratului cu (j) iar unghiul adevărat (real !) de refracţie în acest strat cu φ_j.

$$\tilde{\delta}_j = \frac{2\pi}{\lambda}\,d_j(n_{vj}\cos\varphi_j + \mathrm{i}\,k_{vj}). \tag{7.67}$$

Comparînd relaţiile (7.65) cu relaţia (7.52) rezultă

$$\check{\mathbf{S}}_j = \begin{pmatrix} \exp\,(\mathrm{i}\tilde{\delta}_j) & 0 \\ 0 & \exp\,(-\mathrm{i}\,\tilde{\delta}_j) \end{pmatrix} \tag{7.68}$$

Film simplu strat. În cazul cel mai simplu, filmul constă dintr-un singur strat omogen. Relaţia (7.55) capătă, cu notaţiile din fig. 7.4, forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{\nu 0}^{+} \\ \tilde{E}_{\nu 0}^{-} \end{pmatrix} = \check{\mathbf{Q}}_{\nu}(z_1,\ z_2) \begin{pmatrix} \tilde{E}_{\nu 2}^{+} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.69}$$

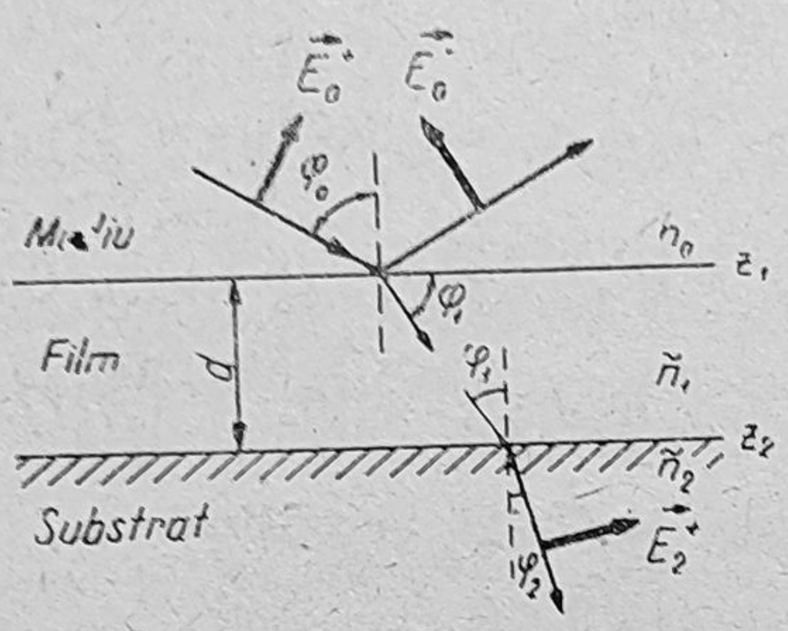


Fig. 7.4

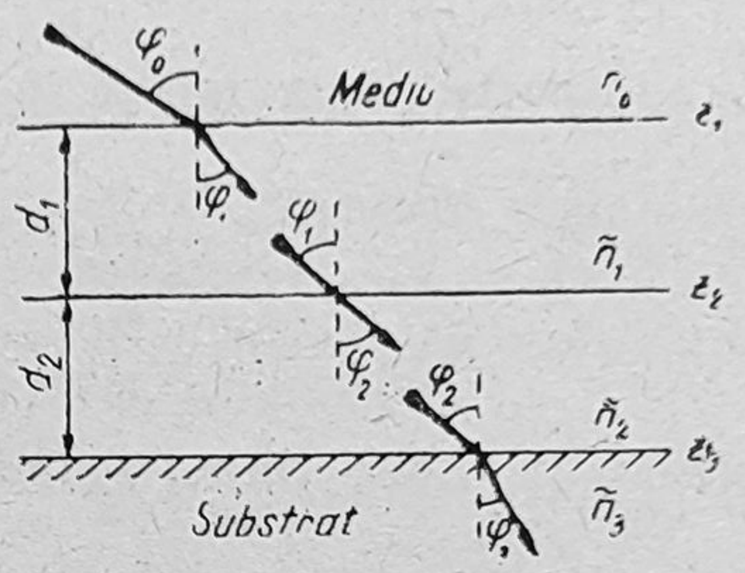


Fig. 7.5

unde

$$\check{\mathbf{Q}}_{\nu}(z_1,\ z_2) = \check{\mathbf{I}}_{\nu 1},\ \check{\mathbf{S}}_1,\ \check{\mathbf{I}}_{\nu 2} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{t}_{\nu 1}} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{r}_{\nu 1} \\ \tilde{r}_{\nu 1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\tilde{\delta}) & 0 \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\tilde{\delta}) \end{pmatrix} \frac{1}{\tilde{t}_{\nu 2}} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{r}_{\nu 2} \\ \tilde{r}_{\nu 2} & 1 \end{pmatrix} \tag{7.70}$$

în care s-a pus

$$\tilde{\delta} = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_{\nu 1} \cos \varphi_1 + \mathrm{i}\, k_{\nu 1}).$$

Calculînd relaţia (7.69) obţinem

$$\tilde{E}_{\nu 0}^{+} = \frac{\exp(\mathrm{i}\tilde{\delta})}{\tilde{t}_{\nu 1}\tilde{t}_{\nu 2}} (1 + \tilde{r}_{\nu 1}\tilde{r}_{\nu 2} \exp(-\mathrm{i}2\tilde{\delta}))\, \tilde{E}_{\nu 2}^{+}$$

$$\tilde{E}_{\nu 0}^{-} = \frac{\exp(\mathrm{i}\tilde{\delta})}{\tilde{t}_{\nu 1}\tilde{t}_{\nu 2}} (\tilde{r}_{\nu 1} + \tilde{r}_{\nu 2} \exp(-\mathrm{i}2\tilde{\delta}))\, \tilde{E}_{\nu 2}^{+}.$$

Introducînd în (7.56) rezultă pentru coeficienţii de transmisie şi de reflexie

$$\tilde{T}_{\nu} = \frac{\tilde{t}_{\nu 1}\tilde{t}_{\nu 2} \exp(-\mathrm{i}\tilde{\delta})}{1 + \tilde{r}_{\nu 1}\tilde{r}_{\nu 2} \exp(-\mathrm{i}2\tilde{\delta})} \tag{7.71}$$

$$\tilde{R}_{\nu} = \frac{\tilde{r}_{\nu 1} + \tilde{r}_{\nu 2} \exp(-\mathrm{i}2\tilde{\delta})}{1 + \tilde{r}_{\nu 1}\tilde{r}_{\nu 2} \exp(-\mathrm{i}2\tilde{\delta})} \tag{7.72}$$

Film dublu strat. În mod analog, coeficienţii corespunzători unui film format din două straturi omogene (fig. 7.5) se vor putea calcula pornind de la relaţia

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{\nu 0}^{+} \\ \tilde{E}_{\nu 0}^{-} \end{pmatrix} = \check{\mathbf{I}}_{\nu 1}\check{\mathbf{S}}_1\check{\mathbf{I}}_{\nu 2}\check{\mathbf{S}}_2\check{\mathbf{I}}_{\nu 3} \begin{pmatrix} \tilde{E}_{\nu 3}^{+} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.73}$$

Astfel, pentru coeficientul de reflexie pe un astfel de film se obține expresia

$$R_\nu = \frac{\tilde{r}_{\nu 1} + \tilde{r}_{\nu 2} \exp(-i2\tilde{\delta}_1) + \tilde{r}_{\nu 3} \exp[-i2(\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2)] + \tilde{r}_{\nu 1}\tilde{r}_{\nu 2}\tilde{r}_{\nu 3} \exp(-i2\tilde{\delta}_2)}{1 + \tilde{r}_{\nu 1}\tilde{r}_{\nu 2} \exp(-i2\tilde{\delta}_1) + \tilde{r}_{\nu 2}\tilde{r}_{\nu 3} \exp(-i2\tilde{\delta}_2) + \tilde{r}_{\nu 2}\tilde{r}_{\nu 1} \exp[-i2(\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2)]} \quad (7.74)$$

7.4. Absorbția-dispersia luminii

Așa cum rezultă din soluția (7.20) a ecuației de propagare a luminii în medii absorbante, în astfel de medii intensitatea cîmpului electric scade exponențial cu distanța pe care se propagă unda. Limitîndu-ne la cazul simplificat în care unda transmisă în mediul absorbant este omogenă, intensitatea acesteia va fi dată de expresia

$$I = I_0 \exp(-\alpha x) \quad (7.75)$$

unde α este coeficientul de absorbție. Această relație este cunoscută sub numele de legea Lambert-Bouguer. În particular, dacă mediul absorbant este sub formă de soluție, avînd concentrația c, din (7.75) se obține legea lui Beer

$$I = I_0 \exp(-Acx). \quad (7.76)$$

Coeficientul de absorbție α depinde puternic de frecvență, așa cum se exemplifică în fig. 7.6, pentru absorbția luminii în vapori de sodiu. Este interesant că în toate mediile există o foarte strînsă legătură între dependența de frecvență a coeficientului de absorbție și *dispersia* luminii, adică dependența de frecvență a indicelui de refracție. Această legătură a fost observată mai întîi de către Kundt. În particular, în vid, mediu ideal neabsorbant, nu are loc dispersia luminii așa cum arată observațiile astronomice efectuate asupra eclipselor sau asupra pulsarilor. Să urmărim acum, în paralel, variația cu frecvența a indicelui de refracție n și a coeficientului de absorbție α, în vecinătatea unui maxim al acestuia din urmă (fig. 7.7).

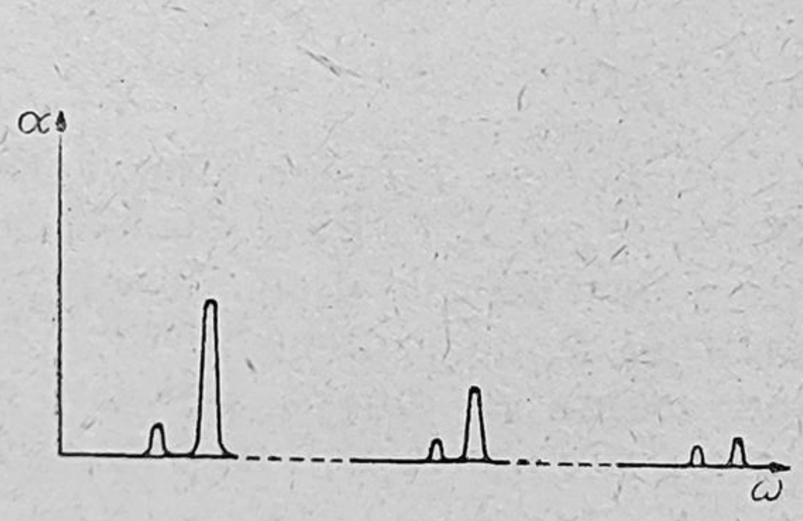


Fig. 7.6

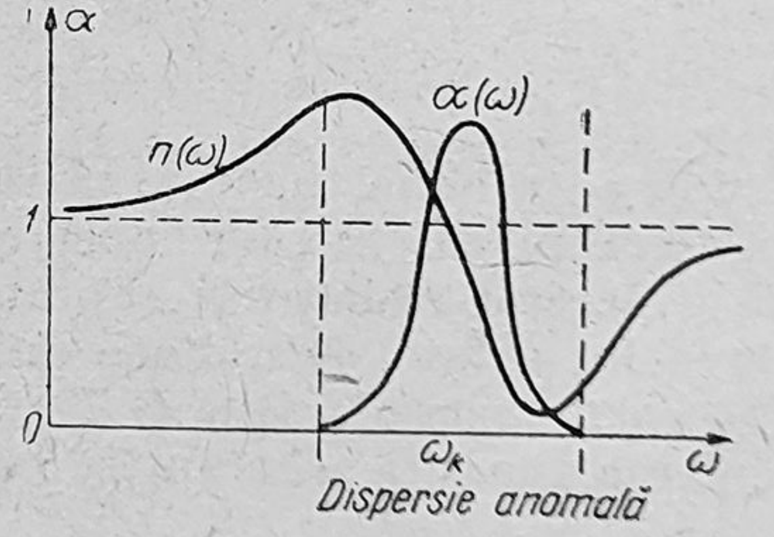


Fig. 7.7

Se observă că pentru frecvențele îndepărtate de valoarea ω_k, pentru care α prezintă un maxim, n crește monoton cu ω. În aceste domenii, se poate folosi, cu bună aproximație, formula lui Cauchy care dă dependența indicelui de refracție de lungimea de undă

$$n = A + B\lambda^{-2} - C\lambda^{-4}. \quad (7.77)$$

Adăugarea unui al patrulea termen de forma $D\lambda^{-6}$ conduce la rezultate și mai bine verificate de experiență. După cum se vede însă din fig. 7.7, în intervalul de frecvențe din jurul valorii ω_k, are loc *scăderea* lui n cu frecvența, fenomen observat pentru prima oară de către Le Roux, care l-a denumit *dispersie anomală.*

În aceste domenii, în care absorbția este semnificativă, trebuie să se țină seama de caracterul complex al indicelui de refracție și al permitivității (vezi § 7.1). O relație de dependență de frecvență a permitivității relative complexe $\tilde{\varepsilon}_r$, bine verificată de experiență este următoarea

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + a\mathcal{N} \sum_k \frac{f(\omega_k)}{\omega_k^2 - \omega^2 - i2\delta_k\omega}. \tag{7.78}$$

În această formulă, $\mathcal{N}$ este numărul de atomi/volum, ω_k frecvențele maximelor de absorbție, δ_k un coeficient caracteristic maximului de ordinul k, a o constantă, iar $f(\omega_k)$ un factor denumit *tărie a modului de oscilație* de frecvență ω_k și care exprimă ponderea acelui mod în ansamblul frecvențelor. Pentru întregul domeniu de frecvențe, $\sum_k f(\omega_k) = 1$. Dacă ω este foarte diferit de ω_k, adică în intervalele de frecvență în care absorbția este neglijabilă, relația (7.78) ia forma

$$\varepsilon_r = 1 + a\mathcal{N} \sum_k \frac{f(\omega_k)}{\omega_k^2 - \omega^2} \tag{7.79}$$

cunoscută sub numele de formula lui Sellmeier. Observăm că pentru frecvențe foarte mari (radiații X), ω depășește oricare din frecvențele ω_k așa încît ε_r devin subunitar, ceea ce conduce la indici de refracție de asemenea subunitari și în consecință la viteze de fază superioare vitezei plafon c. Acest fapt nu contrazice teoria relativității restrînse, deoarece viteza de propagare a semnalelor este viteza de grup și aceasta este inferioară vitezei plafon. Într-adevăr, conform formulei lui Rayleigh (2.73)

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

iar $dv/d\lambda > 0$, astfel încît v_g să rămînă permanent inferior vitezei plafon c. Mai observăm că, întrucît pentru radiația X, $n < 1$, este posibilă reflexia totală a acestor radiații la suprafața de separație aer-sticlă. Menționăm că abaterea lui n față de unitate este foarte mică, de ordinul 10^{-6}.

Refracția masică. Din (7.79), ținînd seama că $n(\omega) = \varepsilon_r^{1/2}(\omega)$, rezultă că pentru o anumită substanță de densitate ρ și o anumită frecvență, mărimea

$$r = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{1}{\rho} \tag{7.80}$$

denumită refracție masică, este o caracteristică de material*.

Fenomenele de absorbție-dispersie sînt intim legate de structura microscopică a substanței. Interpretarea cuantică a acestor fenomene va fi dată în § 10.5.

---

* Pentru aplicații ale refracției masice în chimie vezi : I. Pogany, M. Banciu, *Metode fizice în chimia organică*, Ed. Științifică, București, 1972.

8. PROPAGAREA LUMINII ÎN MEDII ANIZOTROPE

8.1. Particularitățile propagării luminii în medii anizotrope. Elipsoidul lui Fresnel

Spre deosebire de mediile izotrope, în cazul mediilor anizotrope, legile de material sînt mai complicate, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ și $\hat{\sigma}$ fiind în acest caz operatori tensoriali. Forma lor generală este

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \hat{\varepsilon}\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \hat{\mu}\mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \hat{\sigma}\mathbf{E}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

În cele ce urmează ne vom referi numai la medii anizotrope liniare, omogene, conservative și nemagnetice. În cazul undelor luminoase în astfel de medii permeabilitatea rămîne un scalar și cu bună aproximație $\mu \approx \mu_0$. În cadrul acestor ipoteze, legile de material devin

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \hat{\varepsilon}\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Alegînd în spațiul fizic o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z\}$ și reprezentînd în această bază prima relație (8.2) obținem

$$\begin{pmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{XX}\varepsilon_{XY}\varepsilon_{XZ} \\ \varepsilon_{YX}\varepsilon_{YY}\varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{ZX}\varepsilon_{ZY}\varepsilon_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Așa cum rezultă din considerente energetice*, matricea permitivității este simetrică ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$). Aceasta înseamnă că există o bază ortonormată $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z\}$, în raport cu care matricea reprezentantă a tensorului $\hat{\varepsilon}$ este diagonală

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

ε_1, ε_2, ε_3 sînt *permitivitățile principale*, iar versorii $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ specifică *axele principale* ale mediului. Scrisă pe componente, (8.4) devine

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_1 E_x \\ D_y &= \varepsilon_2 E_y \\ D_z &= \varepsilon_3 E_z. \end{aligned} \tag{8.5}$$

---

* Vezi de exemplu : L. D. Landau, E. M. Lifșiț, *Electrodinamica mediilor continue* (trad. din l. rusă), p. 409, Ed. Tehnică, București, 1968.

Se observă că, în general, vectorii **D** și **E** nu sînt paraleli, ci formează între ei unghiul θ (fig. 8.1), ambii fiind însă perpendiculari pe direcția vectorului **H**, așa cum se va arăta în § 8.2.

Vitezele principale. Indicii principali de refracție. Prin definițiile mărimile

$$v_1 = (\varepsilon_1\mu_0)^{-1/2},\ v_2 = (\varepsilon_2\mu_0)^{-1/2},\ v_3 = (\varepsilon_3\mu_0)^{-1/2} \tag{86.}$$

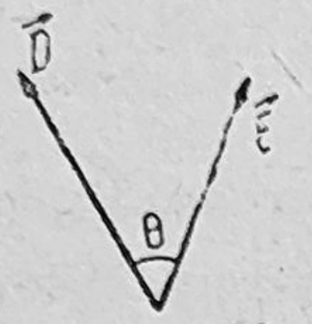


Fig. 8.1

sînt *vitezele principale* într-un mediu anizotrop. Mediul fiind presupus neabsorbant, indicele de refracție este o mărime reală. În raport cu cele trei direcții principale, se pot defini *indicii de refracție principali*

$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^{1/2},\ n_2 = \frac{c}{v_2} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\right)^{1/2},\ n_3 = \frac{c}{v_3} = \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}. \tag{8.7}$$

Elipsoidul indicilor. Ținînd seama de (8.5) densitatea de energie electrică se poate scrie

$$w_e = \frac{1}{2}\mathbf{ED} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 E_x^2 + \varepsilon_2 E_y^2 + \varepsilon_3 E_z^2). \tag{8.8}$$

Să considerăm un spațiu euclidian fictiv de coordonate

$$X_1 = \left(\frac{\varepsilon_0}{2w_e}\right)^{1/2} E_x,\ X_2 = \left(\frac{\varepsilon_0}{2w_e}\right)^{1/2} E_y,\ X_3 = \left(\frac{\varepsilon_0}{2w_e}\right)^{1/2} E_z \tag{8.9}$$

Expresia (8.8) se poate scrie sub o nouă formă în raport cu aceste coordonate și cu expresiile (8.7) ale indicilor de refracție principali

$$\frac{X_1^2}{n_1^2} + \frac{X_2^2}{n_2^2} + \frac{X_3^2}{n_3^2} = 1 \tag{8.10}$$

Aceasta este ecuația unui elipsoid în spațiul fictiv considerat, denumit elipsoidul indicilor.

Elipsoidul lui Fresnel. Fresnel a introdus, pentru caracterizarea mediilor anizotrope un alt spațiu fictiv, de coordonate

$$X_1' = \frac{E_x}{(2w_e)^{1/2}},\quad X_2' = \frac{E_y}{(2w_e)^{1/2}},\quad X_3' = \frac{E_z}{(2w_e)^{1/2}}. \tag{8.11}$$

Cu aceste noi coordonate, se obține din (8.8) ecuația elipsoidului lui Fresnel

$$\frac{X_1'^2}{a^2} + \frac{X_2'^2}{b^2} + \frac{X_3'^2}{c^2} = 1. \tag{8.12}$$

unde $a^2 = \varepsilon_1^{-1},\ b^2 = \varepsilon_2^{-1},\ c^2 = \varepsilon_3^{-1}$.

8.2. Ecuațiile cîmpului electromagnetic în mediile anizotrope

În cazul unui mediu anizotrop, dar liniar, omogen, neabsorbant și fără memorie, ecuațiile lui Maxwell se vor scrie sub forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \\ \nabla \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \\ \nabla \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{8.13}$$

ținîndu-se seama de (8.2), (8.5) și de ipoteza absenței repartiției volumice de sarcină. Să căutăm soluții sub forma

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}_0 \exp\left[-i(\mathbf{Kr} - \omega t)\right]$$

unde **K** este real, întrucît am făcut ipoteza că mediul nu este absorbant. Pentru soluții de acest tip ale cîmpurilor **D**, **E** și **H** ecuațiile (8.13) devin, conform (2.53),

$$\begin{aligned} K\mathbf{1}_n \times \mathbf{H} &= -\omega \mathbf{D} \\ K\mathbf{1}_n \mathbf{D} &= 0 \\ K\mathbf{1}_n \times \mathbf{E} &= \omega \mu_0 \mathbf{H} \\ K\mathbf{1}_n \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{8.14}$$

De aici rezultă mai întîi că atît **D** cît și $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ sînt perpendiculari pe $\mathbf{1}_n$ formînd un triedru drept în ordinea **H**, $\mathbf{1}_n$, **D**. Vectorii **E**, **D** și $\mathbf{1}_n$ sînt coplanari, dar între **E** și **D** există un unghi θ. În schimb, așa cum se vede și din figura 8.2, versorul $\mathbf{1}_s$, al vectorului Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = S\mathbf{1}_s$$

este coplanar cu **E** și $\mathbf{1}_n$, dar distinct de acesta din urmă, fiind perpendicular pe planul determinat de vectorii **E** și **H**. Din figură, mai rezultă că unghiul dintre $\mathbf{1}_n$ și $\mathbf{1}_s$ este de asemenea θ, astfel că

$$\mathbf{1}_n \mathbf{1}_s = \cos\theta.$$

Așadar, în mediile anizotrope, direcția transferului de energie nu mai coincide cu direcția normală la suprafețele echifaze. Vom arăta acum că viteza de deplasare a suprafețelor echifaze este diferită de cea a suprafețelor echienergetice. Fie $OO' = u\delta t$, deplasarea suprafețelor echienergetice în intervalul $\delta t = t' - t$. Mărimea u, denumită viteză *radială*, este viteza de transfer al energiei. În același interval de timp δt, suprafețele echifază s-au deplasat însă pe distanța $OO'' = v\delta t$, unde v este viteza de fază. Din figura 8.2 se vede însă că

$$\frac{OO''}{OO'} = \frac{v}{u} = \cos\theta = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_s. \tag{8.15}$$

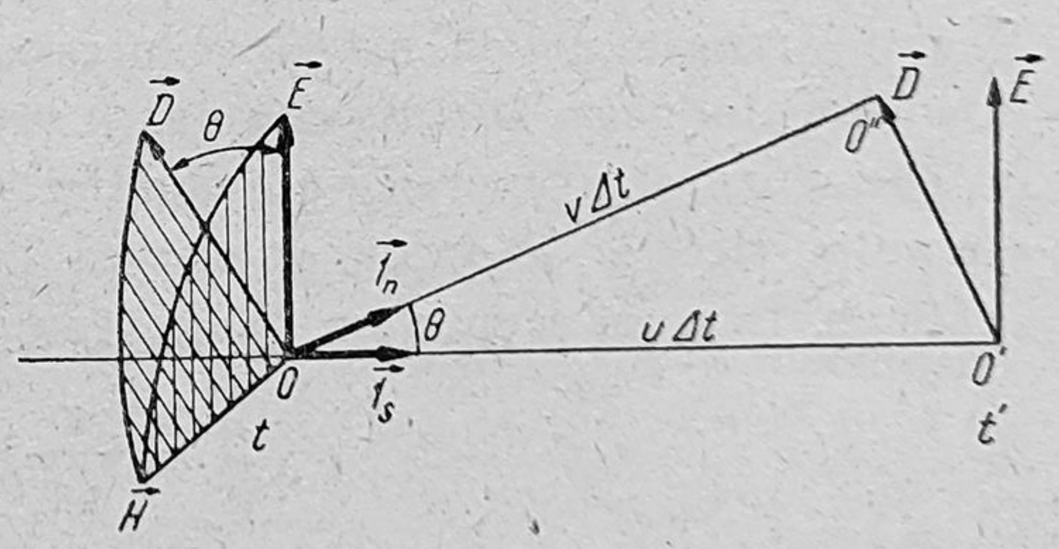


Fig. 8.2

Legătura dintre **E** *și* **D** *în mediile anizotrope.* Este posibil să se stabilească o relație vectorială între **E** și **D**, în medii anizotrope, evitîndu-se prezența tensorului permitivitate. Ținînd seama că $\omega = Kv$, din prima și a treia relație (8.14) rezultă ușor

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{v} \mathbf{1}_n \times \mathbf{H}. \tag{8.16}$$

Înmulțind vectorial la stînga ambii membri cu versorul $\mathbf{1}_s$, găsim

$$\mathbf{1}_s \times \mathbf{D} = -\frac{1}{v}\mathbf{1}_s \times \mathbf{1}_n \times \mathbf{H}$$

și folosind identitatea

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{ca}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}) \tag{8.17}$$

obținem

$$\mathbf{1}_s \times \mathbf{D} = \frac{1}{v}[\mathbf{H}(\mathbf{1}_s\mathbf{1}_n) - \mathbf{1}_n(\mathbf{H}\mathbf{1}_s)] = \frac{1}{u}\mathbf{H}$$

întrucît $\mathbf{H}$ este normal pe $\mathbf{1}_s$, iar conform (8.15) $\mathbf{1}_s\mathbf{1}_n = v/u$. Din cea de a treia relație (8.14) urmează că

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 v}\mathbf{1}_n \times \mathbf{E}$$

de unde

$$\mathbf{1}_s \times \mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0 vu}\mathbf{1}_n \times \mathbf{E}.$$

Înmulțind încă o dată vectorial la stînga ambii membri cu $\mathbf{1}_s$, și aplicînd din nou identitatea (8.17) de asemenea în ambii membri găsim

$$[\mathbf{1}_s(\mathbf{D}\mathbf{1}_s) - \mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0 vu}[\mathbf{1}_n(\mathbf{1}_s\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cos\theta]$$

și, în final, ținînd seama de (8.15) și de faptul că $\mathbf{1}_s$, este perpendicular pe $\mathbf{E}$ rezultă

$$\frac{1}{\mu_0 u^2}\mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{1}_s(\mathbf{D}\mathbf{1}_s). \tag{8.18}$$

Această relație ne dă așadar expresia intensității cîmpului electric $\mathbf{E}$, în funcție de inducția $\mathbf{D}$ și de orientarea vectorului Poynting. Putem să obținem de asemenea și o expresie a inducției electrice $\mathbf{D}$ în funcție de intensitatea cîmpului electric $\mathbf{E}$ și de orientarea direcției de propagare a suprafețelor echifaze. În acest scop, vom înlocui în relația (8.16) pe $\mathbf{H}$ prin expresia

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 v}\mathbf{1}_n \times \mathbf{E}$$

ușor de obținut din prima și a treia ecuație (8.14). Găsim

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu_0 v^2}\mathbf{1}_n \times (\mathbf{1}_n \times \mathbf{E}).$$

Ținînd seama și de data aceasta de identitatea (8.17) obținem în final

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0 v^2}[\mathbf{E} - \mathbf{1}_n(\mathbf{1}_n\mathbf{E})]. \tag{8.19}$$

8.3. Ecuația razelor. Suprafața radială. Cristale uniaxe și biaxe

În mediile izotrope, direcția de propagare coincizînd cu direcția de transfer a energiei, se obișnuiește să se spună că „razele" de lumină au orientarea normală la suprafețele echifaze. În cazul mediilor anizotrope „razele" sînt însă orientate numai după direcția de transfer a energiei. Dependența vitezei u de orientarea direcției de transfer a energiei în raport cu axele principale este exprimată de către o ecuație datorată lui Fresnel, denumită *ecuația razelor*. Pentru stabilirea acestei ecuații vom scrie (8.18) pe componente

$$\frac{1}{\mu_0 u^2} E_x = \varepsilon_1 E_x - \alpha_s (\mathbf{D}\mathbf{1}_s)$$

$$\frac{1}{\mu_0 u^2} E_y = \varepsilon_2 E_y - \beta_s (\mathbf{D}\mathbf{1}_s) \tag{8.20}$$

$$\frac{1}{\mu_0 u^2} E_z = \varepsilon_3 E_z - \gamma_s (\mathbf{D}\mathbf{1}_s).$$

Aici α_s, β_s, γ_s sînt cosinușii directori ai versorului

$$\mathbf{1}_s = \alpha_s \mathbf{1}_x + \beta_s \mathbf{1}_y + \gamma_s \mathbf{1}_z. \tag{8.21}$$

avînd expresiile

$$\alpha_s = \mathbf{1}_s \mathbf{1}_x, \ \beta_s = \mathbf{1}_s \mathbf{1}_y, \ \gamma_s = \mathbf{1}_s \mathbf{1}_z. \tag{8.22}$$

Introducînd vitezele principale $v_k = (\varepsilon_k \mu_0)^{-1/2}$ unde $k = 1, 2, 3$, cele trei componente ale intensității cîmpului electric se scriu

$$E_x = -\frac{\mu_0 \alpha_s (\mathbf{D}\mathbf{1}_s)}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_1^2}}, \quad E_y = -\frac{\mu_0 \beta_s (\mathbf{D}\mathbf{1}_s)}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_2^2}}, \quad E_z = -\frac{\mu_0 \gamma_s (\mathbf{D}\mathbf{1}_s)}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_3^2}}.$$

Din perpendicularitatea vectorilor $\mathbf{E}$ și $\mathbf{1}_s$, urmează că

$$\mathbf{1}_s \mathbf{E} = \alpha_s E_x + \beta_s E_y + \gamma_s E_z = 0.$$

Înlocuind în această expresie componentele E_x, E_y, E_z cu expresiile stabilite mai sus și simplificînd în ambii membri cu $-\mu_0(\mathbf{D}\mathbf{1}_s)$ rezultă ecuația razelor dată de Fresnel

$$\frac{\alpha_s^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_1^2}} + \frac{\beta_s^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_2^2}} + \frac{\gamma_s^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_3^2}} = 0 \tag{8.23}$$

Aceasta este o ecuație bipătrată. Dacă $v_1 \neq v_2 \neq v_3$, se poate arăta că ecuația (8.23) are în cazul general două soluții $u'^2(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ și $u''^2(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ distincte, reale și pozitive. Putem arăta intuitiv acest lucru figurînd grafic funcția

$$f(u^2) = \frac{\alpha_s^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_1^2}} + \frac{\beta_s^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_2^2}} + \frac{\gamma_s^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_3^2}}.$$

În ipoteza $v_1 > v_2 > v_3$, așa cum rezultă din figura 8.3, există două astfel de soluții.

Așadar, într-un mediu anizotrop se propagă două unde distincte: o undă $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ care se propagă cu viteza u' și căreia îi este asociată unda $\mathbf{D}'$, $\mathbf{H}'$ care se propagă cu viteza v' și a doua undă $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$ care se propagă cu viteza u'' și căreia îi este asociată unda $\mathbf{D}''$, $\mathbf{H}''$ care se propagă cu viteza v''.

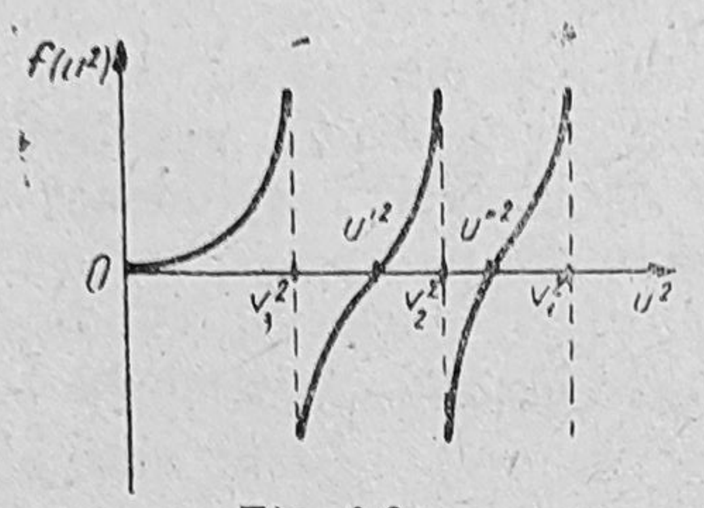


Fig. 8.3

Cele două unde $\mathbf{E}'$ și $\mathbf{E}''$ verifică ecuațiile

$$\frac{1}{\mu_0 u'^2}\mathbf{E}' = \mathbf{D}' - \mathbf{1}_s(\mathbf{D}'\mathbf{1}_s)$$

$$\frac{1}{\mu_0 u''^2}\mathbf{E}'' = \mathbf{D}'' - \mathbf{1}_s(\mathbf{D}''\mathbf{1}_s).$$

Înmulțind prima ecuația cu $\mathbf{E}''$ și a doua cu $\mathbf{E}'$ și scăzînd una din cealaltă se obține

$$\left(\frac{1}{u'^2} - \frac{1}{u''^2}\right)\mathbf{E}'\mathbf{E}'' = \mathbf{D}'\mathbf{E}'' - \mathbf{D}''\mathbf{E}' = 0$$

întrucît $\mathbf{D}'\mathbf{E}'' = \mathbf{D}''\mathbf{E}' = \varepsilon_1 E'_x E''_x + \varepsilon_2 E'_y E''_y + \varepsilon_3 E'_z E''_z$. Dacă cele două soluții u' și u'' ale ecuației (8.23) sînt distincte, ecuația de mai sus nu este satisfăcută decît dacă $\mathbf{E}' \perp \mathbf{E}''$ adică cele două unde sînt plan-polarizate în plane perpendiculare. În schimb, pentru acele direcții de transfer al energiei pentru care cele două soluții u' și u'' se confundă, ecuația este satisfăcută oricare ar fi starea de polarizare a celor două unde. Aceste direcții pentru care în fapt nu mai are loc separarea în două unde distincte, se numesc *axe optice biradiale*. Mai departe se va vedea că există cristale care posedă o singură axă optică și cristale care posedă două axe de acest fel.

Aceste concluzii rezultate din teoria propagării undelor electromagnetice în mediile anizotrope concordă cu observațiile experimentale asupra birefringenței luminii în mediile acestea. Astfel dacă asupra unui cristal romboedric de spat de Islanda cade o undă plană normal pe fața $A_1B_1C_1D_1$, unda se separă în două unde distincte, fenomen cunoscut sub numele de birefringență. Unda (*O*) *ordinară* trece nerefractată ascultînd de legea lui Snellius. În schimb, unda (*E*), denumită *extraordinară*, se refractă fără să asculte de legea lui Snellius (fig. 8.4). Experimental se constată, în acord cu teoria, că lumina celor două unde este plan-polarizată în plane perpendiculare. În cazul spatului de Islanda se mai observă că scindarea undei în cristal în unda ordinară și cea extraordinară are loc pentru orice direcție a razelor în raport cu axele cristalului, cu excepția unei singure direcții privilegiate (în fig. 8.4 orice direcție paralelă cu C_1A_2) pentru care cele două fascicule se confundă. Astfel de cristale cum este spatul de Islanda sînt uniaxe.

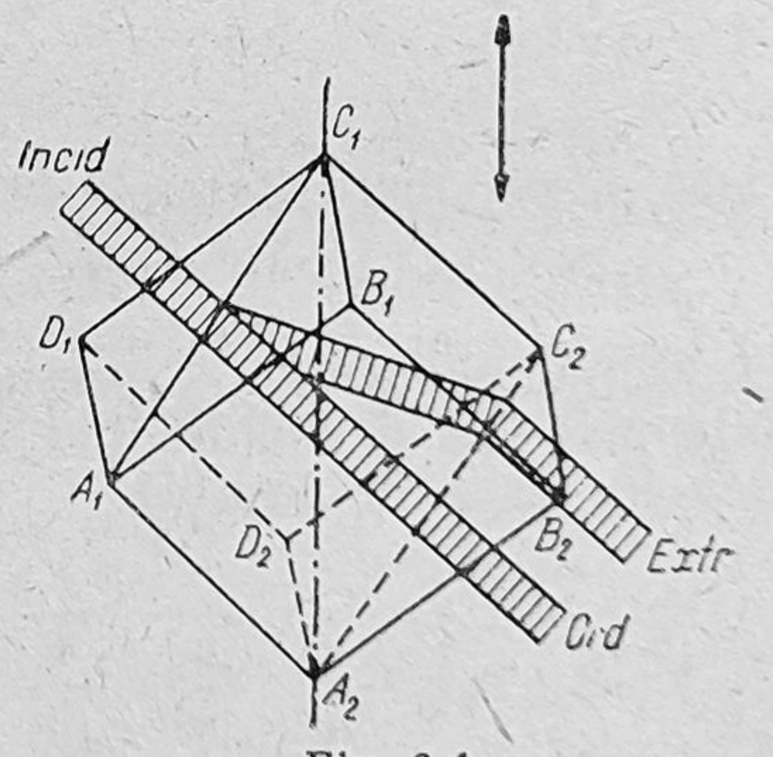


Fig. 8.4

Experimental se mai constată că alte cristale sînt biaxe, existînd două direcții privilegiate pentru care unda nu suferă fenomenul de birefringență. În cazul cristalelor biaxe nu mai poate fi vorba de undă ordinară și undă extraordinară deoarece nici una din cele două unde nu ascultă de legea lui Snellius. Caracterul uniax, respectiv biax al unui cristal este determinat de clasa de cristalizare căreia îi aparține. Astfel, cristalele care aparțin sistemelor de cristalizare triclinic, monoclinic și ortorombic au toate cele trei permitivități principale diferite: $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$. De aici rezultă că aceste cristale au două axe optice biradiale, motiv pentru care se și numesc *cristale biaxe*. În schimb, în cazul cristalelor care aparțin sistemelor tetragonal, hexagonal și trigonal acestea sînt *cristale uniaxe*, întrucît atît axele radiale cît și cele normale se confundă într-o axă optică unică deoarece $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$. Cristalele care fac parte din sistemul cubic cît și corpurile amorfe sînt izotrope.

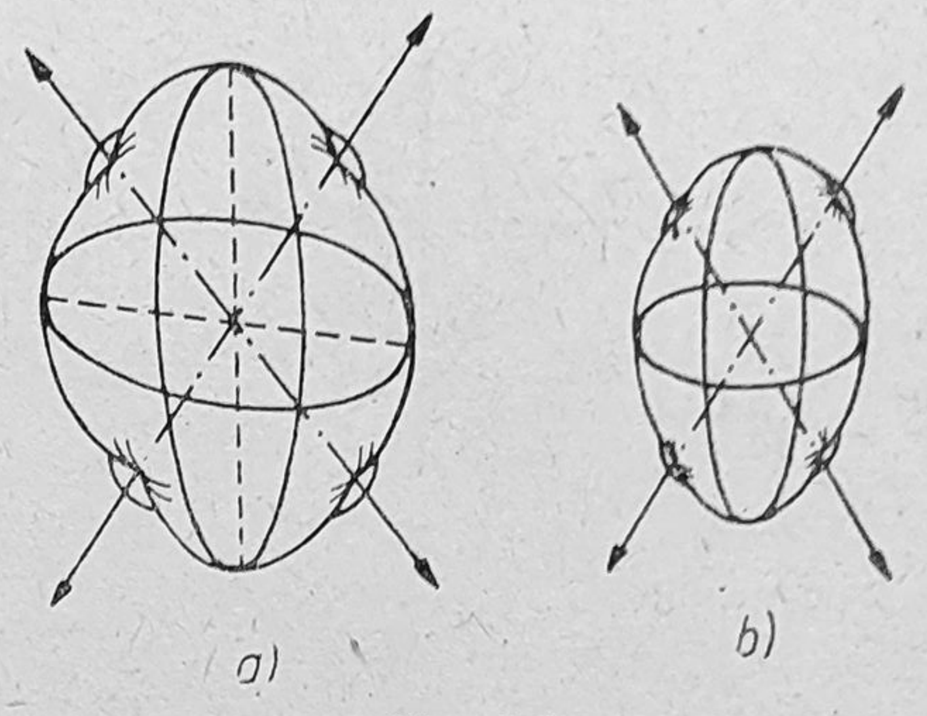


Fig. 8.5

Suprafața radială. Introducem un spațiu tridimensional ale cărui coordonate ξ, η, ζ au dimensiunea unei viteze. Construim în acest spațiu mulțimea vectorilor cu originea în originea coordonatelor, de proiecții $\xi = \alpha_s \rho$, $\eta = \beta_s \rho$, $\xi = \gamma_s \rho$ și a căror mărime

$$\rho(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s) = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

se identifică cu aceea a vitezelor $u'(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ respectiv $u''(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$. Extremitățile vectorilor ρ generează o suprafață cu două pînze, care în cazul general al *cristalelor biaxe* este dată de ecuația

$$\frac{\alpha_s^2}{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{v_1^2}} + \frac{\beta_s^2}{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{v_2^2}} + \frac{\gamma_s^2}{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{v_2^2}} = 0.$$

Scăpînd de numitori ecuația devine

$$(\rho^2 - v_2^2)(\rho^2 - v_3^2)\xi^2 v_1^2 + (\rho^2 - v_3^2)(\rho^2 - v_1^2)\eta^2 v_2^2 + \\ + (\rho^2 - v_1^2)(\rho^2 - v_2^2)\xi^2 v_3^2 = 0 \qquad (8.24)$$

unde s-a ținut seama că proiecțiile vectorului ρ sînt $\xi = \alpha_s \rho$, $\gamma_i = \beta_s \rho$ și $\zeta = \gamma_s \rho$. În figura 8.5, a se arată pînza exterioară, iar în figura 8.5, b pînza interioară a suprafeței dată de (8.24). Se constată că aceste pînze au patru puncte de contact (ombilice) prin care trec cele două axe radiale.

Prezintă interes secțiunile acestei suprafețe. Astfel dacă se intersectează suprafața radială cu planul $\eta = 0$ (fig. 8.6, a) ecuația (8.24) devine

$$(\rho^2 - v_2^2)[(\rho^2 - v_3^2)\xi^2 v_1^2 + (\rho^2 - v_1^2)\zeta^2 v_3^2 = 0.$$

Această ecuație se despică în două ecuații : prima este ecuația cercului

$$\rho^2 = v_2^2. \tag{8.25}$$

Cea de-a doua, rezultînd din anularea parantezei drepte, este

$$(\rho^2 - v_3^2)\xi^2 v_1^2 + (\rho^2 - v_1^2)\,\zeta^2 v_3^2 = 0. \tag{8.26}$$

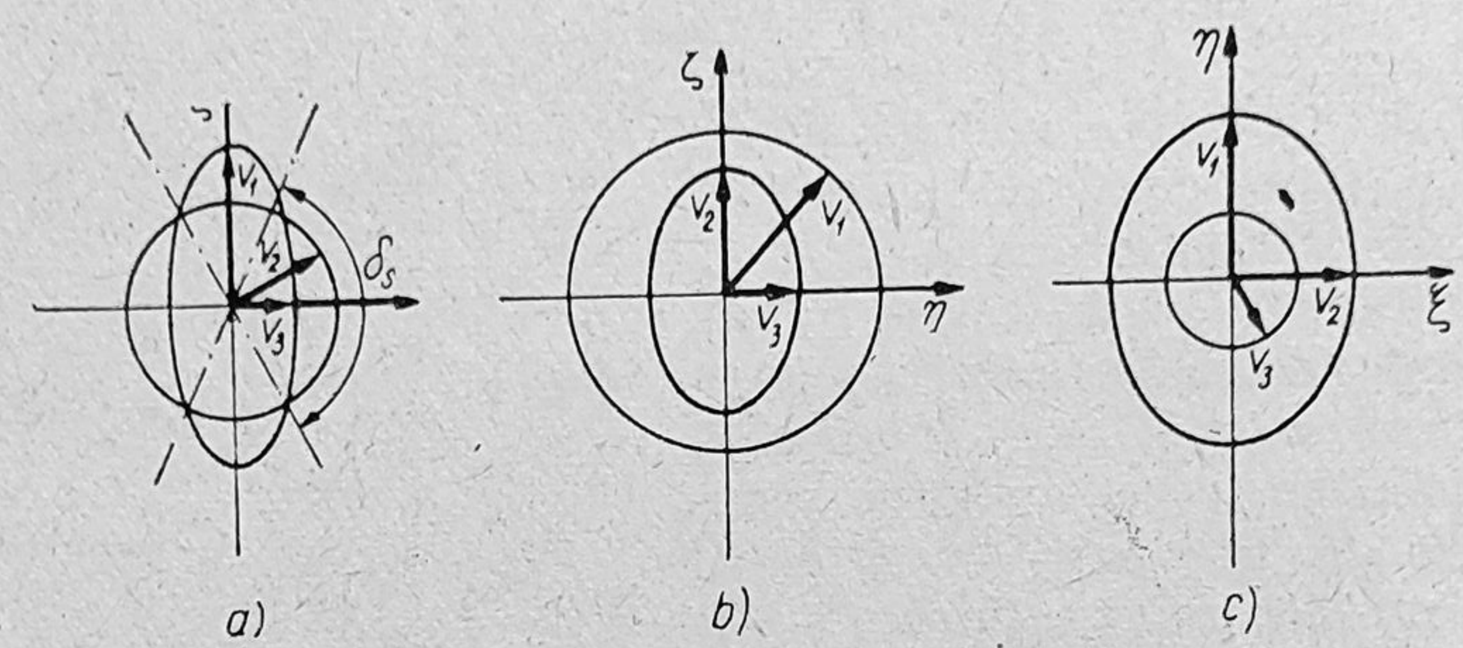


Fig. 8.6

Desfăcînd parantezele și simplificînd cu $\rho^2 = \xi^2 + \zeta^2$ (deoarece $\eta = 0$) se obține, după cîteva operații simple, ecuația unei elipse care în ipoteza $v_1 > v_2 > v_3$ intersectează cercul (8.25)

$$\frac{\xi^2}{v_3^2} + \frac{\zeta^2}{v_1^2} = 1. \tag{8.27}$$

Secționînd suprafața (8.24) după planele $\xi = 0$ (fig. 8.6 b), respectiv $\zeta = 0$ (fig. 8.6 c) se obține de asemenea un cerc și o elipsă, dar care nu au puncte comune.

Din figura 8.6, a se vede că în cele patru puncte de intersecție a cercului (8.25) cu elipsa (8.27), vitezele coincizînd, dreptele care se pot duce în aceste puncte sînt chiar cele două axe optice biradiale după care birefringența nu are loc. Pentru a afla unghiul δ_s dintre aceste două axe este suficient să eliminăm ρ^2 între (8.25) și (8.26). Ultima ecuație devine

$$(v_2^2 - v_3^2)\xi^2 v_1^2 = (v_1^2 - v_2^2)\zeta^2 v_3^2$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_s}{2} = \frac{\zeta}{\xi} = \pm\frac{v_1}{v_2}\left(\frac{v_2^2 - v_3^2}{v_1^2 - v_2^2}\right)^{1/2} \tag{8.28}$$

Se vede că atît în cazul $v_1 > v_2 > v_3$, cît și în cazul $v_1 < v_2 < v_3$, raportul ζ/ξ este real.

În cazul $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, cele două axe biradiale se confundă, cristalele fiind *uniaxe*. Vitezele principale, legate de permitivitățile principale iau valorile

$$\begin{aligned} v_o &= v_1 = v_2 \\ v_e &= v_3 \neq v_o. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Ecuația (8.24) capătă forma

$$(\rho^2 - v_o^2)[(\rho^2 - v_e^2)(\xi^2 + \eta^2)v_o^2 + (\rho^2 - v_o^2)\zeta^2 v_e^2] = 0. \tag{8.30}$$

Prelucrînd termenul din paranteza dreaptă și simplificînd cu $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ rezultă

$$(\rho^2 - v_o^2)[(\xi^2 + \eta^2)v_o^2 + \zeta^2 v_e^2 - v_o^2 v_e^2] = 0. \tag{8.31}$$

Această ecuație, corespunzătoare suprafeței radiale cu două pînze, în cazul cristalelor uniaxe se despică în următoarele două ecuații:

$$\rho^2 = v_o^2 \tag{8.32}$$

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{v_e^2} + \frac{\zeta^2}{v_o^2} = 1. \tag{8.33}$$

Una din pînze este o sferă cu raza v_o, razele după care energia undei se transferă cu această viteză fiind denumite „ordinare", iar cealaltă pînză este un elipsoid de rotație cu axele v_e și v_o. Razele după care energia undei se transferă cu viteza $v \in [v_e, v_o]$ sînt denumite „extraordinare". Efectuînd o secțiune a elipsoidului cu planul $\xi = 0$ (fig. 8.7, a) se obține, în ipoteza $v_o > v_e$, o elipsă în interiorul unui cerc, avînd cu acesta două puncte de contact situate pe axa de simetrie ζ care devine astfel axa optică. Degenerarea celor două axe optice într-una singură se poate arăta și analitic. Într-adevăr, punînd în (8.28) $v_1 = v_2 = v_o$ și $v_3 = v_e$ rezultă $\operatorname{tg} \frac{\delta_s}{2} = \infty$, deci $\delta_s = \pi$. În cazul secționării suprafeței radiale cu planul $\eta = 0$, rezultă aceleași concluzii. Dimpotrivă, prin secționarea cu planul $\zeta = 0$, se obțin două cercuri concentrice de rază v_o, respectiv v_e (fig. 8.7, b). Într-o astfel de secțiune, normală pe axa optică biradială, vitezele sînt independente de direcție atît pentru razele ordinare cît și pentru cele extraordinare. În această secțiune și indicii de refracție $\eta_o = c/v_o$, respectiv $n_e = c/v_e$, sînt constanți, astfel că ambele raze satisfac legii refracției a lui Snellius, în timp ce într-o secțiune care cuprinde axa optică ζ, (secțiune principală) numai raza ordinară satisface această lege.

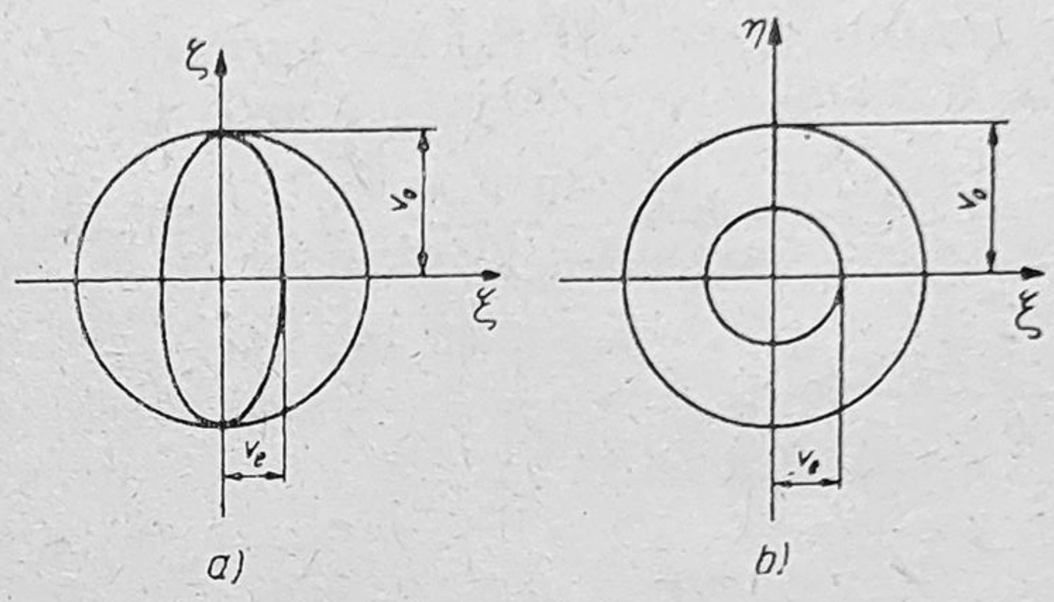


Fig. 8.7

Pentru caracterizarea gradului de anizotropie a unui cristal uniax se introduce, în secțiunea normală pe axa optică biradială, mărimea

$$b = n_e - n_o \tag{8.34}$$

denumită *birefringența* cristalului și care poate fi pozitivă sau negativă. De observat că n_e și n_o depind de frecvență și există o frecvență ω_c, numită frecvența critică, pentru care $n(\omega_c) = n_o(\omega_c)$, deci cristalul devine izotrop.

8.4. Ecuația normalelor. Suprafața normalelor

Discuția din paragraful precedent privitoare la „raze", adică la direcțiile de transfer al energiei în mediile anizotrope, s-a întreprins pornind de la relația (8.18) care dă expresia intensității cîmpului electric în funcție de

inducția electrică. Se poate face o discuție analogă privitoare la direcțiile de propagare ale undei, adică la „normalele“ la suprafețele echifaze, pornind de data aceasta însă de la relația (8.19)

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0 v^2}\,[\mathbf{E} - \mathbf{1}_n(\mathbf{E}\mathbf{1}_n)].$$

În cele ce urmează vom stabili ecuația pentru „normale“ și vom analiza suprafața normală urmînd aceeași cale ca și în paragraful precedent. Mai întîi vom scrie relația de mai sus pe componente

$$D_x = -\frac{\alpha_n(\mathbf{E}\mathbf{1}_n)}{\mu_0(v^2 - v_1^2)},\quad D_y = -\frac{\beta_n(\mathbf{E}\mathbf{1}_n)}{\mu_0(v^2 - v_2^2)},\quad D_z = -\frac{\gamma_n(\mathbf{E}\mathbf{1}_n)}{\mu_0(v^2 - v_3^2)} \tag{8.35}$$

unde α_n, β_n, γ_n sînt cosinușii directori ai direcției normalei în raport cu axele x, y, z. Ținînd seama că $\mathbf{1}_n$ este normal la suprafața echifază la care $\mathbf{D}$ este tangent și deci

$$\mathbf{1}_n\mathbf{D} = \alpha_n D_x + \beta_n D_y + \gamma_n D_z \tag{8.36}$$

din (8.35) și (8.36) rezultă în urma unor transformări simple ecuația normalelor, dată de asemenea de către Fresnel,

$$\frac{\alpha_n^2}{v^2 - v_1^2} + \frac{\beta_n^2}{v^2 - v_2^2} + \frac{\gamma_n^2}{v^2 - v_3^2} = 0. \tag{8.37}$$

Și această ecuație bipătrată are în cazul general două soluții distincte reale și pozitive $v'^2(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ și $v''^2(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, acestor două viteze corespunzîndu-le două unde distincte $\mathbf{D}'$, $\mathbf{H}'$ respectiv $\mathbf{D}''$, $\mathbf{H}''$, plan-polarizate în plane perpendiculare. Și în acest caz există orientări (maximum două) pentru care $v'(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = v''(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ astfel că ambele unde sînt confundate într-o singură undă, care nu se mai găsește într-o stare de polarizare privilegiată. Aceste axe poartă numele de *axe optice binormale.*

Suprafața normalelor. Într-un spațiu tridimensional, ale cărui coordonate ξ, η, ζ au dimensiunile unei viteze, se trasează mulțimea vectorilor $\rho(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ cu originea în originea coordonatelor și de proiecții $\xi = \alpha_n\rho$, $\eta = \beta_n\rho$, $\zeta = \gamma_n\rho$ și a căror mărime se identifică cu aceea a vitezelor $v'(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, respectiv $v''(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$. Ecuația în ξ, η și ζ a suprafeței cu două pînze generată de extremitățile acestor vectori se obține din (8.37)

$$\frac{\xi^2}{\rho^2 - v_1^2} + \frac{\eta^2}{\rho^2 - v_2^2} + \frac{\zeta^2}{\rho^2 - v_3^2} \tag{8.38}$$

sau, scăpînd de numitori, rezultă ecuația normalelor

$$\xi^2(\rho^2 - v_2^2)(\rho^2 - v_3^2) + \eta^2(\rho^2 - v_3^2)(\rho^2 - v_1^2) + \zeta^2(\rho^2 - v_1^2)(\rho^2 - v_2^2) = 0. \tag{8.39}$$

În cazul secționării acestei suprafețe cu planul $\eta = 0$, această ecuație se poate pune sub forma

$$(\rho^2 - v_2^2)[\xi^2(\rho^2 - v_3^2) + \zeta^2(\rho^2 - v_1^2)] = 0 \tag{8.40}$$

care se despică în ecuația unei sfere

$$\rho^2 = v_2^2 \tag{8.41}$$

și o ecuație de ordinul IV

$$\xi^2(\rho^2 - v_3^2) + \zeta^2(\rho^2 - v_1^2) = 0. \tag{8.42}$$

Pentru a afla unghiul δ_n dintre axele binormale, observăm că în punctele de intersecție între cele două curbe, $\rho = v_2$. Introducînd această condiție în (8.40) obținem

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_n}{2} = \frac{\zeta}{\xi} = \pm \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_3^2} \right)^{1/2}. \tag{8.43}$$

Comparînd (8.28) cu (8.43) se constată că $\delta_s \neq \delta_n$, sau, cu alte cuvinte, axele optice biradiale nu coincid cu axele optice binormale. Din aceleași relații se observă că δ_s și δ_n depind prin intermediul vitezelor v_1, v_2 și v_3, de permitivitățile ε_1, ε_2 și ε_3, funcții de frecvența undei. De aici urmează dependența de frecvență a poziției axelor optice biradiale, respectiv binormale (dispersia axelor optice).

Pleocroism și dicroism. În discuția de pînă acum, mediile anizotrope au fost idealizate ca medii riguros conservative. În realitate însă, mediile anizotrope reale sînt și absorbante, astfel că operatorul permitivitate $\hat{\varepsilon}$ trebuie înlocuit cu operatorul

$$\tilde{\hat{\varepsilon}} = \hat{\varepsilon} + \frac{\mathrm{i}}{\omega} \hat{\sigma}$$

al cărui reprezentant este matricea de elemente

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{\mathrm{i}}{\omega} \sigma_{ij}.$$

Substituind în teoria propagării luminii în medii anizotrope conservative operatorul $\hat{\varepsilon}$ prin $\tilde{\hat{\varepsilon}}$, se constată că atît vitezele v' și v'' cît și vectorii $\mathbf{D}'$ și $\mathbf{D}''$ devin mărimi complexe. Din acest motiv $\mathbf{D}'$ și $\mathbf{D}''$ descriu unde polarizate eliptic. Așa cum reiese din relațiile de mai sus, absorbția undelor va depinde atît de direcția și de starea de polarizare, cît și de frecvență (pleocroism). Menționăm existența mediilor dicroice caracterizate prin absorbția inegală a undelor ordinare și extraordinare. Există substanțe dicroice, de exemplu herapatitul, în care una din unde este practic absorbită complet pe distanțe extrem de mici, astfel că o undă de lumină naturală care intră într-un astfel de cristal emerge total plan-polarizată. Pe această proprietate se bazează construcția polaroizilor cu dicroism.

Refracția conică internă. Pe o lamă confecționată dintr-un cristal biax, ale cărei fețe paralele sînt tăiate perpendicular pe una din axele binormale, cade sub incidență normală un fascicul îngust de lumină naturală monocromatică. Se constată că în interiorul lamei razele formează o pînză conică, iar la ieșirea din lamă pînza devine cilindrică, producînd un inel luminos pe un ecran (fig. 8.8). Pentru a ne explica acest fenomen, ne reamintim că în mediile anizotrope suprafețele echifaze sînt distincte de suprafețele echi-

energetice. Fie Π_0 un plan de fază constantă (fig. 8.9). Unda fiind nepolarizată, vectorul **D** are într-un astfel de plan toate orientările posibile. În planul echienergetic Π_E, distinct de Π_0, vor fi cuprinse toate orientările posibile ale vectorului **E**. În figura 8.9 s-au arătat cîteva orientări ale lui **D**, notate 1, 2, 3, 4, împreună cu orientările corespunzătoare ale lui **E**, din planul Π_E, și ale versorului transferului energiei (notate s_1, s_2, s_3, s_4), precum și versorul $\mathbf{1}_n$ al direcției de propagare. Se vede că direcțiile de transfer al energiei generează o pînză conică. La ieșirea din lamă, distincția dintre direcția de propagare și direcția de transfer al energiei ne mai avînd loc, pînza conică se transformă într-o pînză cilindrică. Observăm că fiecare rază este plan-polarizată, direcția de oscilație a lui **D** variind însă de la o rază la alta.

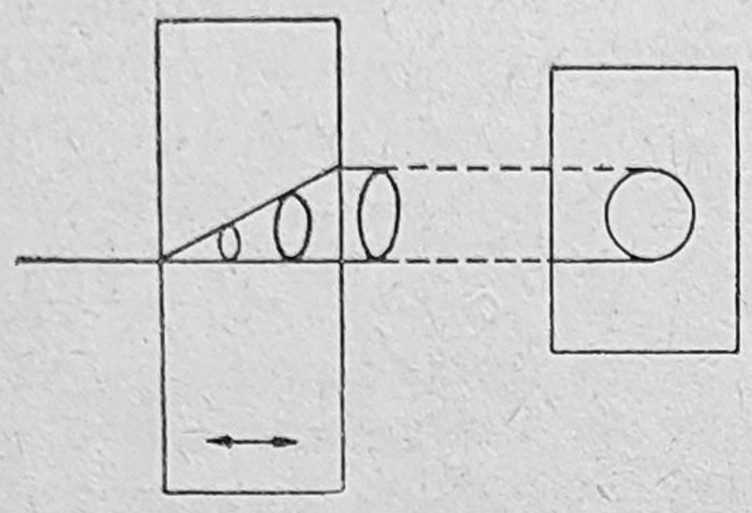


Fig. 8.8

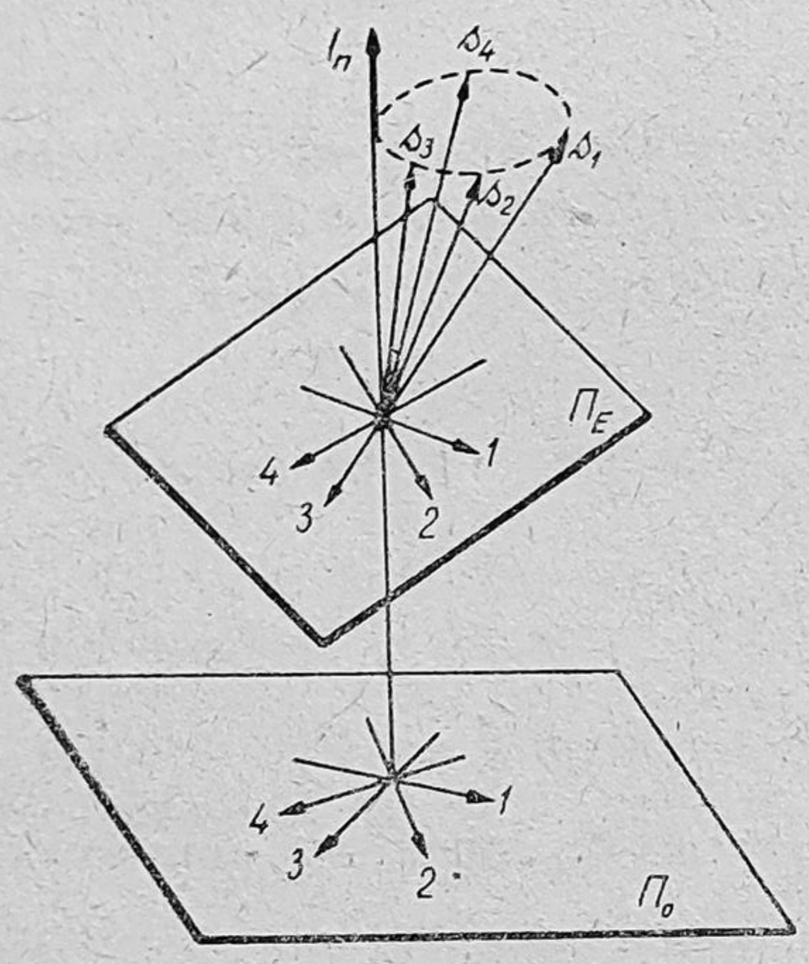


Fig. 8.9

Refracția conică externă. Se focalizează într-un punct *O* de pe suprafața unei lame plan-paralele, confecționată dintr-un cristal biax, un fascicul de lumină. Se selectează cu ajutorul unei deschideri, un fascicul îngust de raze emergente pe direcția unei axe optice biradiale. Se constată că la ieșirea din lamă, fasciculul de raze formează o pînză conică. Așezînd un ecran, în drumul razelor, pe acesta apare un inel luminos (fig. 8.10). Acest fenomen de refracție conică externă se explică astfel. În afara cristalului, planele echifază coincid cu cele echienergetice. În dreptul centrului există o infinitate de plane tangente la cele două pînze ale suprafeței radiale. Normalele la aceste plane generează o pînză conică, a cărei intersecție cu ecranul este chiar inelul luminos.

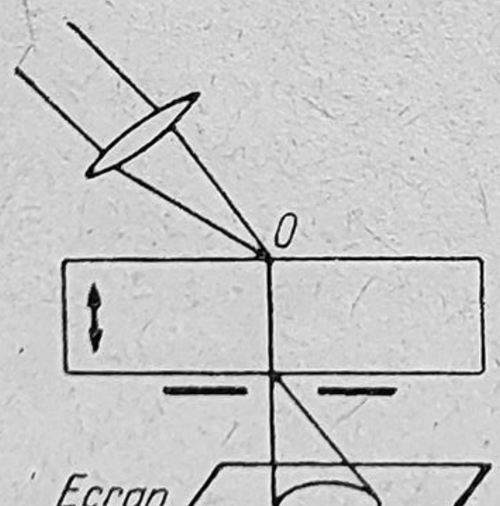


Fig. 8.10

În încheiere, menționăm că ambele fenomene de refracție conică au fost descoperite mai întîi teoretic de către marele matematician și fizician W. Hamilton și apoi au fost studiate și experimental.

8.5. **Anizotropia mediilor optice**

După cum se știe, un cristal consistă în repetarea periodică după cele trei direcții spațiale a unei celule primitive. Asimetria existentă în celula primitivă are drept urmare variația proprietăților de material cu direcția de măsurare, adică anizotropia cristalină. Cristalele aparținînd sistemelor

rombic, monoclinic și triclinic sînt biaxe, cele aparținînd sistemelor tetragonal, hexagonal și trigonal sînt uniaxe, iar cele aparținînd sistemului cubic sînt izotrope. Alte medii naturale anizotrope sînt cristalele lichide. În timp ce în cazul cristalelor solide există o rețea spațială, în cazul cristalelor lichide, deși se menține ordinea la distanță, nu există însă o rețea spațială.

Substanțe în mod obișnuit izotrope își pot modifica simetria sub acțiunea unor solicitări exterioare, devenind anizotrope. Vom da mai jos descrierea cîtorva efecte de acest tip.

Efectul Kerr. Așezînd anumite substanțe transparente izotrope într-un cîmp electrostatic, se constată că acestea devin birefringente uniaxe, axa optică identificîndu-se cu direcția cîmpului electric. Între birefringența $b = n_e - n_o$ și intensitatea cîmpului electric există relația

$$b = K\lambda E^2. \tag{8.44}$$

Mărimea de material K depinde de lungimea de undă și scade cu temperatura. Dependența birefringenței de intensitatea cîmpului electric fiind pătratică, înseamnă că b este independentă de sensul cîmpului electric. Dintre substanțele lichide prezintă o constantă Kerr ridicată benzenul, nitrobenzenul, nitrotoluenul și sulfura de carbon. Unele substanțe organice au $K < 0$. Dintre substanțele solide, menționăm titanatul de bariu sau de stronțiu și tantalatul de potasiu. La substanțele solide, efectul Kerr este mai dificil de studiat întrucît se combină cu un efect de electrostricțiune. Menționăm că s-a observat acest efect și la gaze, birefringența produsă fiind însă foarte mică.

Efectul Kerr se stabilește practic instantaneu (circa 10^{-9} s) și din acest motiv este folosit în traductoarele electrooptice.

Efectul Kerr se întîlnește la substanțe alcătuite din molecule cu moment electric permanent. În absența cîmpului electric, orientarea acestora este aleatorie ca urmare a agitației termice. Cîmpul electric tinde să orienteze aceste molecule pe direcția sa, imprimînd astfel o anizotropie mediului.

Efectul Cotton-Mouton. Acest efect este analog efectului Kerr, cu deosebirea că se produce sub acțiunea unui cîmp magnetic. Se întîlnește atît la lichide, cît și la solide. Birefringența, comparativ mult mai mică decît în cazul efectului Kerr, este dată de relația

$$b = C\lambda B^2 \tag{8.45}$$

și este independentă de sensul vectorului **B**. Acest efect se observă foarte marcat și la soluțiile coloidale de hidrat de fier (efectul Majorana).

Efectul Pockels. Acest efect consistă în modificarea simetriei optice din uniaxă în biaxă sub acțiunea unui cîmp electric de ordinul kV/m. Este un efect liniar. Se întîlnește numai la cristalele piezoelectrice, cum ar fi KDP, KDP deuterat, ADP, titanat de bariu sau de litiu, niobat de litiu, arseniură de galiu etc.

Efectul Brewster. Dacă se supune o piesă de plexiglas, de exemplu, inițial izotropă, unui efort mecanic, se constată că aceasta devine anizotropă uniaxă, birefringența variind liniar cu presiunea exercitată

$$b = B\lambda p \tag{8.46}$$

axa optică identificîndu-se cu direcția de deformare mecanică. Dependența birefringenței de solicitările mecanice a condus la elaborarea unor tehnici

de studiu al repartiției tensiunilor mecanice denumită fotoelasticimetrie. Se confecționează modele din materiale transparente a căror constantă Brewster B are valori mari (de exemplu plexiglas, celuloid etc.) și, folosind anumite criterii de similitudine, se aplică piesei solicitările corespunzătoare celor care acționează în realitate. Efectele de birefringență provocată de solicitări se traduc prin apariția unor maxime și minime de interferență. Prin „decodarea“ acestor familii de curbe de maxim și minim al intensității luminoase se obține informația asupra stării elastice a piesei*.

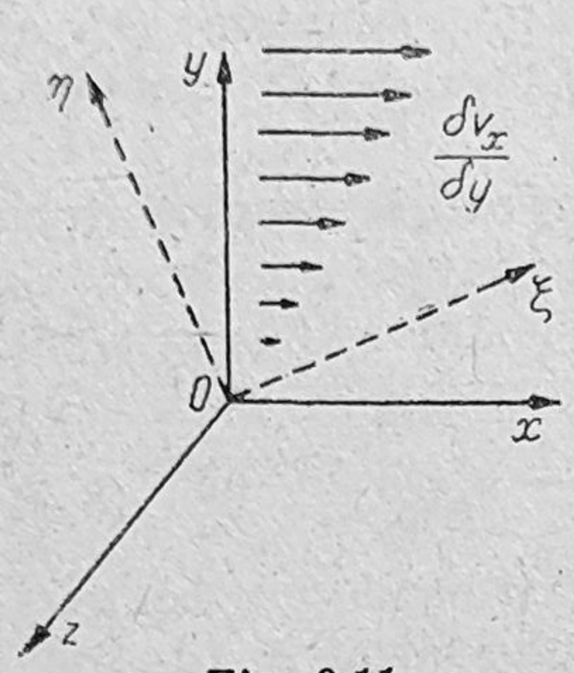


Fig. 8.11

Efectul Maxwell. Acest efect mecano-optic consistă în apariția birefrigenței luminii, cînd aceasta străbate fluide vîscoase a căror curgere laminară prezintă un gradient de viteză. Efectul este sensibil la fluidele formate din macromolecule sau la soluțiile în care se află în suspensie coloidală particule anizotrope. Să admitem că gradientul vitezei este $\partial v_x/\partial y$, iar direcția de propagare a undei luminoase este z (fig. 8.11). Ca urmare a birefringenței, se obțin două unde, una plan-polarizată total în planul ξ, z, cealaltă de asemenea plan-polarizată total, dar în planul η, z. Birefringența este dată de relația

$$b = C\left|\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|. \tag{8.47}$$

Atît timp cît gradientul vitezei este inferior valorii $10^4\ s^{-1}$, unghiul format de axele ξ, η cu axele x, y este egal cu $\pi/4$. Dacă însă gradientul vitezei depășește această valoare, unghiul dintre axele ξ, η și x, y scade cu atît mai mult cu cît $\partial v_x/\partial y$ este mai mare.

Efectul Maxwell este folosit în studiul polimerilor. Apariția unor fenomene de birefringență în lichidele supuse acțiunii ultrasunetelor este datorată în fapt tot acestui efect.

Efectul Faraday. Toate substanțele transparente pot produce rotirea planului de polarizare a unei unde luminoase plan-polarizate total, dacă se găsesc situate într-un cîmp magnetic. Pentru observarea fenomenului, se folosesc electromagneți ale căror piese polare sînt perforate axial permițînd astfel propagarea luminii pe direcția cîmpului magnetic. Substanța cercetată se așează între aceste piese polare. Se constată că sensul de rotire a planului de polarizare depinde numai de natura substanței și de sensul cîmpului magnetic, fiind independent de sensul de propagare a luminii. Substanțele se împart în pozitive, pentru care elicitatea rotirii planului de polarizare este $\mathcal{H} = 1$ și negative pentru care $\mathcal{H} = -1$. Substanțele diamagnetice sînt toate pozitive, pe cînd cele paramagnetice sînt fie pozitive, fie negative. Mărimea unghiului de rotație este proporțională cu inducția magnetică B și cu drumul parcurs de lumină în substanță

$$\alpha = [\omega]_\lambda^0 l B. \tag{8.48}$$

---

* Detalii asupra metodelor fotoelasticimetrice se găsesc în articolul lui N. Iliescu și colaboratorii, publicat în lucrarea *Analiza experimentală a tensiunilor*, vol. I, p. 298—433, Ed. Tehnică, București, 1977.

Mărimea de material $[\omega]^0_\lambda$, denumită „constanta“ lui Verdet, depinde atît de natura substanței și de temperatură, cît și de lungimea de undă a radiației. Inerția efectului este foarte mică, de ordinul 10^{-9} s, fapt care a condus la utilizarea acestui fenomen în dispozitivele de modulare a luminii. Rotiri mari se obțin la trecerea luminii plan-polarizate total prin straturi subțiri feromagnetice situate într-un cîmp magnetic. În acest caz unghiul de rotire variază neliniar cu inducția magnetică.

8.6. Activitatea optică

La trecerea unei unde plan-polarizate total prin unele substanțe transparente în stare solidă — cristalină sau amorfă — sau în stare lichidă sau gazoasă, se constată o rotire a planului de polarizare cu un unghi proporțional cu drumul parcurs de undă în acel mediu. Astfel de substanțe se numesc *optic active levogire*, dacă elicitatea în raport cu sensul de propagare este $\mathcal{H} = +1$, respectiv *optic active dextrogire* dacă $\mathcal{H} = -1$. Activitatea optică se datorează fie chiralității moleculelor, fie numai unei structuri chirale constituită din molecule achirale. Fiecare substanță optic activă se poate găsi așadar atît în forma levogiră cît și în cea dextrogiră, unghiurile de rotație fiind egale pentru cele două forme, dar de semne contrarii, cînd celelalte condiții rămîn neschimbate. În cazul solidelor izotrope (de exemplu cloratul de sodiu, sau bromatul de sodiu care cristalizează în sistemul cubic), efectul este același indiferent de orientarea cristalului. În cazul cristalelor anizotrope (de exemplu cuarțul sau cinabrul) observația trebuie făcută însă pe direcția axei optice, pentru a se evita complicațiile introduse de fenomenul de birefringență. În general, în cazul cristalelor, unghiul de rotire este dat de relația

$$\alpha = [\alpha]^\theta_\lambda l \tag{8.49}$$

unde l este lungimea drumului parcurs de undă în cristal, iar $[\alpha]^\theta_\lambda$ o mărime de material dependentă de temperatură și de lungimea de undă, denumită *rotire specifică.*

În cazul lichidelor optic active, unghiul de rotație depinde și de densitatea ρ a lichidului, iar în cazul substanțelor optic active dizolvate, de concentrația c a acestora în soluție, (8.50)

$$\alpha = [\alpha]^0_\lambda f(c) l. \tag{8.51}$$

Se obține o aproximație bună a funcției $f(c)$, reținînd primii trei termeni ai dezvoltării în serie

$$f(c) = A + Bc + Cc^2. \tag{8.52}$$

Menționăm că $[\alpha]^0_\lambda$ nu depinde de starea de agregare a substanței. De exemplu, camforul sau terebentina au practic aceeași valoare a lui $[\alpha]^0_\lambda$ atît în stare lichidă cît și în stare gazoasă.

Explicarea rotirii planului de polarizare. Să considerăm (fig. 8.12) o undă armonică plană, plan-polarizată total, de lungime de undă în vid λ_0, al cărei vector **E** oscilează în planul (x, z) și care cade normal asupra unui cristal optic activ a cărui axă optică este orientată după coordonata z. Folosind formalismul matricelor lui Jones, putem scrie amplitudinea intensității cîmpului electric **E** (0) sub forma

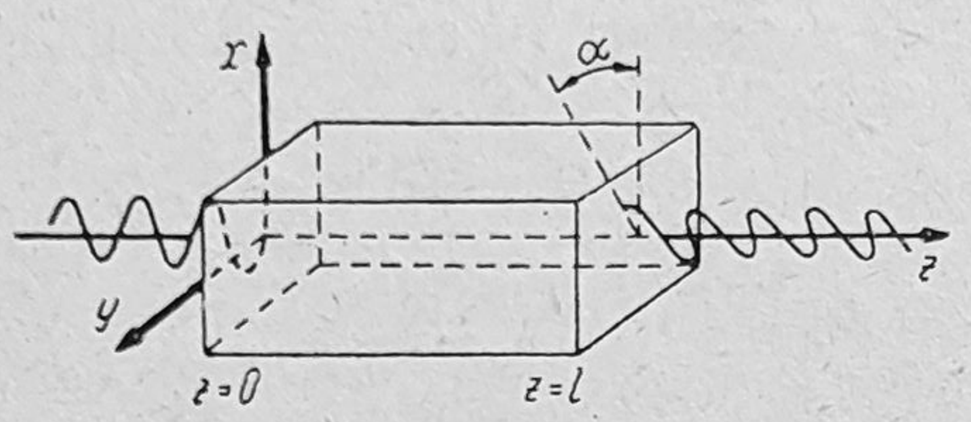


Fig. 8.12

$$\begin{pmatrix} E_x(0) \\ E_y(0) \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \frac{E_0}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ +\mathrm{i} \end{pmatrix}. \qquad (8.53)$$

Ultimul membru nu exprimă altceva decît descompunerea undei plan-polarizate în două unde circular polarizate cu elicități opuse. Vom admite, după Fresnel, că vitezele de fază ale acestor două unde circular polarizate sînt diferite sau, altfel spus, mediul optic activ prezintă indici de refracție diferiți n_l și n_d pentru undele polarizate circular stînga, respectiv dreapta. Matricele care exprimă transmisiile celor două unde printr-o lamă de grosime l vor fi

$$\mathfrak{T}_l = \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\lambda_0} n_l l\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{T}_d = \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\lambda_0} n_d l\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ieșirea din lamă, matricea Jones va fi

$$\begin{pmatrix} E_x(l) \\ E_y(l) \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} \mathfrak{T}_l \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \frac{E_0}{2} \mathfrak{T}_d \begin{pmatrix} 1 \\ +\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

sau, după efectuarea calculelor,

$$\begin{pmatrix} E_x(l) \\ E_y(l) \end{pmatrix} = E_0 \exp(\mathrm{i}\theta) \begin{pmatrix} \cos \dfrac{\pi}{\lambda_0} (n_l - n_d) l \\ \sin \dfrac{\pi}{\lambda_0} (n_l - n_d) l \end{pmatrix}$$

unde $\theta = \dfrac{\pi}{\lambda_0}(n_l + n_d)l$. Se observă că planul de polarizare este rotit cu un unghi α a cărui tangentă este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_y(l)}{E_x(l)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda_0} (n_l - n_d) l\right)$$

de unde rezultă

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_l - n_d) l. \qquad (8.54)$$

Folosind această relație, se poate pune în evidență marea sensibilitate a determinărilor de activitate optică. Într-adevăr, diferența $n_l - n_d$ este de ordinul 10^{-6}, iar lungimea de undă de ordinul $5 \cdot 10^{-7}$. Presupunînd lungimea parcursă $l = 0{,}25$ m rezultă $\alpha \approx \pi/2$. Măsurările de rotire a planului de polarizare se pot însă efectua cu o precizie de o sutime de grad, așa încît înseamnă că $n_l - n_d$ poate fi determinat pînă la a zecea zecimală.

Birefringența circulară. Întrucît $n_l \neq n_d$, urmează că o undă luminoasă plan-polarizată care cade pe o prismă confecționată dintr-un cristal optic activ va suferi fenomenul de birefringență, devierea undei polarizate circular dreapta fiind diferită de cea a undei polarizate circular stînga (fig. 8.13). În cazul cuarțului variația unghiului de deviație este foarte mică (23 secunde).

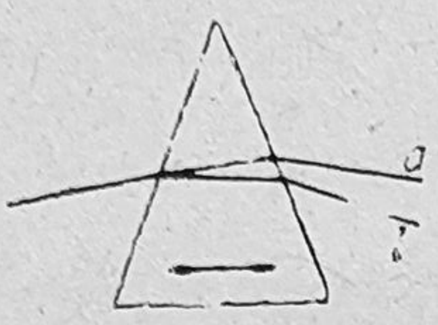


Fig. 8.13

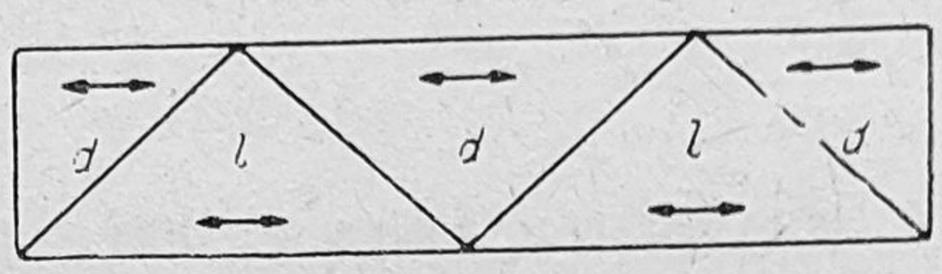


Fig. 8.14

Efectul poate fi amplificat folosind dispozitivul lui Fresnel constituit dintr-o succesiune de cristale dextrogire care alternează cu cristale levogire (fig. 8.14). Birefringența circulară a prismelor de cuarț constituie un efect nedorit în spectroscopia în ultraviolet care folosește astfel de prisme. Pentru înlăturarea birefringenței se folosesc prisme Cornu confecționate din două cristale unul dextrogir, iar celălalt levogir (fig. 8.15).

Dispersia rotatorie. Prin acest fenomen se înțelege variația cu lungimea de undă a diferenței $n_l - n_d$. De aici rezultă că rotirea specifică este de asemenea funcție de lungimea de undă. Dependența este dată de formula stabilită de către Drude

$$\alpha = \sum_i \frac{A_i}{\lambda_i^2 - \lambda^2} \qquad (8.55)$$

unde λ_i sînt lungimile de undă la care are loc absorbția luminii în mediul considerat.

Dicroism circular. Efectul Cotton. În cazul mediilor optic active, absorbția celor două unde circular polarizate în benzile de absorbție diferă în mod

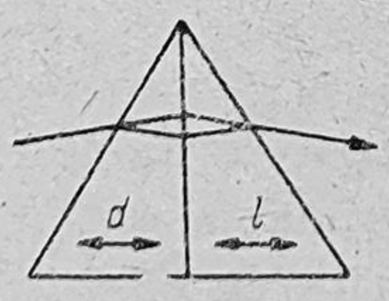


Fig. 8.15

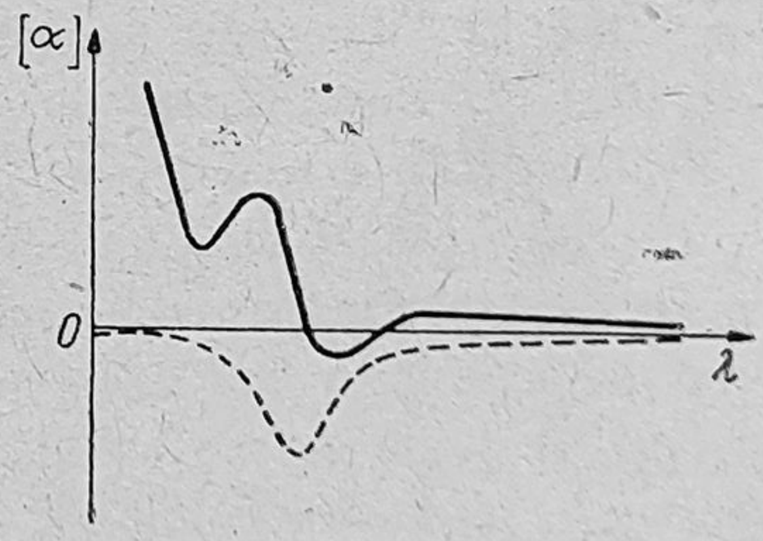


Fig. 8.16

sensibil (dicroism circular). În exemplul din figura 8.16, se arată prin curba punctată dependența de lungimea de undă a diferenței dintre coeficienții de absorbție ai celor două unde. În aceleași domenii de lungimi de undă se produce și un alt fenomen, denumit dispersie rotatorie anomală, curba $[\alpha] - \lambda$

(în figură curba plină) prezentînd un maxim și un minim. Dicroismul circular, împreună cu dispersia rotatorie anomală, constituie efectul Cotton.

Metodele de investigare a structurii spațiale a moleculelor organice, bazate pe studiul activității optice, a dispersiei rotatorii sau a efectului Cotton (așa-numitele metode chiroptice) au mare importanță în stereochimia organică.

9. CUANTIFICAREA CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC

9.1. Ipoteza fotonilor. Efectul fotoelectric și efectul Compton

Ideea structurii atomiste a luminii este veche și a fost dezvoltată încă de Newton ca o teorie coerentă, în limitele concepțiilor fizicii clasice. Succesele acestei teorii au fost totuși destul de modeste. Dimpotrivă, teoria ondulatorie a lui Huygens, care admitea o structură continuă a luminii, a permis interpretarea satisfăcătoare a unui mare număr de fenomene luminoase, iar teoria maxwelliană a undelor electromagnetice părea să explice toate nuanțele opticii. Radiația termică de echilibru a fost unul din fenomenele pe care teoria clasică nu le-a putut interpreta. Pentru explicarea legilor radiației termice, Planck a fost obligat să accepte o ipoteză cu totul străină de spiritul fizicii clasice și anume ipoteza cuantelor. În conformitate cu această ipoteză, oscilatorii microscopici nu se puteau găsi în orice stări, ci doar într-o mulțime selecționată de stări, variația de energie între două stări învecinate fiind proporțională cu frecvența ω a oscilatorului

$$\Delta \mathcal{E} = \hbar\omega$$

unde $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ J·s este o constantă universală denumită astăzi constanta lui Planck. Pasul următor l-a făcut Einstein introducînd în 1905 ipoteza fotonilor*. În concepția lui Einstein asupra emisiei și absorbției luminii — concepție astăzi unanim acceptată — se admite că în cazul în care energia unui oscilator microscopic scade cu $\Delta \mathcal{E} = \hbar\omega$, se generează un foton a cărui energie este chiar $\hbar\omega$. Reciproc, la absorbția unui foton de către oscilator, energia acestuia crește cu $\hbar\omega$. Fotonul este prima particulă studiată de fizicieni ca o particulă cuantică, deci radical diferită de obiectele clasice. Într-adevăr, conceptul de foton, nou introdus, urmînd a explica toate fenomenele pe care teoria ondulatorie le interpretase cu succes, trebuia să fie o sinteză dialectică între conceptul de corpuscul și cel de undă, adică în fapt ceva radical diferit atît de conceptul clasic de particulă, cît și de cel clasic

* Termenul de foton a fost introdus de N. Lewis în 1926.

de undă, dar care să prezinte atît aspecte corpusculare cît și ondulatorii. În acest scop, caracteristicile corpusculare, energie și impuls, se leagă de caracteristicile ondulatorii, frecvență și vector de undă, prin relațiile

$$\mathcal{E}_f = \hbar\omega \tag{9.1}$$

$$\mathbf{p}_f = \hbar\mathbf{K}. \tag{9.2}$$

Fotonii, fiind particule care se deplasează cu viteză egală cu c, nu au referențial propriu, așa încît noțiunea de masă de repaus nu are sens. În ceea ce privește masa dinamică, aceasta are valoarea

$$m_f = \hbar\omega/c^2. \tag{9.3}$$

Interacțiunea dintre un foton și un microsistem are loc cu conservarea energiei și impulsului:

$$\hbar\omega_0 + \mathcal{E}_0 = \hbar\omega + \mathcal{E} \tag{9.4 a}$$

$$\hbar\mathbf{K}_0 + \mathbf{p}_0 = \hbar\mathbf{K} + \mathbf{p}. \tag{9.4 b}$$

În particular, în cazul emisiei unui foton

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \hbar\omega \tag{9.5 a}$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \hbar\mathbf{K} \tag{9.5 b}$$

iar în cazul absorbției fotonului

$$\mathcal{E}_0 + \hbar\omega = \mathcal{E} \tag{9.6 a}$$

$$\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{K} = \mathbf{p}. \tag{9.6 b}$$

Ipoteza fotonilor s-a dovedit a fi deosebit de fertilă pentru înțelegerea a numeroase procese legate de radiația electromagnetică. Din punct de vedere istoric, prezintă interes, în primul rînd, posibilitatea explicării în cadrul acestei ipoteze a efectului fotoelectric și a efectului Compton. Mai jos, se vor discuta aceste două fenomene, precum și interpretarea lor în teoria fotonilor.

Efectul fotoelectric. Absorbția unui foton de către un electron are drept rezultat creșterea energiei electronului cu valoarea $\hbar\omega$. Ca urmare, electronul poate rămîne mai departe în sistem (atom, moleculă sau rețea cristalină), fiind însă promovat într-o altă stare (efect fotoelectric intern), sau poate fi chiar eliberat din sistem, dacă energia fotonului depășește energia de legătură a electronului în sistem (efect fotoelectric extern).

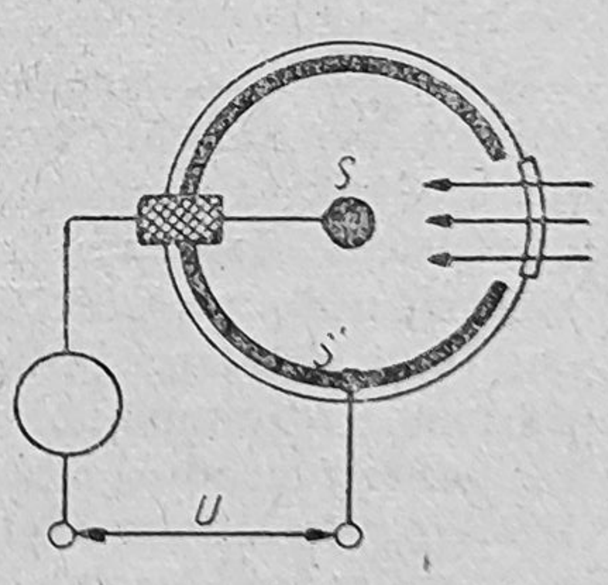


Fig. 9.1

Efectul fotoelectric extern poate fi studiat cu dispozitivul din figura 9.1. Într-un balon vidat se află electrodul S de formă sferică, înconjurat de un alt electrod S' de asemenea sferic, prevăzut cu un orificiu situat în fața ferestrei de cuarț Q. Între cei doi electrozi se stabilește o tensiune U variabilă. Iluminînd electrodul S cu radiații ultraviolete, se observă apariția unui curent electric care poate fi citit la microampermetrul conectat în circuit. Reglînd tensiunea U astfel încît să compenseze tensiunea de contact dintre metalele

electrozilor S şi S', se obţine valoarea maximă I_s a curentului (curent de saturaţie), deoarece toţi electronii emişi de S sînt captaţi de S'. Dacă, însă, se schimbă polaritatea tensiunii, între S şi S' va apare un cîmp electric de frînare a electronilor. Dacă această tensiune atinge valoarea V_f (tensiunea de frînare) pentru care lucrul forţelor electrice este egal cu energia cinetică a unui electron

$$eV_f = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

atunci curentul în circuit se anulează.

În acest fel, din determinarea tensiunii de frînare se poate calcula energia cinetică a electronilor. Se pot stabili următoarele legi ale efectului fotoelectric extern :

1°. Intensitatea curentului de saturaţie, pentru o compoziţie spectrală dată a radiaţiei, este proporţională cu fluxul intensităţii luminoase prin aria iluminată.

2°. Între tensiunea de frînare şi frecvenţa ω a radiaţiei există o relaţie liniară. Întrucît energia cinetică a electronului este egală cu energia eV_f, urmează că şi energia electronului eliberat depinde linear de ω.

3°. Există o frecvenţă ω_p, denumită prag fotoelectric, pentru care tensiunea de frînare este nulă. Radiaţiile cu frecvenţa $\omega < \omega_p$ nu produc efect fotoelectric.

4°. Efectul se stabileşte practic instantaneu.

Matematic, legea a doua şi a treia se scriu astfel

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = \text{const} \cdot (\omega - \omega_p). \tag{9.7}$$

Experimental, se constată că factorul constant din relaţia de mai sus este chiar constanta $\hbar$ a lui Planck. Relaţia de mai sus se poate rescrie :

$$\hbar\omega - A = \frac{1}{2} m_0 v^2 \tag{9.8}$$

unde $A = \hbar\omega_p$. Această relaţie se interpretează foarte simplu în teoria fotonilor. Într-adevăr, comparînd (9.6 a) cu (9.8) se vede că $-A$ este energia de legătură a electronului în sistem, iar A *lucrul de extracţie* al electronului din sistem. Interpretarea fotonică explică şi pentru ce intensitatea curentului electric este proporţională cu fluxul luminos, deoarece fiecare electron este smuls de către un foton. În sfîrşit, extracţia electronului fiind un proces între particule, fenomenul se produce practic instantaneu. Trebuie remarcat că pentru producerea efectului fotoelectric este obligatoriu ca electronul să fie legat în sistem. Într-adevăr, să presupunem că electronul ar fi liber, deci energia sa ar fi egală cu energia proprie m_0c^2. În urma absorbţiei fotonului cu energia $\hbar\omega$, energia electronului devine

$$\frac{m_0c^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = m_0c^2 + \hbar\omega$$

sau

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{1}{\beta} \frac{m_0 v}{(1 - \beta^2)^{1/2}} (1 - (1 - \beta^2)^{1/2})$$

sau

$$p = \frac{m_0 v}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{\hbar\omega}{c}\,\frac{\beta}{(1-(1-\beta^2)^{1/2}}\,. \tag{9.9}$$

Conform conservării impulsului, ar trebui să avem însă

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} \tag{9.10}$$

Dar (9.9) coincide cu (9.10) numai dacă

$$\frac{\beta}{1-(1-\beta^2)^{1/2}} = 1 \Rightarrow \beta = 1.$$

Dar pentru $\beta = 1$, $p = \infty$, adică un rezultat absurd.

Frecvența de prag ω_p este o caracteristică de material, dependentă de natura și starea superficială a electrodului din care se eliberează electronii. Pentru cele mai multe dintre metale, este situată în ultraviolet ; excepție fac metalele alcaline pentru care frecvența de prag este situată în domeniul vizibil. Valoarea redusă a lucrului de extracție $A = \hbar\omega_p$, în cazul metalelor alcaline (de la 2,4 eV pentru litiu la 0,7 eV pentru cesiu) se datorează legăturii slabe a electronului optic al acestor atomi. Contaminarea suprafeței metalice poate modifica sensibil frecvența de prag ω_p.

Se definește *randamentul* efectului fotoelectric ca raportul numărului de electroni liberați într-un anumit interval de timp, către numărul fotonilor incidenți în același interval de timp. În vecinătatea frecvenței de prag ω_p, randamentul este mic ; de exemplu la metale este de ordinul 10^{-4}. La unele metale randamentul crește monoton cu $\omega - \omega_p$, în schimb, însă, la altele — de exemplu, la metalele alcaline — există o anumită frecvență pentru care acesta ia valoarea maximă (efect fotoelectric selectiv). De exemplu, în cazul cesiului, maximul corespunde lungimii de undă de 510 nm, în cazul sodiului celei de 340 nm, iar în cazul aluminiului celei de 210 nm. Efectul selectiv este dependent de unghiul de incidență și de starea de polarizare și anume este maxim dacă vectorul **E** este plan-polarizat în planul de incidență, dar selectivitatea dispare dacă **E** este plan-polarizat într-un plan perpendicular pe planul de incidență.

În prezent se confecționează catozi complecși constînd din mai multe metale, sau din straturi semiconductoare, caracterizate printr-un randament superior celui întîlnit la metalele pure.

Efectul Compton. Acest fenomen consistă în împrăștierea radiației X, sau γ, la trecerea prin diverse substanțe, însoțită de creșterea lungimii de undă a radiației. Această creștere a lungimii de undă odată cu unghiul de împrăștiere este inexplicabilă în cadrul teoriei ondulatorii clasice. Explicarea, pe cît de simplă pe atît de exactă a acestui fenomen ca un proces de interacțiune între un foton și un electron, a constituit una dintre cele mai elocvente dovezi în favoarea ipotezei fotonilor. Cea mai simplă interpretare poate fi dată în cazul împrăștierii fotonilor pe atomi ușori, de exemplu atomi de carbon, al căror înveliș are electroni slab legați. Experimental se constată în aceste cazuri împrăștierea radiației, creșterea lungimii de undă depinzînd de unghiul de difuzie θ conform relației

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{9.11}$$

unde $\Lambda = 2{,}42626 \cdot 10^{-12}$ m este o constantă universală independentă de lungimea de undă sau de substanța pe care are loc împrăștierea.

În figura 9.2 se arată schematic împrăștierea unui foton cu energia inițială $\hbar\omega_0$ și cu impulsul inițial $\hbar\mathbf{K}_0$ pe un electron practic în repaus, deci a cărui energie este m_0c^2, iar impulsul $\mathbf{p}_0 = 0$. În urma interacțiunii, energia fotonului scade la valoarea $\hbar\omega$, iar noul impuls $\hbar\mathbf{K}$ formează cu impulsul inițial un unghi θ, care nu este altceva decît unghiul de împrăștiere a radiației. În urma interacțiunii, electronul capătă un impuls $\mathbf{p} \neq 0$, iar energia sa devine $c(p^2 + m_0^2c^2)^{1/2}$. Unghiul după care are loc împrăștierea electronului este φ.

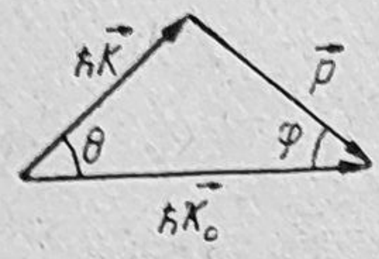


Fig. 9.2

Conservarea energiei se va scrie

$$\hbar\omega_0 + m_0c^2 = \hbar\omega + c(p^2 + m_0^2c^2)^{1/2} \tag{9.12}$$

iar conservarea impulsului

$$\hbar\mathbf{K}_0 = p + \hbar\mathbf{K} \tag{9.13}$$

Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată și ținînd seama că $K_0 = \omega_0/c$, $K = \omega/c$ rezultă

$$p^2 = \left(\frac{\hbar}{c}\right)^2 (\omega_0^2 + \omega^2 - 2\,\omega\omega_0 \cos\theta) \tag{9.14}$$

sau

$$p^2 = \left(\frac{\hbar}{c}\right)^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + 2\omega\omega_0(1 - \cos\theta)]. \tag{9.15}$$

Din (9.12) putem scrie de asemenea

$$p^2 = \left(\frac{\hbar}{c^2}\right)(\omega - \omega_0)^2 + 2m_0\hbar(\omega_0 - \omega) \tag{9.16}$$

și eliminînd p^2 între (9.15) și (9.16) găsim

$$\hbar(\omega_0 - \omega) = \frac{\hbar^2\omega_0\omega}{m_0c^2}(1 - \cos\theta). \tag{9.17}$$

Din această relație deducem imediat energia fotonului după împrăștiere

$$\hbar\omega = \frac{\hbar\omega_0}{1 + \dfrac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)} \tag{9.18}$$

Pe de altă parte, ținînd seama că

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\pi c\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}\right)$$

din (9.17) rezultă

$$\Delta\lambda = 2\,\frac{2\pi\hbar}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{9.19}$$

Am regăsit astfel teoretic relația (9.11). Constanta calculată teoretic

$$\Lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c} \tag{9.20}$$

coincide cu cea determinată experimental. Din (9.20) se vede că un foton cu lungimea de undă Λ ar avea impulsul

$$P = \hbar \frac{2\pi}{\Lambda} = m_0 c$$

și masa dinamică P/c identică cu masa de repaus a electronului. Constanta Λ se numește și lungime de undă Compton a electronului.

Teoria prevede și împrăștierea electronului sub un unghi φ, a cărui valoare se obține ușor, dacă ținem seama (vezi fig. 9.2) că proiecțiile impulsului pe direcția lui $\mathbf{K}_0$ și pe direcția perpendiculară la $\mathbf{K}_0$ sînt

$$\frac{\hbar\omega_0}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}\cos\theta + p\cos\varphi \tag{9.21}$$

$$0 = \frac{\hbar\omega}{c}\sin\theta - p\sin\varphi.$$

De aici obținem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{\omega_0}{\omega} - \cos\theta}.$$

Introducînd valoarea lui ω_0/ω dată de (9.18), după cîteva transformări simple se obține

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}}{1 + \frac{\Lambda}{\lambda}}. \tag{9.22}$$

Electronii de recul împrăștiați sub unghiul φ, prezișI de teoria fotonică, au fost observați ulterior și experimental de către C.T.R. Wilson, în camera cu ceață.

9.2. Descompunerea cîmpului electromagnetic într-un sistem de oscilatori

Verificările experimentale ale ipotezei fotonilor constituie o dovadă de netăgăduit a structurii atomiste a cîmpului electromagnetic, iar prezența constantei $\hbar$ a lui Planck în relațiile de legătură dintre energie și frecvență, respectiv dintre impuls și vectorul de undă, arată în mod incontestabil caracterul cuantic al fotonilor. În vederea stabilirii unei teorii cuantice consecvente a radiației electromagnetice este necesar să exprimăm matematic starea cîmpului electromagnetic într-o formă adecvată folosirii formalismului meca-

nicii cuantice. În acest scop, în paragraful de faţă se va da descompunerea *clasică* a cîmpului electromagnetic într-un sistem de oscilatori, urmînd ca în paragraful următor să aplicăm acestui sistem regulile mecanicii cuantice şi să schiţăm astfel teoria cuantică a radiaţiei.

Fie $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ potenţialul vectorial al cîmpului electromagnetic în vid. Admiţînd condiţia de etalonare Coulomb $\nabla \mathbf{A} = 0$, potenţialul scalar V nu depinde de timp, astfel încît ecuaţia de propagare capătă forma $\Box_c \mathbf{A} = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii sînt de forma

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} \exp(i\mathbf{Kr})$$

unde

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} = |\mathbf{a}_{0\mathbf{k}}| \exp[i(\varphi_\mathbf{k} - \omega_\mathbf{k} t)], \quad \omega_\mathbf{k} = c|\mathbf{K}|.$$

Formăm soluţia particulară

$$\mathbf{A}_\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_\mathbf{k} \exp(i\mathbf{Kr}) + \mathbf{a}_\mathbf{k}^* \exp(-i\mathbf{Kr}|. \tag{9.23}$$

Utilizînd etalonarea Coulomb şi observînd că în acest caz valoarea proprie a operatorului $i\nabla$ este $-\mathbf{K}$, obţinem

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{k} \exp(i\mathbf{Kr}) - \mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{k}^* \exp(-i\mathbf{Kr}) = 0. \tag{9.24}$$

Această ecuaţie trebuie să fie satisfăcută identic oricare ar fi $\mathbf{r}$. De aici urmează

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{k} = 0, \ \mathbf{K}\mathbf{a}_\mathbf{k}^* = 0 \Rightarrow \mathbf{K}\mathbf{A}_\mathbf{k} = 0. \tag{9.25}$$

Întrucît $\mathbf{A}_\mathbf{k}$ este perpendicular pe direcţia de propagare, urmează că acest vector se poate descompune în două componente $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}$, (unde $\sigma = 1, 2$), plan-polarizate în plane perpendiculare. Suprapunînd aceste soluţii obţinem

$$\mathbf{A}_\mathbf{k} = \sum_\sigma \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma} = \sum_\sigma (\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} \exp(i\mathbf{Kr}) + \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \exp(-i\mathbf{Kr})) \tag{9.26}$$

K_x, K_y, K_z putînd lua o mulţime continuăm de valori.

Vom împărţi acum întregul spaţiu în volume finite de formă paralelipipedică de laturi l_1, l_2, l_3, cu pereţi ideali reflectanţi. Întrucît toate aceste paralelipipede sînt echivalente, rezultă condiţiile

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(x, y, z, t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(x + l_1, y, z, t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(x, y + l_2, z, t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(x, y, z + l_3, t)$$

Aceste condiţii implică

$$\exp(iK_x l_1) = \exp(iK_y l_2) = \exp(iK_z l_3) = 1$$

adică

$$K_x = \frac{2\pi}{l_1} n_1, \quad K_y = \frac{2\pi}{l_2} n_2, \quad K_z = \frac{2\pi}{l_3} n_3 \tag{9.27}$$

unde $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$. Atragem atenţia că o astfel de împărţire a spaţiului nu este decît un artificiu matematic. Ne propunem acum să calculăm energia cîmpului electromagnetic din volumul $V = l_1 l_2 l_3$. În acest scop, calculăm mai întîi componentele $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}$ ale intensităţii cîmpului electric

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}}{\partial t} = i\omega_\mathbf{k}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} \exp(i\mathbf{Kr}) - \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* \exp(-i\mathbf{Kr})]$$

de unde rezultă energia cîmpului electric

$$W_c = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \mathbf{E}^2\,dV =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left\{\sum_{\mathbf{k},\,\sigma} \omega_{\mathbf{k}}[\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\exp(i\mathbf{Kr}) - \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}\exp(-i\mathbf{Kr})]\right\}^2 dV.$$

Prin dezvoltarea patratului de sub semnul integralei rezultă combinaţii de integrale de forma

$$\int_0^{l_1} \exp[iK_i(n_i \pm n_i')]x_i dx = \begin{cases} 0 & n_i \pm n_i' \neq 0 \\ l_i & n_i \pm n_i' = 0. \end{cases}$$

Se obţine în final

$$W_e = \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},\,\sigma} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}. \tag{9.28}$$

În ceea ce priveşte energia cîmpului magnetic

$$W_m = \frac{\mu_0}{2}\int_V \mathbf{H}^2 dV. \tag{9.29}$$

Însă, deoarece $\varepsilon_0^{1/2}E = \mu_0^{1/2}H$, rezultă $W_m = W_e$, astfel că energia electromagnetică a cîmpului cuprins în volumul V va fi

$$W = 2W_e = 2\varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},\,\sigma} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}. \tag{9.30}$$

Introducem acum un sistem de variabile canonice $\mathbf{Q}_{k\sigma}$ şi $\mathbf{P}_{k\sigma}$ denumite coordonate normale şi definite prin relaţiile

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}\sigma} = \alpha(\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}\sigma}) \tag{9.31}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}\sigma} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}\sigma} = -i\omega_{\mathbf{k}}\alpha(a_{\mathbf{k}\sigma} - a^*_{\mathbf{k}\sigma}) \tag{9.32}$$

unde α este o constantă care urmează a fi precizată ulterior. Să calculăm expresiile

$$P^2_{\mathbf{k}\sigma} = -\omega^2_{\mathbf{k}}\alpha^2(a^2_{\mathbf{k}\sigma} + a^{*2}_{\mathbf{k}\sigma}) + 2\omega^2_{\mathbf{k}}\alpha^2 a_{\mathbf{k}\sigma}a^*_{\mathbf{k}\sigma}$$

$$\omega^2_{\mathbf{k}}Q^2_{\mathbf{k}\sigma} = \omega^2_{\mathbf{k}}\alpha^2(a^2_{\mathbf{k}\sigma} + a^{*2}_{\mathbf{k}\sigma}) + 2\omega^2_{\mathbf{k}}\alpha^2 a_{\mathbf{k}\sigma}a^*_{\mathbf{k}\sigma}$$

de unde prin adunare găsim

$$P^2_{\mathbf{k}\sigma} + \omega^2_{\mathbf{k}}Q^2_{\mathbf{k}\sigma} = 4\omega^2_{\mathbf{k}}\alpha^2 a_{\mathbf{k}\sigma}a^*_{\mathbf{k}\sigma}. \tag{9.33}$$

Alegînd pentru α valoarea

$$\alpha = (\varepsilon_0 V)^{1/2} \tag{9.34}$$

se obţine

$$H = W = \sum_{\mathbf{k},\,\sigma} \frac{1}{2}(P^2_{\mathbf{k}\sigma} + \omega^2_{\mathbf{k}}Q^2_{\mathbf{k}\sigma}). \tag{9.35}$$

În formalismul mecanicii analitice, funcția $H(\{\mathbf{P}_{k\sigma}\}, \{\mathbf{Q}_{k\sigma}\})$ este hamiltoniana sistemului, în cazul sistemelor conservative această funcție coincizînd cu energia. Din (9.31), (9.32) și (9.35) rezultă ușor că

$$\dot{\mathbf{P}}_{k\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}_{k\sigma}}; \quad \dot{\mathbf{Q}}_{k\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_{k\sigma}} \tag{9.36}$$

adică variabilele $\mathbf{P}_{k\sigma}$ și $\mathbf{Q}_{k\sigma}$ sînt chiar variabilele canonice ale sistemului, întrucît satisfac ecuațiile lui Hamilton. Observăm că (9.35) se poate pune sub forma

$$H = \sum_{k,\,\sigma} H_{k\sigma} \tag{9.37}$$

$$H_{k\sigma} = \frac{1}{2}(P_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{k\sigma}^2). \tag{9.38}$$

$H_{k\sigma}$ exprimă energia unui oscilator armonic de frecvență ω_k. Așadar, sistemul continuu cîmp electromagnetic s-a descompus într-o mulțime numerabilă de oscilatori armonici de frecvență ω_k. Mai observăm că în expresia (9.35) volumul V nu mai apare.

Vom calcula acum impulsul $\mathbf{G}$ al cîmpului electromagnetic care ocupă volumul V. Așa cum se știe din electrodinamică

$$\mathbf{G} = \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV. \tag{9.39}$$

Ținînd seama că, în conformitate cu etalonarea Coulomb,

$$\mathbf{E}_k = -\frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_k = \nabla \times \mathbf{A}_k \tag{9.40}$$

după efectuarea calculelor rezultă

$$\mathbf{G} = \sum_{k,\sigma} \mathfrak{g}_{k,\sigma} \tag{9.41}$$

unde

$$\mathfrak{g}_{k,\sigma} = \frac{1}{2c}(P_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{k\sigma}^2)\mathbf{1}_k. \tag{9.42}$$

9.3. Cuantificarea cîmpului electromagnetic

În conformitate cu principiul de corespondență, în mecanica cuantică fiecărei variabile dinamice clasice îi corespunde o observabilă, adică un operator hermitean cu un sistem complet de ket proprii. Vom asocia așadar variabilelor clasice $\mathbf{P}_{k\sigma}$, $\mathbf{Q}_{k\sigma}$, H și $\mathbf{G}$, observabilele $\hat{\mathbf{P}}_{k\sigma}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{k\sigma}$, $\hat{H}$ și $\hat{\mathbf{G}}$. În conformitate cu condițiile cuantice fundamentale, coordonatele normale $\hat{\mathbf{P}}_{k\sigma}$ și $\hat{\mathbf{Q}}_{k\sigma}$ satisfac următoarele relații

$$[\hat{\mathbf{P}}_{k\sigma}, \hat{\mathbf{P}}_{k'\sigma'}] = [\hat{\mathbf{Q}}_{k\sigma}, \hat{\mathbf{Q}}_{k'\sigma'}] = 0 \tag{9.43}$$

$$[\hat{\mathbf{P}}_{k\sigma}, \hat{\mathbf{Q}}_{k'\sigma'}] = \frac{\hbar}{i}\delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{9.44}$$

unde $\hbar$ este constanta lui Planck, δ_{ij} simbolul Kronecker, iar i simbolul imaginar. Relaţia (9.37) se transcrie cuantic sub forma

$$\hat{H} = \sum_{k,\sigma} \hat{H}_{k\sigma} \tag{9.45}$$

unde hamiltonianul fiecărui oscilator este

$$\hat{H}_{k\sigma} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2_{k\sigma} + \omega_k^2 \hat{Q}^2_{k\sigma}). \tag{9.46}$$

Analog, expresia operatorului impuls se va scrie

$$\hat{G} = \frac{1}{2c}\sum_{k,\sigma}(\hat{Q}^2_{k\sigma} + \omega_k^2 \hat{Q}^2_{k\sigma}). \tag{9.47}$$

Ne propunem să aflăm valorile proprii ale energiei fiecărui oscilator. În acest scop vom introduce operatorii

$$\hat{a}^+_{k\sigma} = (2\hbar\omega_k)^{-1/2}(\hat{P}_{k\sigma} + i\omega_k \hat{Q}_{k\sigma}) \tag{9.48}$$

$$\hat{a}_{k\sigma} = (2\hbar\omega_k)^{-1/2}(\hat{P}_{k\sigma} - i\omega_k \hat{Q}_{k\sigma}). \tag{9.49}$$

Se verifică uşor că aceşti operatori satisfac relaţiile de comutare

$$[\hat{a}_{k\sigma}, \hat{a}^+_{k'\sigma'}] = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'} \tag{9.50}$$

$$[\hat{a}^+_{k\sigma}, \hat{a}^+_{k'\sigma'}] = 0 \tag{9.51}$$

$$[\hat{a}_{k\sigma}, \hat{a}_{k\sigma}] = 0. \tag{9.52}$$

Ţinînd seama de (9.46) se poate constata că

$$\hat{H}_{k\sigma} = \frac{1}{2}\hbar\omega_k(\hat{a}_{k\sigma}\hat{a}^+_{k\sigma} + \hat{a}^+_{k\sigma}\hat{a}_{k\sigma}). \tag{9.53}$$

Introducem observabila

$$\hat{N}_{k\sigma} = \hat{a}^+_{k\sigma}\hat{a}_{k\sigma} = \hat{N}^+_{k\sigma} \tag{9.54}$$

denumită, pentru motive care vor reieşi ceva mai departe, operatorul *numărului de ocupare*. Ţinînd seamă de relaţia de comutare (9.50), putem rescrie (9.53) sub forma

$$\hat{H}_{k\sigma} = \hbar\omega_k\left(\hat{N}^+_{k\sigma} + \frac{1}{2}\right). \tag{9.55}$$

Analog vom scrie

$$\hat{\mathcal{H}}_k = \frac{1}{c}\hat{H}_{k\sigma}\mathbf{1}_k = \frac{\hbar\omega_k}{c}\left(\hat{N}_{k\sigma} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{1}_k. \tag{9.56}$$

Pentru întregul sistem de oscilatori vom obține

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) \tag{9.57}$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \left(\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) \hbar\mathbf{K} \tag{9.58}$$

unde s-a ținut seama de relația $K = \omega_{\mathbf{k}}/c$.

Mulțimea operatorilor $\hat{H}_{\mathbf{k}\sigma}$, $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}\sigma}$, $\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma}$ formează un sistem complet de observabile comutative ale cîmpului electromagnetic, care admite un același sistem de keți proprii ortonormați $| \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle$. Rezultă ecuația cu valori proprii ale observabilei $\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma}$

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = \nu_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle. \tag{9.59}$$

În conformitate cu (9.50)

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} = \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{1}.$$

Multiplicînd la stînga cu $\mathbf{a}^{+}_{\mathbf{k}\sigma}$ și observînd că $\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} = \mathbf{a}^{+}_{\mathbf{k}\sigma}\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}$, urmează că

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} = \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} (\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} + 1)$$

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} \{ \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle \} = \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} (\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} + 1) | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = (\nu_{\mathbf{k}\sigma} + 1) \{ \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle \}.$$

Cum însă, pe de altă parte,

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} + 1 \rangle = (\nu_{\mathbf{k}\sigma} + 1) | \nu_{\mathbf{k}\sigma} + 1 \rangle \tag{9.60}$$

rezultă că vectorii proprii $\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle$ și $| \nu_{\mathbf{k}\sigma} + 1 \rangle$ au aceeași valoare proprie, deci descriu aceeași stare proprie nediferind între ei decît printr-o constantă multiplicativă

$$\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = \text{const} \, | \nu_{\mathbf{k}\sigma} + 1 \rangle. \tag{9.61}$$

$\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma}$ este un *operator de ridicare*, deoarece ridică starea de la cea descrisă de ketul $| \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle$ la cea descrisă de ketul $| \nu_{\mathbf{k}\sigma} + 1 \rangle$. Aplicînd de m ori operatorul $\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma}$ găsim

$$(\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma})^m | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = \text{const} \, | \nu_{\mathbf{k}\sigma} + m \rangle \tag{9.62}$$

adică se obține o stare aparținînd unei valori proprii cu m unități mai mare.

Pentru a înțelege semnificația operatorilor $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma}$, observăm că

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} \{ \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle \} = \nu_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle. \tag{9.63}$$

Dar $\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma}$ este operator de ridicare

$$\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} - 1 \rangle = \text{const} \, | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle. \tag{9.64}$$

Din compararea relațiilor (9.63) și (9.64) rezultă

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma} | \nu_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = \text{const} \, | \nu_{\mathbf{k}\sigma} - 1 \rangle \tag{9.65}$$

adică $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma}$ este un *operator de coborîre.* Aplicînd de m ori acest operator unu: ket propriu $|\nu_{\mathbf{k}\sigma}\rangle$, ar urma să obţinem ketul $|\nu_{\mathbf{k}\sigma} - m\rangle$

$$(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma})^m \mid \nu_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = \text{const} \mid \nu_{\mathbf{k}\sigma} - m\rangle.$$

m este supus însă restricţiei $m \leqslant \nu_{\mathbf{k}\sigma}$. Într-adevăr, norma

$$\langle \nu_{\mathbf{k}\sigma} - m \mid \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma} \mid \nu_{\mathbf{k}\sigma} - m\rangle \geqslant 0$$

este strict pozitivă. Pe de altă parte, însă, $\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}\sigma} = \hat{N}_{\mathbf{k}\sigma}$, aşa încît

$$\langle \nu_{\mathbf{k}\sigma} - m \mid \hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} \mid \nu_{\mathbf{k}\sigma} - m\rangle = (\nu_{\mathbf{k}\sigma} - m)\langle \nu_{\mathbf{k}\sigma} - m \mid \nu_{\mathbf{k}\sigma} - m\rangle \geqslant 0.$$

Această condiţie nu este însă îndeplinită decît numai dacă

$$m \leqslant \nu_{\mathbf{k}\sigma}.$$

De aici rezultă că valoarea proprie minimă a operatorului $\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma}$ este valoarea zero, această stare proprie fiind descrisă de ketul $|0_{\mathbf{k}\sigma}\rangle$. Ceilalţi keţi proprii se construiesc aplicînd succesiv operatorul de ridicare

$$|0_{\mathbf{k}\sigma}\rangle, |1_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = \hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma} \mid 0_{\mathbf{k}\sigma}\rangle, \ \ldots \mid (m+1)_{\mathbf{k}\sigma}\rangle = (\hat{\mathbf{a}}^{+}_{\mathbf{k}\sigma})^{m+1} \mid 0_{\mathbf{k}\sigma}\rangle, \ \ldots$$

în felul acesta obţinîndu-se sistemul complet de keţi proprii $|n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle$. Vom introduce acum ketul care descrie starea întregului sistem de oscilatori. Acest ket este dat de produsul direct al keţilor care descriu starea fiecărui oscilator în parte

$$|\ldots n_{\mathbf{k}\sigma}\ldots.\rangle = |n_{11}\rangle \mid n_{12}\rangle \mid n_{21}\rangle \mid n_{22})\ldots| n_{\mathbf{k}1}\rangle \mid n_{\mathbf{k}2}\rangle \ldots$$

Keţii $|\ldots n_{\mathbf{k}\sigma}\ldots\rangle$ subîntind spaţiul produs

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{11}\otimes\mathcal{E}_{12}\otimes\mathcal{E}_{21}\otimes\mathcal{E}_{22}\otimes\ldots\otimes\mathcal{E}_{k1}\otimes\mathcal{E}_{k2}\otimes\ldots$$

Spaţiul $\mathcal{E}$ se numeşte *spaţiul numerelor de ocupare.*

Să introducem acum operatorul

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hat{N}_{\mathbf{k}\sigma}. \tag{9.66}$$

şi să îl aplicăm ketului $|\ldots n_{\mathbf{k}\sigma}\ldots\rangle$

$$\hat{N} \mid \ldots n_{\mathbf{k}\sigma}\ldots\rangle = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} \mid \ldots n_{\mathbf{k}\sigma}\ldots\rangle$$

$$= \sum_{\mathbf{k},\sigma} n_{\mathbf{k}\sigma} \mid \ldots n_{\mathbf{k}\sigma}\ldots\rangle$$

unde $n_{\mathbf{k}\sigma} \in \mathbb{N}$ este valoarea proprie căreia îi aparţine ketul $|n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle$. În ceea ce priveşte ecuaţia cu valori proprii a hamiltonianului cîmpului, aceasta se scrie

$$\hat{H} \mid \ldots n_{\mathbf{k}\sigma}\ldots\rangle = \mathcal{E} \mid \ldots n_{\mathbf{k}\sigma}\ldots\rangle \tag{9.67}$$

Ţinînd seama de (9.45), (9.55) şi (9.66) se obţine valoarea proprie a energiei cîmpului

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k},\sigma}\left(n_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{\mathbf{k}}. \tag{9.68}$$

În mod analog, rezultă valoarea proprie a impulsului cîmpului

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \left(n_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) \hbar \mathbf{K}. \tag{9.69}$$

Interpretarea stărilor descrise de keții $| \ldots n_{\mathbf{k}\sigma} \ldots \rangle$. Să considerăm un sistem de bosoni cu starea de polarizare σ precizată și cu energia și impulsul

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}$$

$$p_{\mathbf{k}\sigma} = \hbar \mathbf{K}_{\sigma}.$$

Acești bosoni sînt chiar particulele introduse de către Einstein în cadrul ipotezei fotonilor și, după cum se vede din relațiile de mai sus, întrucît $K = \omega_{\mathbf{k}} / c$, rezultă că aceste particule se deplasează cu viteza c. Așadar, aceste particule nu posedă referențial propriu. Numărul $n_{\mathbf{k}\sigma}$ exprimă numărul fotonilor care se găsesc în starea cu energia $\varepsilon_{\mathbf{k}}$, impulsul $\mathbf{p}_{\mathbf{k}\sigma}$ și polarizarea σ. Energia fotonilor care se află în această stare

$$\mathcal{E}^{f}_{\mathbf{k}\sigma} = n_{\mathbf{k}\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}}$$

este valoarea proprie a operatorului hamiltonian

$$\hat{H}^{f}_{\mathbf{k}\sigma} \, | \, n_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = n_{\mathbf{k}\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \, | \, n_{\mathbf{k}\sigma} \rangle. \tag{9.70}$$

Keții proprii ai acestui operator au următoarea semnificație: ketul $| \, 0_{\mathbf{k}\sigma} \rangle$ descrie acea stare a cîmpului în care nu se află *nici un foton* cu frecvența $\omega_{\mathbf{k}}$, vectorul de undă $\mathbf{K}$ și starea de polarizare σ; ketul $| \, 1_{\mathbf{k}1} \rangle$ descrie acea stare în care se află un singur foton cu frecvența $\omega_{\mathbf{k}}$, vectorul de undă $\mathbf{K}$ și starea de polarizare $\sigma = 1$; în general, un ket $| \, n_{\mathbf{k}\sigma} \rangle$ descrie acea stare în care se găsesc n fotoni cu frecvența $\omega_{\mathbf{k}}$, vectorul de undă $\mathbf{K}$ și starea de polarizare σ. Atunci, ketul $| \ldots n_{\mathbf{k}\sigma} \ldots \rangle$ descrie acea stare în care n_{11} fotoni au frecvența ω_1, vectorul de undă $\mathbf{K}_1$, polarizarea $\sigma = 1$

n_{12} „ „ „ ω_1 „ „ „ $\mathbf{K}_1$, „ $\sigma = 2$
n_{21} „ „ „ ω_2 „ „ „ $\mathbf{K}_2$, „ $\sigma = 1$
n_{22} „ „ „ ω_2 „ „ „ $\mathbf{K}_2$, „ $\sigma = 2$
. . . . . .
n_{σ} „ „ „ $\omega_{\mathbf{k}}$ „ „ „ $\mathbf{K}$ „ σ
. . . . . .

Dacă vom compara acum relația (9.67) cu relația (9.70) vom observa că

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hat{H}^{f}_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} = \hat{H}^{f} + \hat{H}^{\circ}. \tag{9.71}$$

$\hat{H}^{\circ}$ descrie energia cîmpului electromagnetic în starea în care *nu există nici un foton*. Această stare se mai numește și *starea de vid* a cîmpului electromagnetic. Existența energiei stării de vid, deși paradoxală, constituie un fapt justificat nu numai teoretic, dar și experimental, variate experimente punînd în mod

neîndoielnic în evidenţă interacţiunea electronilor cu cîmpul vidului. Pe de altă parte, întrucît vectorul de undă K poate lua o infinitate de valori, ar rezulta că energia vidului este infinită. Astfel de dificultăţi ale teoriei cuantice a radiaţiei ne arată că în fond această teorie nu este încă încheiată.

În concluzie aşadar, cîmpul electromagnetic se prezintă din punctul de vedere cuantic ca un ansamblu de bosoni (fotoni) cu energia $\varepsilon_k = \hbar\omega_k$ şi impulsul $p_\sigma = \hbar K_\sigma$. Emisia fiecărui foton este descrisă de operatorul $\hat{a}^+_{k\sigma}$, care face să crească $n_{k\sigma}$ cu o unitate, în timp ce absorbţia unui foton este descrisă de operatorul $\hat{a}_{k\sigma}$, care face ca $n_{k\sigma}$ să scadă cu o unitate.

9.4. Spinul fotonilor şi starea de polarizare

Caracterul bosonic al fotonilor este pus în evidenţă în primul rînd prin aceea că pe un acelaşi nivel de energie se poate găsi un număr oricît de mare de fotoni. Se admite că spinul fotonilor este întreg, iar numărul cuantic $l_s = 1$. Ar urma de aici ca numărul cuantic de spin m_s să ia valorile 1, 0, -1. Cu toate acestea, fotonul nu se poate găsi decît în două stări de spin, pentru care $m_s = \pm 1$, starea $m_s = 0$ fiind interzisă. Într-adevăr, fotonul fiind o particulă care se deplasează cu viteza plafon c, nu posedă referenţial propriu, astfel că în mişcarea sa există o singură axă de simetrie, dată de direcţia vectorului $c\mathbf{1}_k$. În raport cu această axă, fotonul nu se poate găsi, decît ori în starea cu elicitatea $\mathcal{H} = +1$, descrisă de numărul cuantic $m_s = 1$, cînd sensul proiecţiei spinului coincide cu sensul de deplasare al fotonului, ori în starea cu elicitatea $\mathcal{H} = -1$ descrisă de numărul cuantic $m_s = -1$, cînd sensul proiecţiei spinului este opus sensului de deplasare al fotonului. În termeni macroscopici, am putea spune că fotonul în starea cu $m_s = +1$ este „polarizat circular stînga“, iar în starea cu $m_s = -1$, este „polarizat circular dreapta“. O altă stare de spin nu poate exista, aşa încît starea $m_s = 0$ este interzisă. Aşadar se poate construi sistemul complet de stări proprii de spin descris de keţii ortogonali

$$|m_s = +1\rangle, \quad |m_s = -1\rangle. \tag{9.72}$$

Din aceste stări se poate obţine un alt sistem complet de stări proprii folosind principiul din mecanica cuantică denumit principiul suprapunerii

$$|1\rangle = |m_s = +1\rangle + |m_s = -1\rangle$$
$$|2\rangle = |m_s = +1\rangle - |m_s = -1\rangle. \tag{9.73}$$

Starea descrisă de ketul $|1\rangle$ constînd din suprapunerea unei stări de „polarizare circulară stînga“ peste o stare de „polarizare circulară dreapta“ este o stare „plan-polarizată“ după direcţia ξ, în timp ce starea descrisă de ketul $|2\rangle$ este o stare de asemenea „plan-polarizată“ dar după o direcţie η, ortogonală la direcţia ξ. Ortogonalitatea vectorilor de stare $|1\rangle$ şi $|2\rangle$ rezultă de altfel imediat din (9.73) dacă se ţine seama de ortonormarea vectorilor $|m_s = +1\rangle$ şi $|m_s = -1\rangle$.

Obținerea stărilor plan-polarizate $|1\rangle$ și $|2\rangle$ din suprapunerea stărilor $|m_s = +1\rangle$ și $|m_s = -1\rangle$ este arătată intuitiv în figura 9.3. În figura 9.4 se arată intuitiv orientarea vectorilor $|1\rangle$ și $|2\rangle$. Vectorii $|1\rangle$ și $|2\rangle$ formează de asemenea un sistem complet de keți proprii. Existența acestui sistem de stări proprii poate fi pusă în evidență în mod experimental trecînd un fascicul

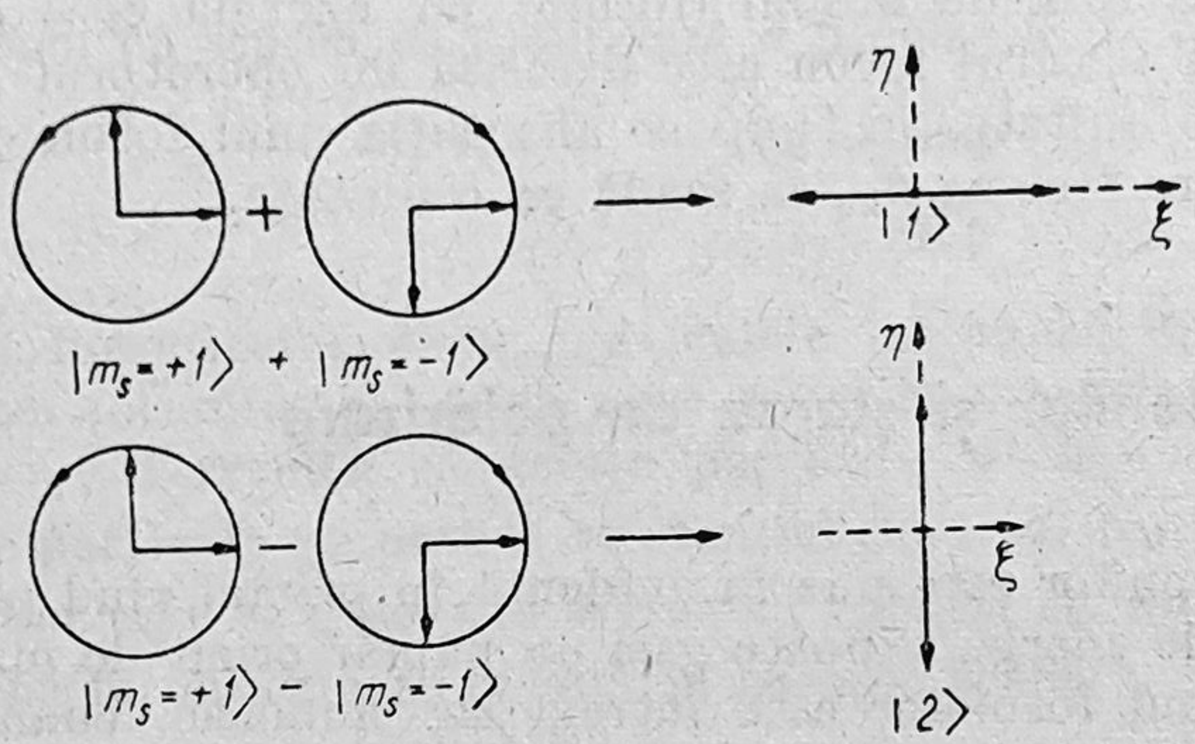


Fig. 9.3

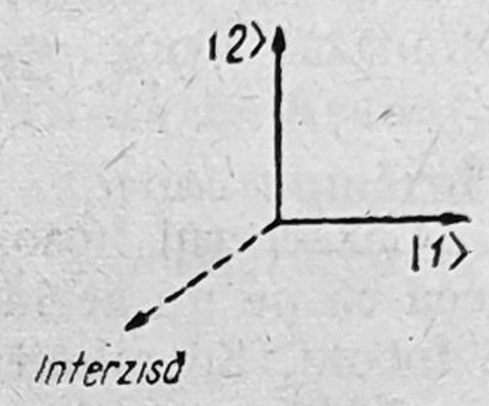


Fig. 9.4

de fotoni (macroscopic vorbind, o undă luminoasă) printr-un dispozitiv de polarizare, de exemplu un nicol sau un polaroid. Indiferent de starea fotonului, în urma operației de observare cu un astfel de dispozitiv, fotonul va trece în una din cele două stări proprii : plan-polarizat în planul principal al nicolului, respectiv plan-polarizat într-un plan perpendicular pe planul principal al nicolulului. Din aceste două stări se pot construi toate stările posibile de polarizare ale unui foton.

Stări pure. Fie o stare pură a unui foton, adică o stare asupra căreia avem informația completă, atît în ceea ce privește amplitudinea cît și în ceea ce privește faza. O astfel de stare, descrisă de un ket $|\Phi\rangle$ poate fi exprimată, în cazul general, prin suprapunerea

$$|\Phi\rangle = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle = \sum_{m=1,2} a_m |m\rangle \tag{9.74}$$

unde a_m sînt coeficienții Fourier generalizați.

Operatorul densității va avea în cazul unor astfel de stări pure expresia

$$\hat{\rho} = |\Phi\rangle \langle\Phi| = \sum_{m=1,2} \sum_{n=1,2} a_m |m\rangle \langle n| a_n^*. \tag{9.75}$$

În particular, în cazul celor două stări proprii, operatorul densității se scrie

$$\hat{\rho}_1 = |a_1|^2 |1\rangle \langle 1|, \quad \hat{\rho}_2 = |a_2|^2 |2\rangle \langle 2| \tag{9.76}$$

Dacă se reprezintă $\hat{\rho}$, chiar în baza ortonormată formată din vectori proprii $|1\rangle$ și $|2\rangle$, se obține matricea densității, a cărei expresie, pentru stările pure, este

$$\rho_{ij} = \langle i | \Phi\rangle \langle \Phi | j\rangle$$
$$= \sum_{m=1,2} \sum_{n=1,2} a_m \langle i | m\rangle \langle n | j\rangle a_n^*$$

sau, ținînd seama de ortonormarea stărilor proprii ($\langle r \mid s \rangle = \delta_{rs}$,

$$\rho_{ij} = a_i a_j^*. \tag{9.77}$$

Scriind coeficienții Fourier sub forma $a_{i,j} = \mid a_{i,j} \mid \exp(i\delta_{i,j})$ și punînd $\delta = \delta_2 - \delta_1$, matricea densității pentru stările pure se scrie

$$\rho = \begin{pmatrix} \mid a_1 \mid^2 & \mid a_1 \mid\mid a_2 \mid \exp(-i\delta \mid \\ \mid a_1 \mid\mid a_2 \mid \exp(i\delta) & \mid a_2 \mid^2 \end{pmatrix}. \tag{9.78}$$

Comparînd (9.78) cu (3.19) se poate observa identitatea expresiilor matricei densității pentru stările fotonului și a matricei de polarizare macroscopice. Mai rezultă semnificația profundă a parametrilor Stokes, care se pot defini nu numai pentru stările de polarizare macroscopice, dar și pentru stările de polarizare a fotonilor.

În cazul stărilor mixte, operatorul densității se scrie

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} \mid \Phi_\alpha \rangle P_\alpha \langle \Phi_\alpha \mid \tag{9.79}$$

unde P_α este ponderea stării descrise de $\mid \Phi_\alpha \rangle$ în amestecul de stări. Efectuînd un calcul analog celui folosit în cazul stărilor pure, obținem pentru elementele matricei densității expresii de forma

$$\rho_{ij} = \sum_{\alpha} \langle i \mid \Phi_\alpha \rangle P_\alpha \langle \Phi_\alpha \mid j \rangle$$

$$= \sum_{\alpha} P_\alpha a_{\alpha i} a_{\alpha j}^*$$

adică

$$\rho_{ij} = \langle a_i a_j^* \rangle \tag{9.80}$$

relație analogă cu matricea de polarizare (3.27).

10. TRANZIȚII CUANTICE

10.1. Probabilitatea de tranziție

Să considerăm un sistem cuantic al cărui hamiltonian $\hat{H}^\circ$ posedă un spectru discret nedegenerat de valori proprii $\mathcal{E}_n$, fiecărei valori aparținîndu-i ketul propriu ortonormat $\mid \psi_n \rangle$

$$\hat{H}^\circ \mid \psi_n \rangle = \mathcal{E}_n \mid \psi_n \rangle. \tag{10.1}$$

Vom presupune că, la orice moment $t < t_0 = 0$, sistemul se găsește într-o stare proprie (n). Măsurînd energia acestei stări vom obține cu certitudine

valoarea proprie $\mathcal{E}_n$. Vom admite acum că la $t_0 = 0$ se aplică o perturbație dependentă de timp care transferă sistemului energia $W(t)$. În acest caz, hamiltonianul sistemului devine

$$\hat{H} = \hat{H}^\circ + \lambda \hat{W}(t) \tag{10.2}$$

unde $W(t)$ este operatorul energiei transferate de perturbație, iar $\lambda \in [0, 1]$ un parametru. Pentru $\lambda = 0$ sîntem în cazul problemei neperturbate, iar pentru $\lambda = 1$ în cazul problemei perturbate. Sub acțiunea perturbației, sistemul evoluează astfel că la momentul t ajunge într-o altă stare, descrisă de ketul $|\psi\rangle$. Această stare poate fi considerată ca o suprapunere de stări proprii ale hamiltonianului neperturbat

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k(t) |\psi_k\rangle. \tag{10.3}$$

Atragem atenția că evoluția stării în timp este în acest mod specificată de coeficienții Fourier generalizați $c_k(t)$. Măsurînd acum energia la momentul t, vom obține pentru aceasta una din valorile proprii

$$[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_k, \ldots, \mathcal{E}_m, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$$

ale hamiltonianului $\hat{H}^\circ$. Dacă energia măsurată la t_0 este $\mathcal{E}_n$, iar cea măsurată la t este $\mathcal{E}_m$, atunci spunem că sistemul a efectuat o *tranziție cuantică* între starea (n) și starea (m). Mărimea caracteristică tranziției este probabilitatea de tranziție. Pentru a defini această mărime, observăm mai întîi că evoluția sistemului între t_0 și t poate fi descrisă de relația

$$|\psi\rangle = \hat{T}(t, t_0) |\psi_n\rangle \tag{10.4}$$

unde $\hat{T}(t, t_0)$ este operatorul evoluției cauzale. Să efectuăm produsul scalar

$$\langle\psi_m | \psi\rangle = \langle\psi_m | \{c_1(t) | \psi_1\rangle + \ldots + c_m(t) | \psi_m\rangle + \ldots\}$$

Întrucît keții proprii sînt ortonormați

$$\langle \psi_m | \psi\rangle = c_m(t)$$

și deci

$$| c_m(t) |^2 = |\langle\psi_m | \psi\rangle|^2.$$

Însă $|c_m(t)^2|$ reprezintă chiar probabilitatea de a găsi valoarea $\mathcal{E}_m$ la o măsurare a energiei la timpul t. Ținînd seama de (10.4) putem scrie

$$P_{mn} = | c_m(t) |^2 = |\langle\psi_m | \hat{T} | \psi_n\rangle|^2. \tag{10.5}$$

P_{mn} este *probabilitatea de tranziție* a sistemului din starea (n) în starea (m) sub acțiunea unei perturbații exterioare care determină operatorul evoluției cauzale $\hat{T}(t, t_0)$.

Calculul probabilității de tranziție. Este știut că operatorul evoluției cauzale satisface ecuația

$$i\hbar \frac{d\hat{T}}{dt} = \hat{H}\hat{T} \tag{10.6}$$

unde $\hat{H}$ este dat de (10.2). Vom pune

$$\hat{T} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\hat{T}'. \tag{10.7}$$

Obținem

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}t} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}^0\hat{T}' + \frac{\mathrm{d}\hat{T}'}{\mathrm{d}t}\right).$$

Introducînd această derivată în (10.6) găsim

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\hat{H}^0\hat{T}' + \mathrm{i}\hbar \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\frac{\mathrm{d}\hat{T}'}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\hat{H}^0\hat{T}' + \lambda\hat{W}(t)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\hat{T}'.$$

Reducînd termenii asemenea și înmulțind în ambii membri la stînga cu $\exp\left(+\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)$, obținem

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{T}'}{\mathrm{d}t} = \lambda \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\hat{W}(t)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\hat{T}'$$

sau, notînd

$$\hat{W}'(t) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right)\hat{W}(t)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t\hat{H}^0\right) \tag{10.8}$$

rezultă

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{T}'}{\mathrm{d}t} = \lambda\hat{W}'(t)\hat{T}'. \tag{10.9}$$

Dezvoltăm pe $\hat{T}'$ după puterile lui λ

$$T' = 1 + \lambda T_1' + \lambda^2 T_2' + \ldots$$

și introducem dezvoltarea în (10.9)

$$i\hbar\left(\lambda\frac{\mathrm{d}\hat{T}_1'}{\mathrm{d}t} + \lambda^2\frac{\mathrm{d}\hat{T}_2'}{\mathrm{d}t} + \ldots\right) = \lambda\hat{W}'(t) + \lambda^2\hat{W}'(t)\hat{T}_2' + \ldots$$

Această expresie nu este însă identic satisfăcută decît dacă în ambii membrii expresiile care multiplică aceleași puteri ale lui λ sînt egale. Rezultă

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{T}_1'}{\mathrm{d}t} = \hat{W}'(t) \tag{10.10 a}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{T}_2}{\mathrm{d}t} = \hat{W}'(t)\hat{T}_1 \tag{10.10 b}$$

. . . . . .

Limitîndu-ne la primul termen al dezvoltării (relația (10.10 a)), obținem prin integrare

$$\hat{T}'_1 = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \hat{W}'(t)\mathrm{d}t.$$

Vom introduce acum în (10.5) dezvoltarea $\hat{T}' = 1 + \hat{T}'_1$

$$P_{mn} = |\{\langle\psi_m \mid \psi_n\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \langle\psi_m \mid \hat{W}'(t) \mid \psi_n\rangle \mathrm{d}t\}|^2.$$

Ținînd seama de ortogonalitatea keților proprii și de relația (10.8), urmează că

$$P_{mn} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t \langle\psi_m\right| \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\hat{H}^0\right)\hat{W}(t)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\hat{H}^0\right) \mid \psi_n\rangle\, \mathrm{d}t\,|^2$$

Însă deoarece $|\psi_m\rangle$ și $|\psi_n\rangle$ sînt vectori proprii ai lui $\hat{H}^0$

$$\langle\psi_m \mid \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\hat{H}^0\right) = \langle\psi_m \mid \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\mathscr{E}_m\right)$$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}^0\right) \mid \psi_n\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}t\mathscr{E}_n\right) \mid \psi_n\rangle$$

Introducem notația

$$W_{mn}(t) = \langle\psi_m \mid \hat{W}(t) \mid \psi_n\rangle \qquad (10.11)$$

obținem

$$P_{mn} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t W_{mn}(t)\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n)t\right]\mathrm{d}t\right|^2. \qquad (10.12)$$

Mărimea

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\hbar}(\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n) \qquad (10.13)$$

se numește *frecvență Bohr* a tranziției. Observăm că întrucît în domeniul $t \in (-\infty, 0) \cup (t, \infty)$ operatorul perturbației $\hat{W}(t)$ este nul, putem scrie

$$\int_0^t W_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} W_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\mathrm{d}t.$$

Elementul de matrice $W_{mn}(t)$ poate fi dezvoltat în integrala Fourier

$$W_{mn}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{mn}(\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega$$

sau, aplicînd formula Mellin-Fourier,

$$W_{mn}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{mn}(t)\exp(i\omega t)\,dt.$$

Introducînd în (10.12) expresia de mai sus, particularizată pentru $\omega = \omega_{mn}$, obținem în definitiv probabilitatea de tranziție

$$P_{mn} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2}\,|\,W_{mn}(\omega_{mn})\,|^2. \tag{10.14}$$

Tranzițiile cuantice au, după cum se vede, caracter de rezonanță, implicînd prezența frecvenței ω_{mn} a tranziției în spectrul perturbației. Totodată se constată că $P_{mn} = P_{nm}$.

*Tranziții de dipol electric**. Cîmpul electromagnetic exercită asupra electronilor din atom forța Lorentz

$$\mathbf{f} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

Nu este greu de constatat, ținînd seama de relația (2.55), că între componenta magnetică a forței și cea electrică raportul este

$$\frac{evB}{eE} = \frac{v}{c} = \beta$$

sau, cu alte cuvinte, acțiunea cîmpului magnetic constituie un efect relativist. Cum însă în atom $\beta \approx 1\%$, acțiunea forței magnetice poate fi neglijată într-o primă aproximație. De altfel, acesta este și motivul pentru care rolul hotărîtor în optică îl are cîmpul electric al undei electromagnetice.

Mai jos, ne vom referi la unde armonice plane total plan-polarizate, pentru care

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp[i(\mathbf{Kr} - \omega t)].$$

În atom, distanțele sînt de ordinul $\mathbf{r} \approx 10^{-10}$ m, astfel că în cazul undelor luminoase $\mathbf{Kr} \approx 10^{-3}$, întrucît în domeniul vizibil $\lambda \approx 10^{-7}$ m. Aceasta înseamnă că, practic vorbind, în interiorul atomului intensitatea cîmpului electric nu variază cu distanța sau, altfel spus, cîmpul în atom este omogen. Pentru undele luminoase va fi așadar justificată aproximația

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp(-i\omega t).$$

În aceste condiții, potențialul se scrie $V = -\mathbf{Er}$, iar energia potențială a electronului devine

$$W = -e(-\mathbf{Er}) = -(e\mathbf{r})\mathbf{E} = -\mathbf{Ed}$$

unde $\mathbf{d}$ este un moment electric dipolar. Notînd cu $\mathbf{1}_E$ versorul intensității cîmpului electric, operatorul perturbației produse de acest cîmp este

$$\hat{W}(t) = -E(t)\mathbf{1}_E\hat{\mathbf{d}}.$$

---

* Teoria tranzițiilor mai jos prezentată are caracter semicuantic, deoarece nu se ține seama de structura cuantică a cîmpului electromagnetic, ci se consideră acțiunea acestuia ca o perturbație clasică.

Ţinînd seama de (10.11)

$$W_{mn}(t) = -E(t)\mathbf{1}_E\mathbf{d}_{mn} \tag{10.15}$$

unde

$$\mathbf{d}_{mn}^{\cdot} = \langle\psi_m \mid \hat{\mathbf{d}} \mid \psi_n\rangle \tag{10.16}$$

sînt elementele matricei momentului de dipol. Dezvoltînd ambii membri ai relaţiei (10.15) în integrală Fourier găsim

$$\int_{-\infty}^{\infty} [W_{mn}(\omega) + \mathbf{1}_E\mathbf{d}_{mn}E(\omega)] \exp(i\omega t)dt = 0.$$

Această expresie nu este însă identic satisfăcută decît dacă suma din paranteza dreaptă este nulă oricare a fi ω. Rezultă aşadar

$$W_{mn}(\omega_{mn}) = -\mathbf{1}_E\mathbf{d}_{mn}E(\omega_{mn}).$$

Introducînd acest rezultat în (10.14) obţinem expresia probabilităţii de tranziţie de dipol electric

$$P_{mn} = \frac{4\pi^2}{h} \mid E(\omega_{mn}) \mid^2 \cdot \mid \mathbf{1}_E\mathbf{d}_{mn} \mid^2. \tag{10.17}$$

10.2. Reguli de selecţie

Tranziţii de dipol. Aşa cum rezultă din (10.17) probabilitatea unei tranziţii P_{mn} este diferită de zero numai dacă elementul de matrice de dipol corespunzător $\mathbf{d}_{mn}$ este de asemenea diferit de zero. Regulile de selecţie specifică tocmai condiţiile pentru care aceste elemente de matrice sînt nenule. Aceste reguli se stabilesc pentru fiecare număr cuantic în parte. Mai jos vom da cîteva exemple de astfel de reguli.

Oscilatorul armonic unidimensional. Valorile proprii ale energiei unui oscilator de frecvenţă ω_0 şi masă m_0 sînt cuantificate de numărul cuantic principal $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{10.18}$$

iar funcţiile proprii care aparţin acestor valori sînt date de expresia

$$\psi_n(x) = N_n H_n(\alpha x) \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right) \tag{10.19}$$

unde $H_n(x)$ este polinomul Hermite de ordinul n, $\alpha = (m_0\omega_0^2/\hbar)^{1/2}$, iar N_n un factor de normare. Elementele matricei de dipol electric se vor scrie în acest caz unidimensional

$$\mathbf{d}_{mn} = \langle\psi_m \mid (-ex) \mid \psi_n\rangle = -e\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x)\cdot x\cdot \psi_n(x)dx. \tag{10.20}$$

În analiza matematică se arată că

$$xH_n = nH_{n-1} + \frac{1}{2} H_{n+1}$$

Însă, deoarece polinoamele Hermite sînt ortogonale, rezultă că în integrala din (10.20) expresiile

$$H_m x H_n \neq 0$$

numai dacă $m = n + 1$ respectiv $m = n - 1$. Cu alte cuvinte, numărul cuantic n nu poate varia decît cu o unitate

$$\Delta n = \pm 1. \tag{10.21}$$

Aceasta este regula de selecție pentru numărul cuantic n. De aici urmează că singurele tranziții permise sînt acelea pentru care

$$\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_n}{\hbar} = \pm \omega_0$$

adică acele tranziții în care se emite, respectiv se absoarbe un foton a cărui frecvență este egală cu frecvența oscilatorului.

Mișcarea în cîmp central. Emisia și absorbția radiației electromagnetice din domeniul optic rezultă ca urmare a tranzițiilor electronilor din atomi. Deoarece electronii se mișcă în atom în cîmpul central al nucleului, regulile de selecție pentru acest tip de mișcare sînt extrem de importante. Deși mișcarea în cîmp central este caracterizată de numerele cuantice n, l, m, m_s, totuși numai ultimele trei numere sînt supuse unor reguli de selecție. În particular, regulile de selecție pentru m și l decurg din valorile pe care le poate lua matricea de dipol $\mathbf{d}_{mn}$.

Vom stabili mai jos regulile de selecție în cazul atomilor cu un singur electron optic. Să considerăm mai întîi tranziția între două stări (i) și (k), stări care diferă între ele doar prin valorile numărului cuantic m. Pentru calculul elementelor de matrice observăm mai întîi că

$$\mathbf{d}_{ik} = \mathbf{1}_x d_{ik}^{(x)} + \mathbf{1}_y d_{ik}^{(y)} + \mathbf{1}_z d_{ik}^{(z)}. \tag{10.22}$$

În această expresie

$$\begin{aligned} d_{ik}^{(x)} &= \langle \psi_i \mid (-ex) \mid \psi_k \rangle = -e \int \psi_i^* x \psi_k \mathrm{d}_x \\ d_{ik}^{(y)} &= -e \int \psi_i^* y \psi_k \mathrm{d}x \\ d_{ik}^{(z)} &= -c \int \psi_i^* z \psi_k \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Așa cum se arată în mecanica cuantică, în cazul mișcării în cîmp central

$$\begin{aligned} \psi_i^*(r,\ \theta,\ \varphi) &= NR(r)\mathrm{P}_l^{|m_i|}(\cos\theta)\exp(-im_i\varphi) \\ \psi_k(r,\ \theta,\ \varphi) &= NR(r)\mathrm{P}_l^{|m_k|}(\cos\theta)\exp(im_k\varphi) \end{aligned} \tag{10.24}$$

unde $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ este polinomul Legendre de ordinul m și gradul l.

Observăm că x, y, z se exprimă în raport cu coordonatele sferice r, θ, φ prin relațiile

$$x = \frac{r}{2}\sin\theta(\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi))$$

$$y = \frac{r}{2}\sin\theta\,(\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi))$$

$$z = r\cos\theta.$$

De asemenea

$$d\tau = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Introducînd aceste expresii în (10.23) rezultă

$$d_{ik}^{(x)} = D_1(r, \theta)\int_0^{2\pi}[\exp[i(m_k - m_i + 1)\varphi] + \exp[i(m_k - m_i - 1)\varphi]]d\varphi$$

$$d_{ik}^{(y)} = -iD_1(r, \theta)\int_0^{2\pi}[\exp[i(m_k - m_i + 1)\varphi] - \exp[i(m_k - m_i - 1)\varphi]]d\varphi$$

$$d_{ik}^{(z)} = D_2(r, \theta)\int_0^{2\pi}\exp[i(m_k - m_i)\varphi]d\varphi$$

unde D_1 și D_2 sînt funcții de r și θ. Vom ține seama de faptul că

$$\int_0^{2\pi}\exp[i\alpha\varphi)d\varphi = \begin{cases}2\pi & \alpha = 0\\ 0 & \alpha \in \mathbb{N}^*.\end{cases}$$

De aici rezultă

(i) $d_{ik}^{(x)}$ și $d_{ik}^{(y)}$ sînt diferite de zero numai dacă

$$m_k - m_i + 1 = 0 \Rightarrow \Delta m = -1$$

$$m_k - m_i - 1 = 0 \Rightarrow \Delta m = +1;$$

(ii) $d_{ik}^{(z)}$ este diferit de zero numai dacă

$$m_k - m_i = 0 \Rightarrow \Delta m = 0.$$

De aici urmează regula de selecție pentru numărul cuantic magnetic m

$$\Delta m = 0,\ \pm 1. \qquad (10.25)$$

Este interesant de observat că în cazul tranzițiilor corespunzătoare regulii $\Delta m = 0$, componentele $d_{ik}^{(x)}$ și $d_{ik}^{(y)}$ sînt nule, singura componentă nenulă fiind $d_{ik}^{(z)}$, adică momentul dipolar este orientat după axa z. Rezultă că oscilația emisă este plan-polarizată, cîmpul electric oscilînd pe direcția z. Dacă însă $\Delta m = \pm 1$, atunci $d_{ik}^{(z)}$ este nul, iar

$$d_{ik}^{(x)} = \pm i d_{ik}^{(y)}$$

Deoarece $\exp\left(\pm i\frac{\pi}{2}\right) = \pm i$, rezultă că cele două componente $d_{ik}^{(x)}$ și $d_{ik}^{(y)}$ sînt defazate cu $\pm\pi/2$, rezultînd oscilații polarizate circular dreapta ($\Delta m = +1$) respectiv stînga ($\Delta m = -1$).

Pentru a găsi regula de selecție pentru numărul cuantic orbital l, observăm că pentru stările de moment cinetic în mișcarea în cîmp central ecuația cu valori proprii a operatorului parității $\hat{G}$ este

$$\hat{G}\psi_{lm}(r,\ \theta,\ \varphi) = (-1)^l\ \psi_{lm}(r,\ \theta,\ \varphi) \tag{10.26}$$

paritatea stării specificate de numărul cuantic l fiind așadar $(-1)^l$. Funcțiile

$$\psi_i^* x_s \psi_k$$

(unde $x_s = x,\ y,\ z$) care intervin în (10.23) sînt *impare* dacă $l_i = l_k$, adică dacă $\Delta l = 0$, întrucît expresia $(-1)^{2l}$ este pară, iar x_s este funcție impară. În acest caz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^* x_s \psi_k \mathrm{d}\tau = 0 \tag{10.27}$$

cu alte cuvinte, elementele matricei de dipol sînt nule, iar tranziția $\Delta l = 0$ este *interzisă*. Pe de altă parte, întrucît l este valoarea maximă a numărului cuantic m, l va satisface regulile de selecție (10.25) ale acestui număr cu excepția tranziției interzise susmenționate, deci

$$\Delta l = \pm 1. \tag{10.28}$$

Pentru numărul cuantic de spin m_s, atît timp cît cuplajul spin-orbită este neglijabil (cazul atomilor ușori), regula de selecție este

$$\Delta m_s = 0. \tag{10.29}$$

Într-adevăr, în absența cuplajului spin-orbită, ketul de stare proprie se poate pune sub forma produsului direct

$$|\ \psi_{i\sigma}\rangle = |\ \varphi_i\rangle\ |\ \chi_\sigma\rangle$$

ketul $|\ \varphi_i\rangle$ descriind starea orbitală, iar ketul $|\chi_\sigma\rangle$ starea de spin. În cazul tranziției în care m_s variază de la valoarea 1/2 la valoarea $-1/2$ elementul matricei de dipol se va scrie

$$d_{ik\sigma\sigma'} = \langle \frac{1}{2} |\ \langle \varphi_i |\ \hat{\mathbf{d}}\ |\ \varphi_k \rangle\ |\ -\ \frac{1}{2} \rangle = \langle \frac{1}{2} |\ -\frac{1}{2} \rangle\, d_{ik} = 0$$

întrucît cei doi vectori proprii sînt ortogonali.

În ceea ce privește numărul cunatic total $j = l + m_s$, acesta este supus mai întîi regulii de selecție

$$\Delta j = \pm 1 \tag{10.30}$$

așa cum rezultă din (10.28) și (10.29). Este totuși posibil, ca urmare a rearanjării orientării vectorilor l și s, ca Δl și Δm_s să satisfacă aceste reguli, deși numărul cuantic total j rămîne neschimbat. Acest număr cuantic satisface așadar și regula de selecție

$$\Delta j = 0. \tag{10.31}$$

Observăm totuși că tranziția $j = 0 \to j = 0$ este interzisă. Într-adevăr, într-o astfel de tranziție, ținînd seama și de (10.29), nu este cu putință să se transfere fotonului momentul cinetic corespunzător valorii $l_s = 1$, astfel că acesta nu poate fi generat.

În discuțiile de mai sus s-a neglijat efectul forței magnetice exercitate de către cîmp. Dacă se ține însă seama și de apariția unui moment magnetic indus, descris de operatorul $\hat{\mathcal{M}}$, atunci pot apare și tranziții de dipol magnetic a căror probabilitatea este

$$P_{mn} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \beta^2 \mid \mathbf{E}(\omega_{mn}) \mid^2 \mid \mathbf{1}_B \mathcal{M}_{mn} \mid^2 \tag{10.32}$$

unde $\beta = v/c$, $\mathbf{1}_B$ este versorul inducției magnetice, iar

$$\mathcal{M}_{mn} = \langle \psi_m \mid \hat{\mathcal{M}} \mid \psi_n \rangle \tag{10.33}$$

elementele matricei dipol magnetic. Probabilitatea acestor tranziții este de circa $10^{-5} - 10^{-6}$ ori mai mică decît cea a tranzițiilor de dipol electric. În ceea ce privește regulile de selecție, acestea sînt aceleași cu cele mai sus stabilite pentru dipolul electric.

Tranziții de cvadrupol electric. În cazul emisiei sau absorbției radiațiilor cu lungime de undă foarte mică, aproximația omogenității cîmpului electric în atom nu mai este justificată. În acest caz, în atom se induce un moment electric de cvadrupol. Acest tensor se reprezintă printr-o matrice 3×3 de elemente

$$Q_{\alpha\beta} = .e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \tag{10.34}$$

unde x_α, $x_\beta = x, y, z$, iar $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Probabilitatea de tranziție de cvadrupol este

$$P_{mn} \sim \mid \sum_{\alpha,\, \beta} \langle \psi_m \mid \hat{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta} \mid \psi_n \rangle. \tag{10.35}$$

Pentru aceste tranziții se deduc regulile de selecție

$$\Delta j = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{10.36}$$

$$\Delta m = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{10.37}$$

cu regulile suplimentare care interzic tranzițiile

$$j = \frac{1}{2} \to j = \frac{1}{2} \text{ și } j = 0 \to j = 1.$$

Menționăm că probabilitățile tranzițiilor de cvadrupol sînt de ordinul 10^{-8} ori mai mici decît cele ale tranzițiilor de dipol electric.

Pentru discuții mai detaliate asupra regulilor de selecție în cazuri mai complicate se pot consulta lucrările clasice de spectroscopie.

10.3. Mecanismul Einstein de emisie-absorbție a luminii

Mecanismul propus de Einstein în 1917 pentru procesele de emisie și absorbție a luminii, prezentînd avantajul unei deosebite intuitivități, este folosit și astăzi pentru rezolvarea a nenumărate probleme, mai ales aplicative.

După Einstein, între două stări staţionare de energie $\mathcal{E}_m$ şi $\mathcal{E}_n$ pot avea loc trei tipuri de tranziţii cuantice:

(i) *Tranziţia spontană* a sistemului din starea cu energie mai mare $\mathcal{E}_m$ în starea cu energie mai scăzută $\mathcal{E}_n$, însoţită de emisia unui foton cu energia

$$\hbar\omega_{mn} = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n.$$

Acest proces este numit *emisie spontană* şi se caracterizează prin probabilitatea $\mathcal{A}_{mn}$ de realizare a tranziţiei în unitatea de timp.

În cadrul mecanicii cuantice tranziţiile spontane sînt inexplicabile, deoarece un sistem care se găseşte într-o stare staţionară nu poate părăsi această stare decît sub acţiunea unei perturbaţii exterioare. În electrodinamica cuantică se arată că o astfel de perturbaţie există într-adevăr şi în absenţa unui cîmp exterior şi este datorată interacţiunii dintre sistemul care efectuează tranziţia — de exemplu, electronul — şi propriul său cîmp.

(ii) *Emisia stimulată.* Un sistem care se găseşte în starea cu energia mai ridicată $\mathcal{E}_m$, poate efectua o tranziţie pe nivelul cu energia $\mathcal{E}_n$, sub acţiunea unui alt foton cu o frecvenţă egală cu frecvenţa tranziţiei. Fotonul care stimulează tranziţia continuă să existe mai departe împreună cu fotonul de aceeaşi frecvenţă generat de tranziţie. Trebuie menţionat că în timp ce în cazul tranziţiilor spontane direcţia de emisie şi starea de polarizare a fotonului sînt oarecare, în cazul tranziţiei stimulate direcţia fotonului emis şi starea de polarizare a acestuia coincid cu direcţia şi starea de polarizare a fotonului care a stimulat emisia. Probabilitatea în unitatea de timp de realizare a tranziţiei este proporţională cu densitatea spectrală* $\rho(\omega_{mn})$ a radiaţiei. Probabilitatea în unitatea de timp de realizare a tranziţiilor $(m) \rightarrow (n)$, atît spontane cît şi stimulate, va fi

$$\mathcal{A}_{mn} + \mathcal{B}_{mn}\rho(\omega_{mn})$$

coeficientul $\mathcal{B}_{mn}$ caracterizînd tranziţia stimulată.

(iii) *Absorbţia.* Dacă un foton cu o frecvenţă egală cu ω_{mn} interacţionează cu un sistem care se găseşte în starea cu energia $\mathcal{E}_n$ este absorbit de sistem, acesta trecînd în starea cu energia mai înaltă $\mathcal{E}_m$. Probabilitatea de realizare în unitatea de timp a acestui proces stimulat este de asemenea proporţională cu densitatea spectrală de radiaţie

$$\mathcal{B}_{nm}\rho(\omega_{mn}).$$

Condiţia echilibrului între tranziţiile $m \rightarrow n$ şi $n \rightarrow m$ va fi aşadar

$$[\mathcal{A}_{mn} + \mathcal{B}_{mn}\rho(\omega_{mn})]N_m = \mathcal{B}_{nm}\rho(\omega_{mn})N_n \qquad (10.38)$$

unde N_m şi N_n sînt populaţiile celor două nivele. Relaţia (10.38) se poate scrie şi sub forma

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{\mathcal{A}_{mn}}{\mathcal{B}_{nm}\rho} + \frac{\mathcal{B}_{mn}}{\mathcal{B}_{nm}}. \qquad (10.39)$$

---

* Pentru definiţia densităţii spectrale de energie vezi § 11.1.

Această relație trebuie să fie valabilă pentru orice temperatură. La limita $T \to \infty$, pe de o parte $\rho \to \infty$, iar pe de altă parte repartiția statistică poate fi foarte bine aproximată ca o repartiție Maxwell-Boltzmann astfel că

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N_n}{N_m} = \frac{\mathcal{B}_{mn}}{\mathcal{B}_{nm}} = \lim_{T\to\infty} \exp\left(\frac{\hbar\omega_{mn}}{k\cdot T}\right) = 1 \tag{10.40}$$

și obținem în final, pentru cazul cînd ambele nivele sînt nedegenerate,

$$\mathcal{B}_{mn} = \mathcal{B}_{nm}. \tag{10.41}$$

Dacă însă nivelul n este g_n-degenerat, iar nivelul m este g_m-degenerat, relația (10.41) devine

$$g_m \mathcal{B}_{mn} = g_n \mathcal{B}_{nm}. \tag{10.42}$$

Se arată că între coeficienții lui Einstein $\mathcal{A}_{mn}$ și $\mathcal{B}_{nm}$ există relația

$$\mathcal{A}_{mn} = \frac{\hbar\omega_{mn}^3}{\pi^2 c^3} \frac{g_n}{g_m} \mathcal{B}_{nm} \tag{10.43}$$

În cazul tranzițiilor de dipol electric acești coeficienți sînt legați de elementele matricei de dipol prin relațiile

$$\mathcal{A}_{mn} = \frac{1}{3\pi\varepsilon_0} \frac{\omega_{mn}^3}{\hbar c^3} \sum_{r\in 1,\, g_m} \sum_{s\in 1,\, g_n} |\, \mathbf{d}_{m_r n_s}\,|^2 \tag{10.44}$$

$$\mathcal{B}_{mn} = \frac{\pi}{3\pi\varepsilon_0} \sum_{r\in 1,\, g_m} \sum_{s\in 1,\, g_n} |\, \mathbf{d}_{m_r n_s}\,|^2 \tag{10.45}$$

sumarea făcîndu-se după toate perechile de stări a căror frecvență de tranziție este ω_{mn}.

10.4. Lărgimea liniilor spectrale

Lărgimea nivelelor de energie. În teoria tranzițiilor cuantice mai sus prezentată s-a presupus că energia fiecărei stări poate fi determinată oricît de exact dorim. Dar în mecanica cuantică se arată că energia $\mathcal{E}_m$ a unei stări, în care sistemul are timpul de viață τ_m, este afectată de nedeterminarea Heisenberg

$$\Delta\mathcal{E}_m \tau_m \approx \hbar \tag{10.46}$$

Pe de altă parte, timpul de viață τ_m este legat de coeficienții lui Einstein pentru tranzițiile spontane. Să considerăm mulțimea tuturor tranzițiilor permise între starea (m) și diversele stări (k) cu energii inferioare valorii $\mathcal{E}_m$. Să notăm

$$\mathcal{A}_m = \sum_k \mathcal{A}_{mk}$$

suma coeficienților Einstein pentru toate aceste tranziții spontane. Timpul de viață în starea (m) va fi invers proporțional cu coeficientul $\mathcal{A}_m$, care exprimă probabilitatea mulțimii tranzițiilor $(m) \to (k)$

$$\tau_m = \frac{1}{\mathcal{A}_m}. \tag{10.47}$$

Sau, ţinînd seama de (10.46),

$$\Delta\mathcal{E}_m = \frac{\hbar}{\tau_m} = \hbar\mathcal{A}_m. \tag{10.48}$$

Aşadar, nedeterminarea asupra energiei stării (m) este invers proporţională cu timpul de viaţă pe această stare, respectiv direct proporţională cu coeficientul $\mathcal{A}_m$. Deoarece singura stare din care nu se pot face tranziţii spontane este starea fundamentală (starea cu energia minimă) urmează că singura energie care se poate determina precis este cea a stării fundamentale.

Conceptul de linie spectrală. În cazul idealizat în care s-ar putea determina exact ambele energii $\mathcal{E}_m$, respectiv $\mathcal{E}_n$, ale stărilor între care se efectuează tranziţia, frecvenţa Bohr

$$\omega_{mn} = \frac{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n}{\hbar}$$

ar fi de asemenea exact determinată, iar radiaţia emisă ar fi riguros monocromatică. Trecînd radiaţia printr-un spectroscop cu o fantă cu o deschidere ideal de îngustă, în cîmpul spectroscopului s-ar obţine o linie spectrală ideală. În realitate, întrucît în cazul general nici energia $\mathcal{E}_m$, nici energia $\mathcal{E}_n$ nu pot fi exact determinate, apare şi o nedeterminare a frecvenţei tranziţiei. În conformitate cu (10.48) această nedeterminare este

$$\Delta\omega_{mn} = \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_n = \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n}\right). \tag{10.49}$$

Ca urmare, în locul unei linii ideale, se va obţine o linie de o anumită lărgime şi un anumit contur. Această lărgire a liniei spectrale este denumită *naturală*, deoarece este inerentă procesului de tranziţie cuantică. Radiaţia corespunzătoare nu va mai fi o undă armonică, ci un grup de unde.

Conturul liniei spectrale. Fiecare microsistem care efectuează tranziţii cuantice poate fi considerat ca un oscilator cuantic, care oscilează cu frecvenţa tranziţiei. Analogul clasic al acestui proces este oscilaţia amortizată a unui oscilator. Vom admite că grupul de unde care exprimă lărgirea liniei spectrale este identic cu grupul de unde emis de un oscilator clasic amortizat (contur lorentzian). Aşa cum s-a arătat în § 2.7, amplitudinea $a(\omega)$ a undei de frecvenţă ω din grupul de unde este

$$a(\omega) = \frac{a_0}{\mathrm{i}(\omega - \omega_0) + \frac{\Gamma}{2}} \tag{10.50}$$

unde ω_0 este frecvenţa în absenţa amortizării, iar Γ coeficientul de amortizare a intensităţii undei. Pătratul modulului amplitudinii va fi (vezi relaţia 2.66))

$$|\, a(\omega)\,|^2 = \frac{a_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}.$$

Din (10.50) însă $a(\omega_0) = a_0/(\Gamma/2)$ astfel că putem scrie

$$|\, a(\omega)\,|^2 = \frac{a(\omega_0)^2\,\Gamma^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{10.51}$$

În figura 10.1 este arătată variația cu frecvență a intensității $I(\omega)$ a undei, proporțională cu $|a(\omega)|^2$. Se vede că la frecvențele $\omega_0 \pm (\Delta\omega/2)$ intensitatea se reduce la jumătate. Întrucît

$$I(\omega) = \frac{I(\omega_0)\Gamma^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{10.52}$$

urmează că $I(\omega) = I(\omega_0)/2$ dacă este îndeplinită condiția

$$\Delta\omega = 2(\omega - \omega_0) = \Gamma. \tag{10.53}$$

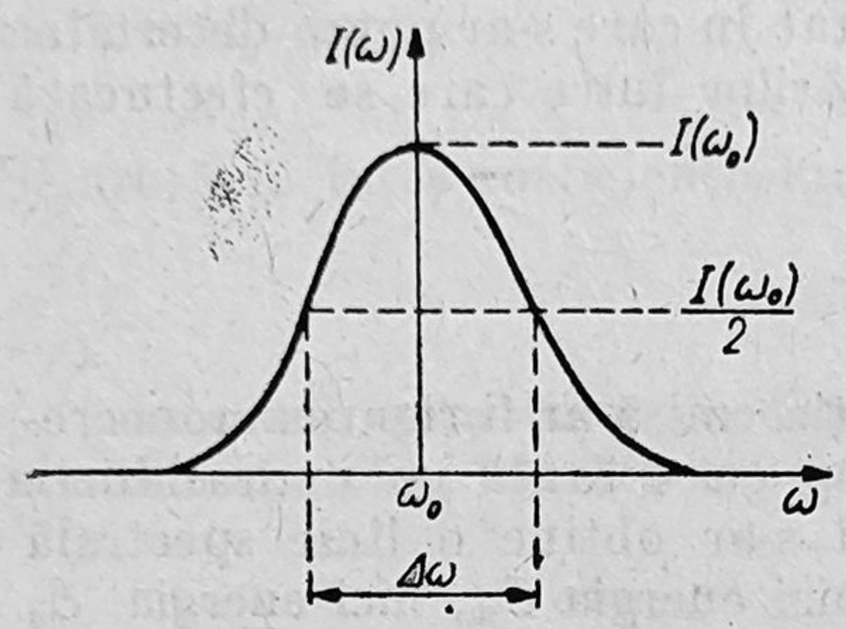


Fig. 10.1

Așadar, lărgirea naturală a liniei spectrale, datorată impreciziei determinării energiei stărilor între care are loc tranziția, este echivalentă cu amortizarea oscilațiilor unui oscilator clasic, semilărgimea $\Delta\omega$ a liniei spectrale fiind egală cu coeficientul de amortizare Γ.

Lărgimea Doppler a liniilor spectrale. Semilărgimea liniilor spectrale observate experimental este mult mai mare decît lărgimea naturală. Una din cauzele acestei lărgiri, în afara celei naturale, o constituie variația frecvenței prin efect Doppler. Efectul Doppler apare ca urmare a agitației termice care imprimă microsistemelor viteze distribuite maxwellian. Așa cum s-a arătat în § 2.8 dependența frecvenței de viteză este dată de relația

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

unde α este unghiul format de direcția de emisie a undei cu axa x *a referențialului solidar cu sursa**. Vitezele de agitație termică sînt suficient de mici pentru a putea neglija v^2/c^2 în raport cu unitatea, ceea ce ne permite să rescriem relația de mai sus sub forma

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$$

unde am notat prin v_x proiecția lui **v** pe axa x. Rezultă următoarea variație a frecvenței prin efectul Doppler

$$\omega - \omega_0 = \omega_0 \frac{v_x}{c}. \tag{10.54}$$

Repartiția vitezelor microsistemelor este maxwelliană, așa încît numărul sistemelor a căror viteză este cuprinsă în intervalul $[v_x, v_x + dv_x]$ este

$$dn = A \exp\left(-\frac{Mv_x^2}{2k_BT}\right) dv_x \tag{10.55}$$

* Diferența dintre această relație și relația (2.75) este datorată tocmai acestui fapt.

unde M este masa microsistemului, k_B este constanta lui Boltzmann, iar T temperatura absolută. Din (10.14) rezultă

$$v_x = \frac{c}{\omega_0}(\omega - \omega_0), \quad \mathrm{d}v_x = \frac{c}{\omega_0}\mathrm{d}\omega$$

şi, în consecinţă, (10.55) se va scrie

$$\mathrm{d}n = A \exp\left(-\frac{Mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2k_B T\omega_0^2}\right) \cdot \frac{c}{\omega_0}\mathrm{d}\omega. \tag{10.56}$$

Acum $\mathrm{d}n$ reprezintă numărul microsistemelor capabile să emită, respectiv să absoarbă, radiaţia cu frecvenţa cuprinsă în intervalul $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$. Intensitatea radiaţiei cu această frecvenţă va fi proporţională cu $\mathrm{d}n$

$$I(\omega) = \text{const} \exp\left(-\frac{Mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2k_B T\omega}\right)$$

sau

$$I(\omega) = I(\omega_0) \exp\left[-\beta(\omega - \omega_0)^2\right].$$

Se vede că $I(\omega)$ are o distribuţie gaussiană. Semilărgimea Doppler a liniei spectrale este dată de condiţia

$$\exp[-\beta(\omega - \omega_0)^2] = \frac{1}{2}.$$

Rezultă

$$\omega - \omega_0 = \frac{\omega_0}{c}\left(\frac{2k_B T}{M}\ln 2\right)$$

şi deci semilărgimea are expresia

$$\Delta\omega = 2(\omega - \omega_0) = \frac{2\omega_0}{c}\left(\frac{2k_B T}{M}\ln 2\right)^{1/2}. \tag{10.57}$$

Lărgimea liniilor spectrale datorată ciocnirilor. Procesele de ciocnire între particule au drept rezultat lărgirea nivelelor de energie şi, în consecinţă, şi lărgirea liniilor spectrale, efectul putînd fi de acelaşi ordin de mărime cu cel produs prin efect Doppler. În cazul ciocnirilor neelastice, în urma transferului de energie neradiativ, şi sistemul trece pe alt nivel de energie, astfel că timpul de viaţă pe nivelul iniţial se scurtează determinînd o creştere a impreciziei energiei, deci lărgirea nivelului.

În cazul ciocnirilor elastice are loc de asemenea o lărgire a nivelelor de energie dependentă în primul rînd de caracterul interacţiunii lor. Prezintă importanţa efectul Zeemann produs de cîmpul de inducţie magnetică atomic, iar în cazul ionizărilor puternice efectul Starck datorat cîmpului electric. În afara sarcinii electrice a particulelor care generează cîmpurile, este importantă şi mărimea momentului electric dipolar.

Teoria lărgimii nivelelor şi liniilor spectrale este destul de dificilă. Trimitem pe cititorii interesaţi, la lucrările clasice de spectroscopie.

10.5. Interpretarea cuantică a dispersiei luminii

Vom arăta în cele ce urmează că se poate obține ușor pe cale cuantică formula lui Sellmeier (7.79)

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + a\mathcal{N} \sum_k \frac{f(\omega_k)}{\omega_k^2 - \omega^2}.$$

Într-adevăr, din electrodinamica clasică, se știe că între vectorul polarizare **P** și intensitatea cîmpului electric **E**, există relația

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}. \tag{10.58}$$

Pe de altă parte, vectorul polarizare este definit în termeni microscopici ca suma momentelor de dipol medii din unitatea de volum

$$\mathbf{P} = \mathcal{N}\langle \mathbf{d} \rangle \tag{10.59}$$

unde $\mathcal{N}$ este numărul microsistemelor (atomi, molecule etc.) din unitatea de volum, în care se induce un moment electric de dipol. Comparînd (10.58) cu (10.59) găsim

$$\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E} = \mathcal{N}\langle \mathbf{d} \rangle. \tag{10.60}$$

Rezultă, așadar, că pentru a găsi expresia lui ε_r este necesar să se calculeze valoarea medie

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \langle \psi \mid \hat{\mathbf{d}} \mid \psi \rangle. \tag{10.61}$$

Vom presupune că sistemul se găsește inițial într-o stare proprie descrisă de ketul propriu $|\psi_n\rangle$. Presupunînd cîmpul undei luminoase suficient de slab pentru a putea fi justificată teoria perturbațiilor staționare în aproximația de ordinul I, vom putea scrie ketul stării perturbate

$$|\psi\rangle = |\psi_n\rangle + |\psi_I\rangle$$

astfel că valoarea medie a momentului de dipol al unui microsistem are expresia

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \langle \psi_n \mid \hat{\mathbf{d}} \mid \psi_n \rangle + \langle \psi_n \mid \hat{\mathbf{d}} \mid \psi_I \rangle + \langle \psi_I \mid \hat{\mathbf{d}} \mid \psi_n \rangle + \langle \psi_I \mid \hat{\mathbf{d}} \mid \psi_I \rangle.$$

Primul termen are în reprezentarea Schrödinger în coordonate forma

$$\langle \psi_n \mid \hat{\mathbf{d}} \mid \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(r)\hat{\mathbf{d}}\psi_n(r)\mathrm{d}\tau.$$

Deoarece ψ_n și ψ_n^* au aceeași paritate, iar în expresia

$$\mathbf{d} = -e(\mathbf{1}_x x + \mathbf{1}_y y + \mathbf{1}_z z)$$

fiecare termen este impar, $\langle \psi_n \mid \mathbf{d} \mid \psi_n \rangle = 0$. Pe de altă parte, $\langle \psi_I \mid \mathbf{d} \mid \psi_I \rangle$ este neglijabil, deoarece ne aflăm în aproximația de ordinul I. Rămîne deci

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \langle \psi_n \mid \mathbf{d} \mid \psi_I \rangle + \langle \psi_I \mid \mathbf{d} \mid \psi_n \rangle. \tag{10.62}$$

Dezvoltăm ketul $|\psi_I\rangle$ și analog bra-ul $\langle\psi_I|$ ca o suprapunere de vectori proprii ai hamiltonianului neperturbat

$$|\psi_I\rangle = \sum_m c_m \,|\, \psi_m\rangle, \quad \langle\psi_I\,| = \sum_m \langle\psi_m \,|\, c_m^* \tag{10.63}$$

și obținem

$$\langle \mathbf{d}\rangle = \sum_m c_m \langle\psi_n \,|\, \hat{\mathbf{d}} \,|\, \psi_m\rangle + \sum_n c_m^* \langle\psi_m \,|\, \hat{\mathbf{d}} \,|\, \psi_n\rangle. \tag{10.64}$$

Vectorii proprii fiind staționari, putem scrie

$$|\,\psi_m\rangle = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathscr{E}_m t\right)|\,\mathring{\psi}_m\rangle, \quad \langle\psi_n\,| = \langle\mathring{\psi}_n \,|\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathscr{E}_n t\right) \tag{10.65}$$

de unde rezultă

$$\langle \mathbf{d}\rangle = \sum_m c_m \mathbf{d}_{nm} \exp(-\mathrm{i}\omega_{mn}t) + \sum_m c_m^* \mathbf{d}_{mn} \exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t) \tag{10.66}$$

unde $\omega_{mn} = (\mathscr{E}_m - \mathscr{E}_n)t$ este frecvența Bohr a tranziției iar

$$\mathbf{d}_{nm} = \langle \mathring{\psi}_n \,|\, \hat{\mathbf{d}} \,|\, \mathring{\psi}_m\rangle$$

elementul matricei de dipol.

Pentru calculul coeficientului Fourier generalizat $c_m(t)$, vom ține mai întîi seama că în conformitate cu (10.12)

$$c_m^2(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_1}^{t_2} W_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\mathrm{d}t\right|^2$$

de unde rezultă că, pînă la un factor de fază nesemnificativ,

$$c_m(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_1}^{t_2} W_{mn}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\mathrm{d}t \tag{10.67}$$

Limitînd discuția numai la undele luminoase, cîmpul electromagnetic poate fi considerat practic uniform în interiorul microsistemului. Pentru a evita complicațiile introduse de regimul tranzitoriu vom considera un cîmp electric a cărui intensitate crește în intervalul $t \in (-\infty, 0)$ continuu și foarte lent, după legea

$$E(t) = \frac{E_0}{2}\exp(\alpha t)[\exp(\mathrm{i}\omega t) + \exp(-\mathrm{i}\omega t)] \tag{10.68}$$

unde α este o cantitate reală pozitivă, foarte mică — iar în intervalul $t \in [0, t]$ păstrează valoarea de regim

$$E(t) = \frac{E_0}{2}[\exp(\mathrm{i}\omega t) + \exp(-\mathrm{i}\omega t)] = E_0 \cos\omega t. \tag{10.69}$$

Observăm că, în conformitate cu relația (10.15),

$$W_{mn}(t) = -E(t)\mathbf{1}_E\,\mathbf{d}_{mn}.$$

Vom introduce această expresie în (10.67) ținînd seama de (10.68) și vom integra mai întîi pe intervalul $(-\infty, 0)$, iar după aceea vom efectua limita $\alpha \to 0$, în acest mod creșterea devenind infinit de lentă, astfel încît nu mai apar fenomene tranzitorii.

Rezultă în final

$$c_m = \frac{\mathrm{id}_{mn}\mathbf{E}_0}{2\hbar}\left\{\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{0}\exp(\alpha t)[\exp[\mathrm{i}(\omega_{mn}+\omega)t] + \exp[\mathrm{i}\omega_{mn} - \omega t)]]\mathrm{d}t + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{t}[\exp(\mathrm{i}(\omega_{mn}+\omega)t] + \exp[\mathrm{i}(\omega_{mn}-\omega)t]\,]\mathrm{d}t\right\}$$

Deoarece

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{0}\exp(\alpha t)\exp\,[\mathrm{i}(\omega_{mn}\pm\omega)t]\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}(\omega_{mn}\pm\omega)}$$

$$\int_{0}^{t}\exp[\mathrm{i}(\omega_{mn}\pm\omega)t]\mathrm{d}t = \frac{\exp[\mathrm{i}(\omega_{mn}\pm\omega)t] - 1}{\mathrm{i}(\omega_{mn}\pm\omega)}$$

obținem

$$c_m = \frac{\mathbf{d}_{mn}\mathbf{E}_0}{2\hbar}\left(\frac{\exp\{\mathrm{i}[(\omega_{mn}+\omega)t]\}}{\omega_{mn}+\omega} + \frac{\exp[i(\omega_{mn}-\omega)t]}{\omega_{mn}-\omega}\right) \qquad (10.70)$$

și analog

$$c_m^* = \frac{\mathbf{d}_{mn}^*\mathbf{E}_0}{2\hbar}\left(\frac{\exp[-\mathrm{i}(\omega_{mn}+\omega)t]}{\omega_{mn}+\omega} + \frac{\exp[-\mathrm{i}(\omega_{mn}-\omega)t]}{\omega_{mn}-\omega}\right). \qquad (10.71)$$

Ținînd seama că matrice $\mathbf{d}_{mn}$ este hermitică întrucît $\hat{\mathbf{d}}$ este o observabilă, obținem introducînd (10.70) și (10.71) în (10.66)

$$\langle\mathbf{d}\rangle = \frac{\mathbf{E}}{\hbar}\sum_m\left(\frac{|\mathbf{d}_{mn}|^2}{\omega_{mn}+\omega} + \frac{|\mathbf{d}_{mn}|^2}{\omega_m-\omega}\right).$$

Alegînd axa Ox paralelă cu versorul $\mathbf{1}_E$, urmează că

$$|\mathbf{d}_{mn}|^2 = e^2\,|\,x_{mn}\,|^2$$

și, în consecință,

$$\langle\mathbf{d}\rangle = \left\{\frac{2e^2}{\hbar}\sum_m\frac{\omega_{mn}\,|\,x_{mn}\,|^2}{\omega_{mn}^2-\omega^2}\right\}\mathbf{E}. \qquad (10.72)$$

Introducînd această expresie în (10.60), rezultă formula lui Sellmeier, cu $a = e^2/\varepsilon_0 m_0$

$$\varepsilon_r = 1 + a\mathcal{N}\sum_m\frac{f(\omega_{mn})}{\omega_{mn}^2-\omega^2} \qquad (10.73)$$

unde *tăria modului de oscilație* corespunzător frecvenței de tranziție ω_{mn} are expresia

$$f(\omega_{mn}) = \frac{2m_0}{\hbar} |\, x_{mn} \,|^2 \omega_{mn}. \tag{10.74}$$

De aici se vede clar că absorbția are loc la frecvențele corespunzătoare tranzițiilor între nivelele (m) și nivelul fundamental (n).

11. PROCESE DE EMISIE A LUMINII

11.1. Radiația termică de echilibru

Experiența arată că un sistem de corpuri menținut la temperatură constantă, împreună cu radiația electromagnetică emisă și absorbită de corpuri, atinge în final starea de echilibru termodinamic. Radiația emisă, respectiv absorbită în condițiile echilibrului termodinamic se numește *radiație termică de echilibru*. Caracteristic acestei radiații este spectrul continuu și faptul că repartiția energiei în spectru este dependentă de temperatură. Acest proces se caracterizează prin mai multe mărimi fizice care vor fi definite mai jos.

Densitatea spectrală a emitanței energetice. Fie $\mathrm{d}P_\omega$ puterea emisă de un element de arie $\mathrm{d}S$, la frecvențele cuprinse în intervalul $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$. Prin definiție, densitatea spectrală a emitanței energetice este

$$M_\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S} \frac{\mathrm{d}P_\omega}{\mathrm{d}\omega}. \tag{11.1}$$

Emitanța energetică este dată de integrala

$$M = \int_0^\infty M_\omega \mathrm{d}\omega \tag{11.2}$$

Factorul de absorbție. Fie $(\mathrm{d}P_\omega/\mathrm{d}\omega)_a$ puterea absorbită de un element de arie, raportată la intervalul $\mathrm{d}\omega$ și $(\mathrm{d}P_\omega/\mathrm{d}\omega)_i$ puterea incidentă pe același element de arie și raportată la același interval. Factorul de absorbție se definește prin raportul acestor mărimi

$$A_\omega = \frac{(\mathrm{d}P_\omega/\mathrm{d}\omega)_a}{(\mathrm{d}P_\omega/\mathrm{d}\omega)_i}. \tag{11.3}$$

Legile lui Kirchhoff. Legile radiației termice au fost date de către Kirchhoff și se enunță astfel:

(i) Radiația termică de echilibru este omogenă, izotropă și nepolarizată (adică se găsește într-o stare mixtă).

(ii) Pentru un interval de frecvență $[\omega, \omega + d\omega]$ dat și la o temperatură T dată, raportul dintre densitatea spectrală a emitanței energetice și factorul de absorbție este o funcție universală de frecvență și de temperatură

$$\frac{M_\omega(T)}{A_\omega(T)} = f(\omega, T). \tag{11.4}$$

Așadar, corpurile puternic absorbante sînt puternic emisive ; dimpotrivă, corpurile slab absorbante sînt și slab emisive.

Corpul negru. Un corp care are factorul de absorbție egal cu unitatea pentru orice frecvență și la orice temperatură se numește *corp negru.*

$$\forall T \in [0, \infty), \forall \omega \in [0, \infty) ; A_\omega (T) = 1. \tag{11.5}$$

Din (11.4) și (11.5) rezultă că densitatea spectrală a emitanței energetice a corpului negru se identifică cu funcția universală $f(\omega, T)$ a lui Kirchhoff.

Se înțelege că nici unul din corpurile pe care le denumim negre nu posedă proprietatea (11.5). Cu toate acestea este posibil să se construiască un dispozitiv capabil să absoarbă practic toată radiația incidentă. În figura 11.1 este arătat un astfel de dispozitiv constînd dintr-o incintă izotermă care prezintă un orificiu suficient de mic pentru ca din orice punct al incintei să fie văzut sub un unghi mai mic decît 0,01 steradiani. Așa cum se vede în figură, orice rază luminoasă care pătrunde în incintă suferă multiple reflexii însoțite de absorbții, astfel că în final este total absorbită.

Densitatea spectrală de energie. Fie densitatea volumică a energiei radiației electromagnetice

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{ED} + \mathbf{BH}).$$

Să notăm cu dw_ω densitatea energiei radiației a cărei frecvență este cuprinsă în intervalul $[\omega, \omega + d\omega]$. Se numește densitate spectrală de energie

$$\rho_\omega = \frac{dw_\omega}{d\omega} . \tag{11.6}$$

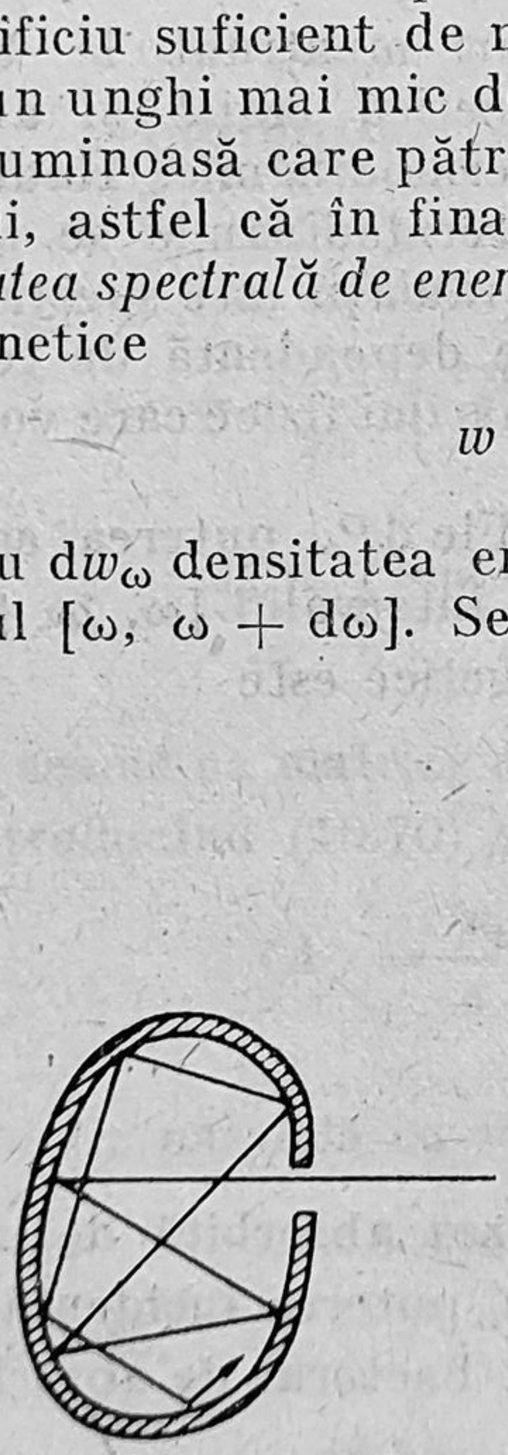


Fig. 11.1

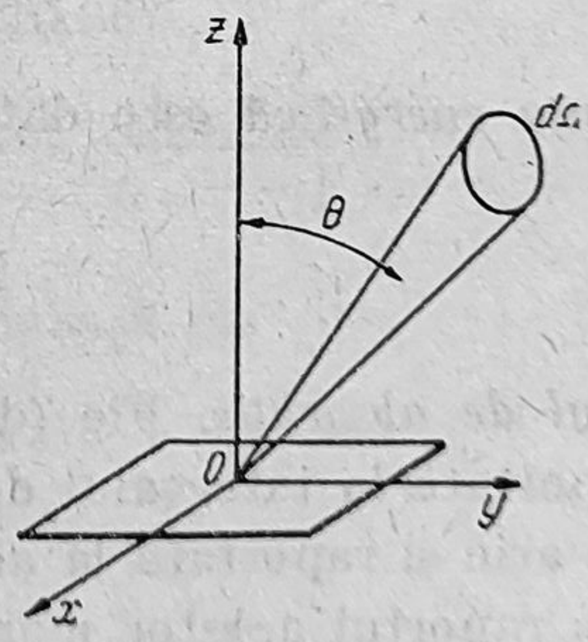


Fig. 11.2

Trebuie observat că în timp ce funcția universală a lui Kirchhoff $f(\omega, t)$ caracterizează procesul superficial de emisie a radiației, densitatea spectrală $\rho_\omega(T)$ a energiei caracterizează radiația dintr-un volum oarecare. Între aceste două mărimi există însă o legătură de proporționalitate directă. Pentru a stabili această legătură să presupunem o suprafață emițătoare situată în planul x, y, radiația propagîndu-se pe direcția z (fig. 11.2). Densitatea vo-

lumică de energie w avînd o repartiție omogenă și izotropă, fiecărui unghi solid elementar $d\Omega$ îi va reveni densitatea

$$\frac{w}{4\pi} d\Omega.$$

Referindu-ne la fig. 11.2 și observînd că viteza de transfer a energiei este în acest caz egală cu c, emitanța energetică va fi

$$M = \frac{cw}{4\pi} \int \cos\theta \, d\Omega$$

însă, întrucît $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$,

$$M = \frac{cw}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{c}{4} w.$$

Această expresie se poate rescrie, pentru fiecare interval de frecvență, ca o relație între densitatea spectrală de emitanță energetică și densitatea spectrală de energie

$$M_\omega = \frac{c}{4} \rho_\omega$$

și, în consecință,

$$f(\omega, t) = \frac{c}{4} \rho_\omega(T). \tag{11.7}$$

Din punctul de vedere teoretic, este mult mai comod să se lucreze cu densitatea spectrală de energie, decît cu funcția $f(\omega, t)$, așa încît în cele ce urmează vom caracteriza radiația de echilibru a corpului negru numai prin $\rho_\omega(T)$*.

Rezultate experimentale. Dependența densității spectrale de energie de frecvența ω este arătată în fig. 11.3, pentru cîteva temperaturi. Se observă mai întîi că fiecare curbă prezintă un maxim, care se deplasează spre frecvențele mai înalte, odată cu creșterea temperaturii, frecvența ω_m corespunzătoare maximului fiind proporțională cu temperatura T

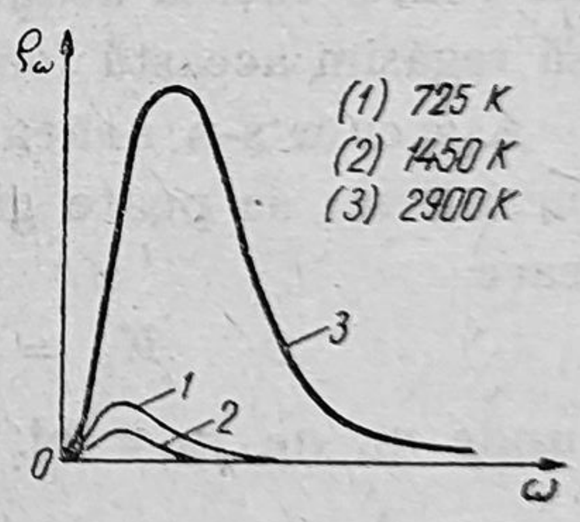


Fig. 11.3

$$\omega_m = \text{const. } T. \tag{11.8}$$

Adesea această relație se scrie în raport cu lungimea de undă (legea deplasării a lui Wien)

$$\lambda_m T = b \tag{11.9}$$

unde constanta $b = (2{,}8978 \pm 0{,}0004) \cdot 10^{-3}$ m·K.

---

* Menționăm că în multe lucrări continuă să se folosească densitățile spectrale ρ_ν sau ρ_λ, raportate la intervalul $d\nu = d\omega/2\pi$, sau la intervalul $d\lambda$. Între aceste mărimi și ρ_ω există relațiile

$$\rho_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} \rho_\nu = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \rho_\omega.$$

O altă lege importantă a radiației termice este legea Stefan-Boltzmann care afirmă că emitanța energetică crește cu puterea a patra a temperaturii termodinamice

$$M = \sigma T^4 \tag{11.10}$$

unde $\sigma = (5{,}6697 \pm 0{,}0029) \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$ este constanta Stefan-Boltzmann.

Relația experimentală de dependență de frecvență și de temperatură a densității spectrale de energie a fost stabilită de către Max Planck, pe baza măsurătorilor efectuate de F. Kurlbaum și H. Rubens. Pentru a putea regăsi formula pe cale teoretică, Planck a trebuit să introducă ipoteza cuantelor, atît de străină fizicii clasice. Pe baza acestei ipoteze, el stabilește următoarea formulă

$$\rho_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \tag{11.11}$$

excepțional de bine verificată de rezultatele experimentale.

11.2. Deducerea formulei lui Planck

Privind în perspectiva anilor, meritul primordial al ipotezei cuantelor nu constă în explicarea fenomenelor de radiație termică, ci în deschiderea unei noi orientări în fizica microscopică, orientare care a condus la elaborarea mecanicii cuantice și a electrodinamicii cuantice. În cele ce urmează nu vom prezenta deducerea dată de către Planck relației (11.11), ci vom căuta să regăsim această formulă în cadrul ideilor dezvoltate în capitolul 9.

Așa cum s-a arătat, într-un volum finit $V = l_1\, l_2\, l_3$ o undă electromagnetică nu se poate găsi decît într-o mulțime numărabilă de stări, pentru care

$$K_x = 2\pi n_1/l_1, \quad K_y = 2\pi n_2/l_2\,; \quad K_z = 2\pi n_3/l_3 \tag{11.12}$$

unde $n_1,\ n_2,\ n_3 \in \mathbb{N}$. Din (11.12) rezultă

$$\delta n_1 = \frac{l_1}{2\pi}\,\delta K_x, \quad \delta n_2 = \frac{l_2}{2\pi}\,\delta K_y, \quad \delta n_3 = \frac{l_3}{2\pi}\,\delta K_z. \tag{11.13}$$

Întrucît V este un volum macroscopic, variațiile δK_i sînt atît de mici încît este justificat să le aproximăm ca variații continue. Să considerăm acum intervalul de frecvențe

$$\omega \in [\omega,\ \omega + \delta\omega] \tag{11.14 a}$$

și intervalele

$$\begin{aligned} K_x &\in [K_x,\ K_x + \delta K_x] \\ K_y &\in [K_y,\ K_y + \delta K_y] \\ K_z &\in [K_z,\ K_z + \delta K_z] \end{aligned} \tag{11.14 b}$$

în care se situează componentele vectorului de undă. Corespunzător, numerele de stări se vor situa în intervalele

$$n_1 \in [n_1,\ n_1 + \delta n_1]$$
$$n_2 \in [n_2,\ n_2 + \delta n_2] \qquad (11.14\ c)$$
$$n_3 \in [n_3,\ n_3 + \delta n_3].$$

Din relaţiile (11.13) rezultă

$$\delta n = \delta n_1\ \delta n_2\ \delta n_3 = \frac{V}{8\pi^3}\ \delta K_x\ \delta K_y\ \delta K_z \qquad (11.15)$$

δn este numărul de stări pentru care proiecţiile vectorului de undă **K** iau valori în intervalele (11.14 b). Ne interesează însă să calculăm numărul de stări pentru care norma vectorului de undă este cuprinsă în intervalul

$$K \in [K,\ K + \delta K] \qquad (11.16)$$

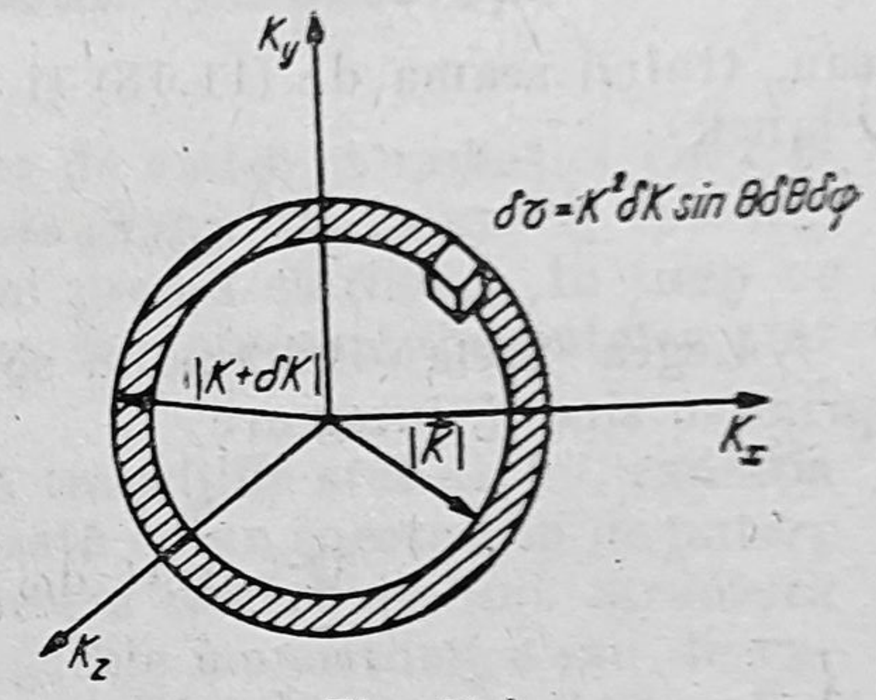


Fig. 11.4

indiferent de orientarea vectorului **K**. În acest scop, vom considera în spaţiul vectorilor de undă (fig. 11.4) un element de volum $\delta\tau = \delta K_x \delta K_y \delta K_z$. Introducînd în acest spaţiu coordonatele sferice K, θ, φ, vom putea scrie

$$\delta\tau = \delta K_x\ \delta K_y\ \delta K_z = K^2\ \delta K\ \sin\theta\ \delta\theta\ \delta\varphi.$$

Numărul stărilor al căror vectori de undă au norma cuprinsă în intervalul (11.16) este

$$\delta n' = \frac{V}{8\pi^3}\ K^2 \delta K \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\ \theta\ \delta\theta\ \delta\varphi$$

sau, întrucît integrala este egală cu 4π,

$$\delta n' = \frac{V}{2\pi^2}\ K^2\ \delta K.$$

Însă, după cum se ştie $K = \omega/c$, de unde

$$K^2\ \delta K = \frac{1}{c^3}\ \omega^2\ \delta\omega$$

şi deci

$$\delta n' = \frac{V}{2\pi^2 c^3}\ \omega^2\ \delta\omega. \qquad (11.17)$$

De aici rezultă că numărul de stări din unitatea de volum a căror frecvenţă este cuprinsă în intervalul (11.14 a), raportat la $\delta\omega$ este

$$N_\omega = \frac{1}{V}\ \frac{\delta n'}{\delta\omega} = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3}. \qquad (11.18)$$

Acum putem calcula densitatea spectrală de energie $\rho_\omega(T)$. Aceasta este egală cu numărul mediu de fotoni $\langle n(\varepsilon)\rangle$ cu energia

$$\varepsilon \in [\hbar\omega,\ \hbar(\omega + \delta\omega)]$$

înmulțit cu numărul de stări N_ω și cu energia $\hbar\omega$ a unui foton. Fotonii sînt bosoni, așa încît ascultă de distribuția Bose-Einstein și deci numărul mediu de particule existente pe nivelul de energie ε este*

$$\langle n(\varepsilon)\rangle = \frac{g}{\exp(\varepsilon/k_B T) - 1}\,. \tag{11.19}$$

Ponderea statistică $g = 2$, întrucît fiecare foton se poate găsi în una din stările $|1\rangle$ sau $|2\rangle$. Rezultă, în final, pentru densitatea spectrală de energie

$$\rho_\omega(T) = \langle n(\varepsilon)\rangle N_\omega \hbar\omega$$

sau, ținînd seama de (11.18) și (11.19), se obține relația (11.11) stabilită de Planck

$$\rho_\omega(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\,\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}\,.$$

Legea Stefan-Boltzmann se poate obține ușor din relația de mai sus printr-o simplă integrare

$$M = \int_0^\infty M_\omega \mathrm{d}\omega = \text{const.} \int_0^\infty \frac{\omega^3\,\mathrm{d}\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

Vom face substituția $\xi = \hbar_\omega/k_B T$. Întrucît $T = \text{const.}$ obținem

$$M = \text{const.}\ T^4 \int_0^\infty \frac{\xi^3\ \exp(-\xi)}{1 - \exp(-\varsigma)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Dezvoltînd în serie $[1 - \exp\,(-\xi)]^{-1}$ și substituind în integrală și integrînd prin părți se obține

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3 \exp(-\xi)}{1 - \exp(-\varsigma)}\,\mathrm{d}\xi = 6 \sum_{n=1,\infty} \frac{1}{n_4} = \frac{\pi^4}{15}\,.$$

Rezultă în final legea Stefan-Boltzmann (11.10)

$$M = \sigma T^4.$$

Pentru a obține legea deplasării dată de Wien, vom face din nou substituția $\xi = \hbar\omega/k_B\ T$, în formula lui Planck, obținînd

$$\rho = \text{const.}\,\frac{\xi^3}{\exp(\xi) - 1}\,.$$

---

* În expresia (11.19) a distribuției Bose-Einstein nu apare potențialul chimic μ al fotonilor, întrucît acesta este nul. Într-adevăr, gazul fotonic găsindu-se în echilibru termodinamic, $(\partial F/\partial N)_{T,V} = 0$. Pe de altă parte, întrucît $\mu = (\partial F/\partial N)_{T,V}$, urmează că potențialul chimic este nul.

Pentru a obține maximul densității spectrale de emisie este suficient să anulăm derivata $d\rho/d\omega$

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{d\rho}{d\xi}\frac{d\xi}{d\omega} = \text{const.}\,\frac{d}{d\xi}\,\frac{\xi^3}{\exp(\xi)-1} = 0.$$

Efectuînd derivata și anulînd numitorul obținem ecuația transcendentă

$$3(\exp(\xi)-1)-\xi\exp(\xi) = 0.$$

Această ecuație are rădăcina $\xi=\xi_m = \text{const.}$ Rezultă $\omega = \text{const.}\ T$, adică legea lui Wien.

11.3. Procese de neechilibru de emisie-absorbție

Procese de emisie. Procesele de neechilibru de emisie a radiației electromagnetice pot avea caracter staționar sau nestaționar. De exemplu, spectrul solar sau spectrul stelar rezultă în urma unui proces staționar, în timp ce spectrele novelor, supernovelor, petelor solare sau ale protuberanțelor sînt datorate unor procese nestaționare.

În general, dacă sistemele care efectuează tranzițiile sînt atomi, radiația emisă are o compoziție spectrală simplă. Analizată cu un spectoscop de putere de rezoluție obișnuită, aceasta prezintă un spectru discret de linii. Structura simplă a acestor spectre atomice, produse de gazele monoatomice sau de vaporii metalici, este datorată structurii simple a nivelelor de energie electronice. Dacă este vorba de electronii de pe ultima pătură, frecvențele radiației emise sînt situate în domeniul optic (inclusiv domeniul infraroșu și ultraviolet), iar dacă tranzițiile sînt efectuate de electroni din păturile apropiate de nucleu, undele emise aparțin domeniului radiațiilor X.

Liniile spectrului se grupează în serii spectrale, prin serie spectrală înțelegîndu-se o submulțime de linii emise de un atom, ale căror frecvențe pot fi deduse pe baza unei aceleiași formule prin variația unui singur parametru și care prezintă proprietăți identice în ceea ce privește despicarea liniilor în cîmp magnetic sau electric. Astfel, pentru tranzițiile electronului în atomul de hidrogen s-au obținut șase serii spectrale, al căror număr de undă* verifică relația generală

$$\tilde{\nu}_{mn} = \frac{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n}{2\pi c\hbar} = R_{\text{H}}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)\ (m,\ n\in\mathbb{N})\ \ (n>m). \qquad (11.20)$$

Aici R_{H} este constanta lui Rydberg pentru hidrogen și are expresia

$$R_{\text{H}} = \frac{\mu_r e^4}{64\pi^3 c\hbar^3} \qquad (11.21)$$

---

* În spectroscopie se folosește în locul frecvenței mărimea denumită număr de undă

$$\tilde{\nu}_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi c} = \frac{1}{\lambda_{mn}}.$$

unde μ_r este masa redusă a electronului în atomul de hidrogen. În (11.20) se obțin următoarele serii spectrale: Lymann ($m = 1$), Balmer ($m = 2$), Paschen ($m = 3$), Bracket ($m = 4$), Pfund ($m = 5$), Humphreys ($m = 6$), prima fiind situată în ultraviolet, a doua în vizibil, iar celelalte în infraroșu. Pentru a obține diverși termeni ai seriilor este suficient să lăsăm ca n să ia valori întregi mai mari decît m. Limita fiecărei serii se obține pentru $n \to \infty$ și are expresia

$$\tilde{\nu}_{m\infty} = \frac{R_H}{m^2}. \tag{11.22}$$

Analog, în cazul metalelor alcaline diversele serii sînt date de formula generală

$$\tilde{\nu}_{mn} = R_A \left\{ \frac{1}{[m + \sigma(l)]^2} - \frac{1}{[n + \sigma(l')]^2} \right\} \tag{11.23}$$

unde R_A este o constantă dependentă de masa atomului alcalin, iar $\sigma(l)$ sînt corecții dependente de numărul cuantic orbital l.

În cazul general, numărul de undă se poate scrie întotdeauna

$$\tilde{\nu}_{mn} = \frac{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n}{\hbar} = T(m) - T(n) \tag{11.24}$$

adică sub forma diferenței a doi termeni, primul desemnînd seria spectrală, iar cel de-al doilea termenul din serie (principiul combinării al lui Ritz).

Aparate spectrale cu putere de rezoluție mai ridicată pun în evidență faptul că în general liniile spectrale prezintă o structură, fiind alcătuite din mai multe linii foarte apropiate (multipleți). Această structură a liniilor spectrale, denumită și *structură fină*, este datorată faptului că și nivelele de energie între care are loc tranziția nu sînt unice, ci prezintă o despicare în mai multe subnivele. Numărul acestor subnivele se numește *multiplicitatea* nivelului. Despicarea nivelelor se explică prin interacțiunea spin-orbită. Ca urmare a mișcării orbitale a electronilor apare un cîmp de inducție magnetică. Acest cîmp interacționînd cu momentele magnetice de spin ale electronilor ridică degenerescența, de ordinul $2S + 1$, obținîndu-se $2S + 1$ stări distincte. Aici S este momentul cinetic de spin rezultant al electronilor, obținut conform regulilor modelului vectorial.

Dacă se analizează liniile spectrale în aparate cu foarte mare putere de rezoluție, se constată un alt tip de despicare denumit *structură hiperfină*. Această despicare a nivelelor de energie se datorează interacțiunii dintre momentele magnetice ale electronilor și cîmpul magnetic produs de momentul magnetic al nucleelor.

*

Dacă tranzițiile au loc în molecule, atunci spectrul este mult mai complicat, deoarece, pe lîngă nivelele de energie electronice, apar și nivele de energie suplimentare de vibrație, rotație sau vibrație-rotație a moleculelor. Liniile spectrale sînt foarte numeroase și foarte apropiate constituind grupuri de linii denumite benzi. Spectrele moleculare se situează nu numai în ultraviolet și vizibil, ci se întind și în domeniul infraroșu și chiar în cel al microundelor, sau cel hertzian.

Cele mai complicate spectre sînt cele ale substanțelor în stări condensate (solide cristaline și amorfe, sau lichide).

Excitarea spectrelor. Pentru excitarea emisiei spectrale de către sistemele microscopice (atomi, molecule etc.) este necesar să se transfere sistemelor o energie cel puţin egală cu energia tranziţiei. Un tip foarte obişnuit de excitare este cea obţinută pe cale termică, obţinîndu-se în acest fel incandescenţa sursei. Un alt mod de excitare este prin descărcări luminiscente în gaze (în scînteie sau în arc), prin bombardament electronic sau prin efectul cîmpului electric asupra joncţiunilor semiconductorilor. Trebuie remarcat că, în funcţie de condiţiile particulare de excitare, pot apare unele sau altele din liniile spectrului substanţei. Spectrele mai pot fi excitate prin anumite procese chimice sau ca urmare a recombinării ionilor (în cazul gazelor ionizate) sau a electronilor şi găurilor (în cristale).

Foarte importantă ca metodă de excitare a spectrelor este excitarea optică (denumită uneori şi fotoluminiscenţă). Un aspect al excitării optice este radiaţia de rezonanţă. În acest proces fiind absorbiţi fotonii unei radiaţii de frecvenţă egală cu frecvenţa Bohr a unei tranziţii între două nivele date, microsistemele trec pe nivelul superior pentru ca apoi, revenind pe nivelul inferior, să emită fotoni cu aceeaşi frecvenţă ca şi fotonii incidenţi. Dacă în cazul cînd microsistemele sînt atomi procesul îmbracă forma simplă mai sus arătată, în schimb, dacă este vorba de molecule, procesul este mai complicat. Astfel, dacă excitarea se face cu o linie spectrală, se emite un anumit sistem de benzi, iar dacă excitarea se face cu o altă linie, se obţine alt sistem de benzi. În fenomenele de fluorescenţă, excitînd substanţa cu radiaţie a cărei frecvenţă este cuprinsă într-o anumită bandă denumită de absorbţie, se obţine o radiaţie dintr-o bandă cu frecvenţe mai mici, denumită bandă de luminiscenţă (fig. 11.5). Această regulă denumită, după numele celui care a descoperit-o, regula lui Stokes, se explică uşor în teoria fotonilor. Fie ω_0 frecvenţa liniei excitatoare şi ω cea a radiaţiei de fluorescenţă

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega + A \tag{11.25}$$

unde A este lucrul care determină anumite procese intramoleculare. În cadrul aceleiaşi teorii se explică şi fluorescenţa denumită anti-Stokes în care

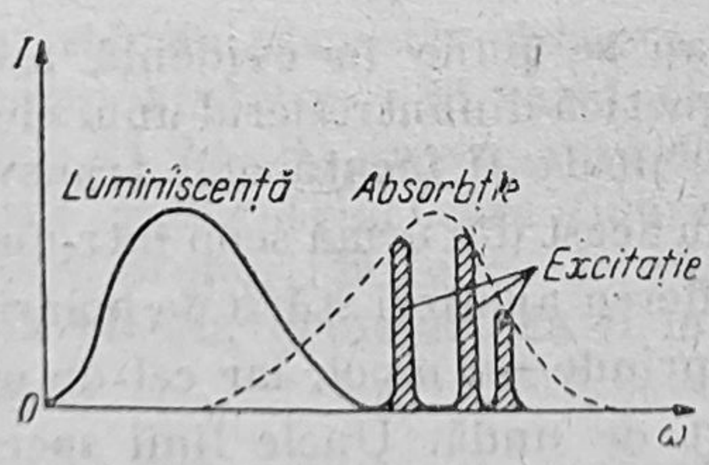


Fig. 11.5

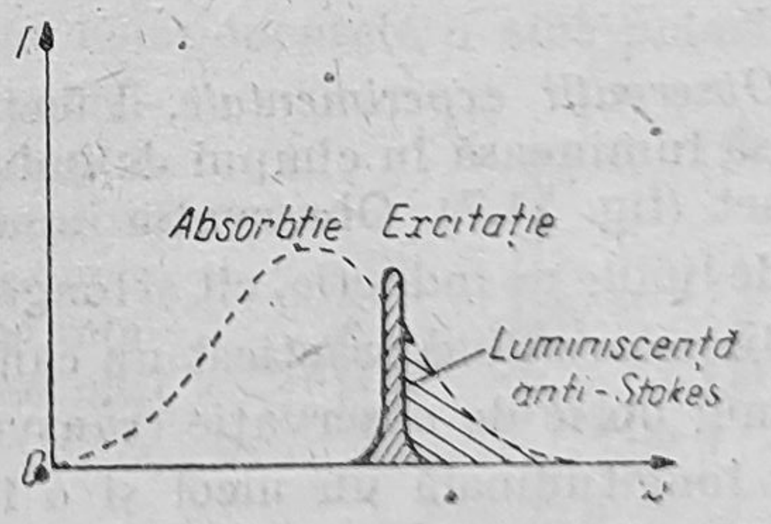


Fig. 11.6

banda de luminiscenţă este deplasată spre frecvenţele mai înalte în comparaţie cu banda de absorbţie (vezi fig. 11.6). Apariţia fluorescenţei anti-Stokes se explică prin aceea că excitarea optică se combină cu excitarea datorată agitaţiei termice. Bilanţul procesului este de data aceasta

$$\hbar\omega_0 + ak_B T = \hbar\omega. \tag{11.26}$$

În acest fel se explică dependența de temperatură a fluorescenței anti-Stokes. În anumite substanțe, sistemele excitate rămîn în stări metastabile, astfel că fenomenul de fluorescență se prelungește în timp și după încetarea excitării. Astfel de substanțe se numesc *fosforescente*.

În încheiere, menționăm că excitarea se poate face și cu radiații corpusculare, cum ar fi de exemplu radiațiile α sau β, emise de substanțele radioactive.

Spectre de absorbție. Așa cum s-a arătat în § 7.4, se constată experimental că la trecerea unei radiații printr-o substanță transparentă are loc — în conformitate cu legea Lambert-Bouguet — scăderea exponențială cu drumul parcurs în mediu, a intensității luminoase

$$I = I_0 \exp(-\alpha l) \tag{11.27}$$

iar în cazul soluțiilor, nu foarte concentrate, într-un solvent neabsorbant scăderea intensității luminoase depinde și de concentrația c, fiind valabilă legea lui Beer

$$I = I_0 \exp(-Acl). \tag{11.28}$$

Coeficientul de absorbție α depinde în mod esențial de frecvență. În cazul vaporilor metalici, de exemplu, α prezintă maxime foarte ascuțite exact pentru frecvențele care constituie spectrul de linii de emisie al metalului. În general, dacă se analizează spectroscopic lumina albă, după trecerea printr-o substanță absorbantă, se obține un spectru complementar spectrului de emisie ale substanței, linii întunecate brăzdînd spectrul continuu exact pentrù frecvențele corespunzătoare spectrului de emisie al substanței. Astfel de spectre se numesc *spectre de absorbție*. Aceste spectre sînt foarte importante mai ales în cazul absorbției luminii în soluții de substanțe organice, deoarece poziția benzilor de absorbție poartă informații interesante asupra constituției chimice a substanței.

11.4. Efectul Zeeman

Observații experimentale. Efectul Zeeman se pune în evidență așezînd o sursă luminoasă în cîmpul de inducție magnetică din întrefierul unui electromagnet (fig. 11.7). Observația luminii emise poate fi făcută atît transversal față de liniile de inducție, cît și longitudinal, în acest din urmă scop într-una din piesele polare fiind practicat un canal. În vederea analizei stării de polarizare, sistemul optic de observație transversală cuprinde un nicol, iar cel de observație longitudinală un nicol și o lamă sfert de undă. Unele linii spectrale (de exemplu, unele linii ale hidrogenului, zincului sau cadmiului) prezintă așa-numitul efect Zeeman simplu. La observarea transversală (fig. 11.8) linia spectrală apare despicată în 3 componente : o componentă π de frecvența liniei spectrale emise în absența cîmpului magnetic și plan-polarizată pe o direcție paralelă cu direcția liniilor de inducție magnetică, și două componente σ, de frecvență $\omega_0 + \Delta\omega$, respectiv $\omega_0 - \Delta\omega$, plan-polarizate pe o direcție perpendiculară pe direcția liniilor de inducție magnetică. La ob-

servarea longitudinală nu apar decît cele două componente σ, dar care în acest caz sînt polarizate circular și anume linia cu frecvența $\omega_0 - \Delta\omega$ cu elicitatea $\mathcal{H} = +1$ în raport cu sensul cîmpului magnetic, iar linia cu frecvența $\omega_0 + \Delta\omega$ cu elicitatea $\mathcal{H} = -1$. Se constată de asemenea că $\Delta\omega$ crește proporțional cu inducția magnetică **B**. În observația transversală, intensitatea

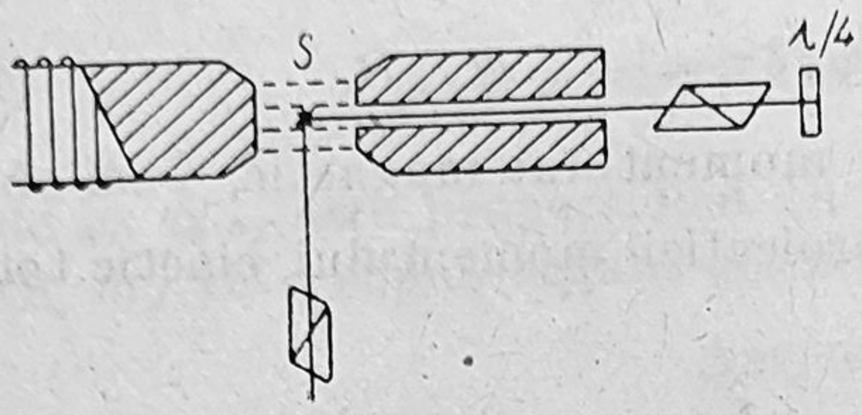


Fig. 11.7

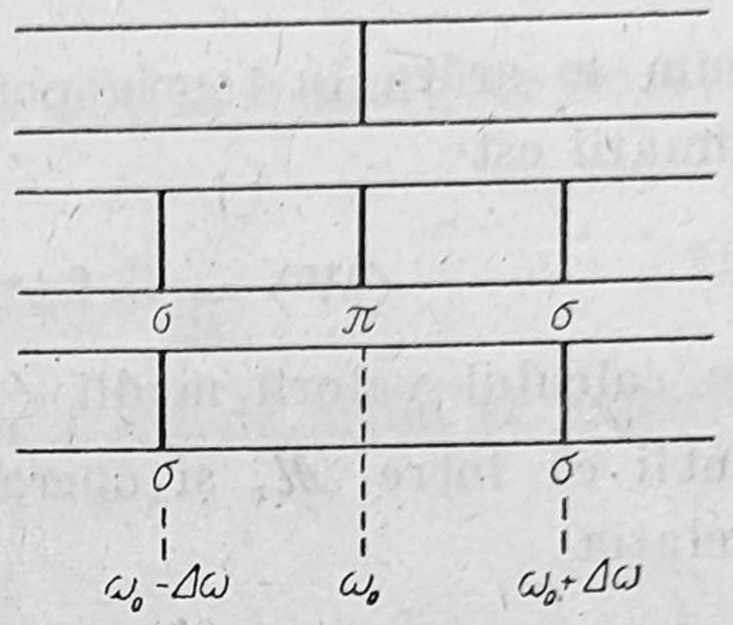


Fig. 11.8

componentei π este egală cu jumătate din intensitatea liniei nedespicate, în timp ce intensitatea fiecărei componente σ este a patra parte din intensitatea liniei nedespicate. În cazul observației longitudinale, intensitatea fiecărei componente σ este egală cu jumătate din intensitatea liniei nedespicate. În sfîrșit, în cazul observației după un unghi θ în raport cu liniile de inducție, componentele σ sînt polarizate eliptic și au intensitatea

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{2}(1 + \cos^2\theta). \tag{11.29}$$

Pentru majoritatea liniilor spectrale despicarea este mult mai complicată (efect Zeeman complex) apărînd în observația transversală mai multe componente π — plan-polarizate paralel cu **B** — și mai multe perechi simetrice de componente σ — plan-polarizate perpendicular pe **B**. Și în efectul complex longitudinal dispar componentele π, iar componentele σ sînt polarizate circular stînga, respectiv dreapta, analog polarizării componentelor σ în cazul efectului simplu. În figura 11.9 se dă un exemplu de efect complex, lungimile segmentelor care figurează componentele fiind proporționale cu intensitățile lor relative. În efectul complex, ca și în cazul efectului simplu,

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_0 = \text{const.}\ B.$$

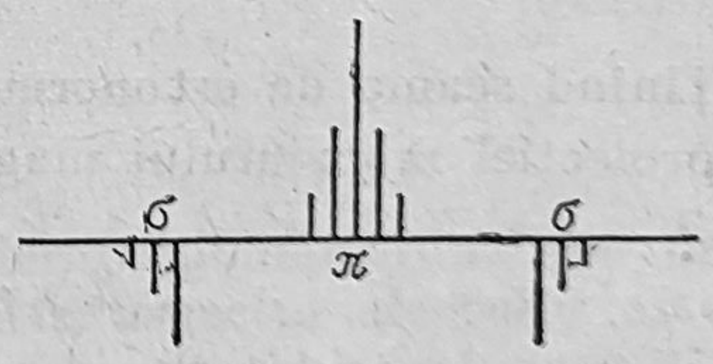


Fig. 11.9

Teoria efectului Zeeman. Ne vom referi la cîmpuri magnetice „slabe", adică de inducție **B** suficient de mică pentru ca să fie justificat cuplajul *L*, *S*, iar energia cîmpului să poată fi tratată ca o perturbație. Fie $\hat{H}^\circ$ hamiltonianul în absența cîmpului magnetic. Ecuația cu valori proprii va fi

$$\hat{H}^\circ\psi = \mathcal{E}\psi. \tag{11.30}$$

În prezența cîmpului magnetic, hamiltonianul va fi

$$\hat{H} = \hat{H}^\circ + \hat{W}$$

unde $\hat{W}$ este operatorul energiei perturbației magnetice

$$\hat{W} = -\hat{\mathcal{M}}_z B. \tag{11.31}$$

Așa cum se arăta în teoria perturbațiilor, corecția corespunzătoare primei aproximații este

$$\langle W \rangle = -\int \psi_m^* (\hat{\mathcal{M}}_z B) \psi_m \delta\tau = -\langle \mathcal{M}_z \rangle B. \tag{11.32}$$

Pentru calculul valorii medii $\langle \mathcal{M}_z \rangle$ a momentului magnetic, vom observa mai întîi că între $\hat{\mathcal{M}}_z$ și operatorul proiecției momentului cinetic total $\hat{J}$, este relația

$$\hat{\mathcal{M}}_z = -\eta \hat{J}_z$$

raportul magneto-mecanic η fiind dat de

$$\eta = g \frac{e}{2m_0}$$

unde g este factorul lui Landé, e sarcina electronului, iar m_0 masa de repaus a acestuia. Expresia lui g este dată de

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Este însă știut că ecuația cu valori proprii a operatorului $\hat{J}_z$ este

$$\hat{J}_z \psi = m_J \hbar \psi \quad (m_J = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm J).$$

Din relațiile de mai sus rezultă ușor

$$\hat{\mathcal{M}}_z \psi = -g m_J \frac{e\hbar}{2m_0} \psi.$$

Ținînd seama de ortonormarea funcțiilor proprii, obținem valoarea medie a proiecției momentului magnetic

$$\langle \mathcal{M}_z \rangle = \int \psi_m^* \hat{\mathcal{M}}_z \psi_m \, \mathrm{d}\tau = -g m_J \frac{e\hbar}{2m_0}.$$

Introducînd această expresie în (11.32) găsim

$$\langle W \rangle = g m_J \frac{e\hbar}{2m_0} B. \tag{11.33}$$

Se obține astfel energia în primă aproximație

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0^\circ + g m_J \frac{e\hbar}{2m_0} B. \tag{11.34}$$

Se vede că degenerescența după m_J este ridicată, în cîmpul magnetic energia depinzînd și de acest număr cuantic. Despicarea (11.34) a nivelelor de energie conduce la despicarea liniilor spectrale. Intr-adevăr, fie tranziția între stările (a) și (b).

În absența cîmpului magnetic, frecvența radiației este

$$\omega_{ab}^0 = \frac{\mathcal{E}_a^0 - \mathcal{E}_b^0}{\hbar}$$

În schimb, în prezența cîmpului magnetic se obține o mulțime de componente de frecvențe

$$\omega_{ab} = \omega_{ab}^0 + (g_a m_{Ja}' - g_b m_{Jb}'') \frac{eB}{2m_0} . \tag{11.35}$$

Se vede că $\Delta\omega_i$ este proporțional cu B, cum arată de altfel și experiența. Întrucît m_J este supus regulii de selecție (10.25)

$$\Delta m_J = 0, \pm 1$$

se obțin pentru tranziția $\Delta m_J = 0$, componentele de frecvențe

$$\omega_{ab} = \omega_{ab}^0 + (g_a - g_b) m_{Ja}'' \frac{eB}{2m_0} . \tag{11.36}$$

Acestea sînt componentele π, plan-polarizate paralel cu **B**, în observația transversală. Pentru tranzițiile $\Delta m_J = \pm 1$, adică pentru tranzițiile

$$m_{Jb} = m_{Ja}' \pm 1$$

se obțin componentele de frecvență

$$\omega_{ab} = \omega_{ab}^0 + [(g_a - g_b) m_{Ja}'' \pm g_a] \frac{eB}{2m_0} . \tag{11.37}$$

Acestea sînt componentele σ, plan-polarizate perpendicular pe **B** în cazul observației transversale, respectiv circular polarizate ($\mathcal{H} = \pm 1$) în cazul observației longitudinale. În cazurile particulare pentru care $g_a = g_b$, se obține efectul simplu al cărui triplet de frecvențe este

$$\omega_{ab} = \omega_{ab}^0 \quad (\Delta m_J = 0) \tag{11.38}$$

$$\omega_{ab} = \omega_{ab}^0 \pm g_a \frac{eB}{2m_0} .$$

În discuțiile de mai sus s-au luat în considerare numai tranzițiile de dipol electric. În cazul tranzițiilor de dipol magnetic, aspectul efectului este același, regulile de selecție fiind aceleași, cu singura deosebire că întrucît vectorii **E** și **B** își schimbă locul, componentele π devin σ și reciproc. În cazul tranzițiilor de cvadrupol aspectul fenomenului devine însă mult mai complicat.

Efectul Zeeman invers. Să considerăm un mediu, de exemplu vapori metalici, care prezintă în spectrul de absorbție linii spectrale de absorbție fine. Așezînd acest mediu într-un cîmp de inducție magnetică puternic, se constată că linia de absorbție se despică în mai multe componente Zeeman în mod cu totul analog despicării liniei componente din spectrul de emisie al

aceluiași metal. În cazul observației longitudinale, apar linii de absorbție σ simetrice în raport cu poziția liniei de absorbție care apare în absența despicării. La observarea transversală apar și linii de absorbție π, pe lîngă liniile σ. Explicația fenomenului este simplă. Sub acțiunea cîmpului magnetic, nivelele degenerate ale atomilor metalici se despică în nivelele Zeeman respective. În acest fel sînt posibile tranziții de absorbție, cu frecvențe egale cu ale componentelor Zeeman.

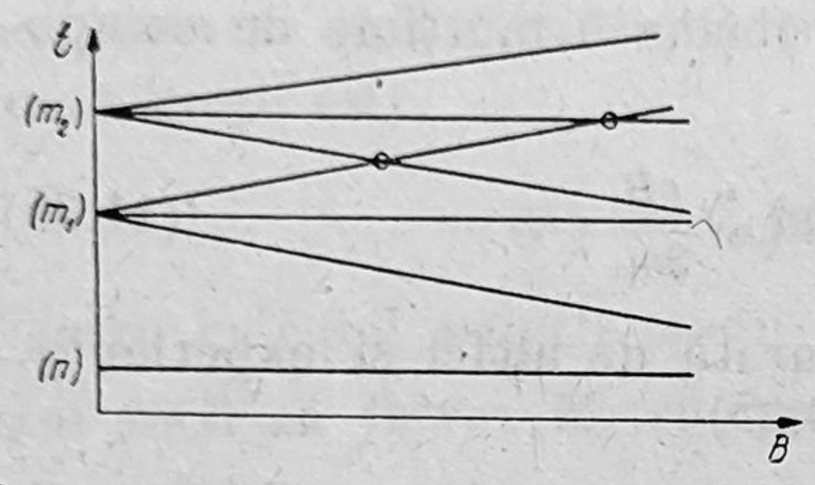


Fig. 11.10

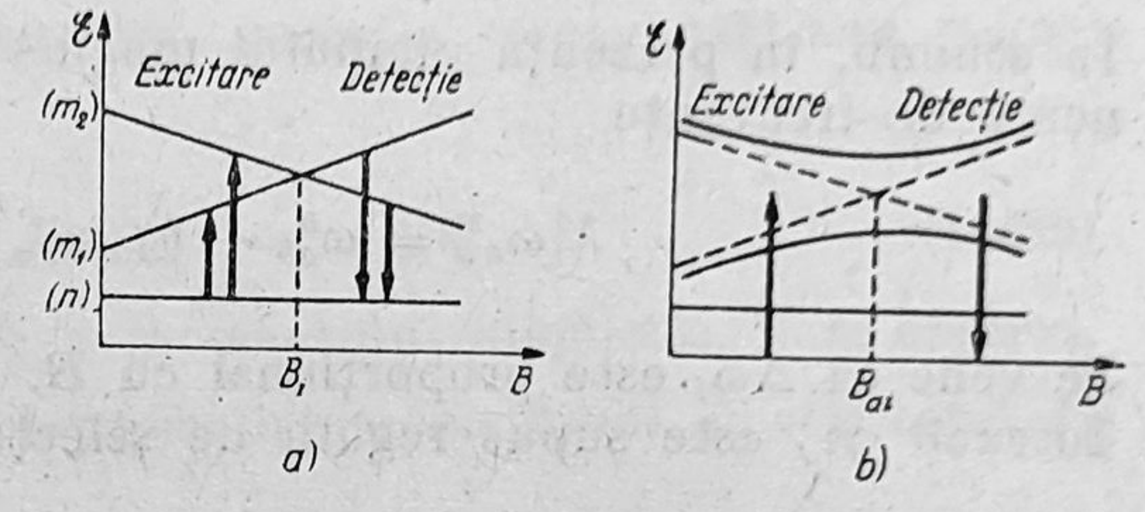


Fig. 11.11

Intersecții de nivele. Fie un nivel fundamental (n) nedegenerat și nivelele degenerate (m_1) și (m_2), care aparțin unei structuri fine sau hiperfine. Aplicînd un cîmp de inducție magnetică **B**, crescător, nivelele degenerate (m_1) și (m_2) vor suferi o despicare Zeeman (fig. 11.10). Se observă că, pentru anumite valori ale lui **B**, apar intersecții de nivele. Să considerăm mai atent o singură intersecție și nivelul fundamental (fig. 11.11, a). Dacă $B \neq B_i$, poate avea loc atît tranziția de pe nivelul (m_1) pe nivelul (n), cît și tranziția de pe nivelul (m_2) pe nivelul (n). Radiațiile corespunzătoare acestor tranziții au frecvențe diferite și nu sînt coerente, intensitatea radiației rezultante fiind egală cu suma intensităților celor două radiații. În schimb, dacă **B** ia valoarea $\mathbf{B}_i$, la care se produce intersecția nivelelor, atunci cele două nivele devin degenerate putînd fi excitate coerent astfel că de data aceasta amplitudinea rezultantă este egală cu suma amplitudinilor componente. Dacă se mărește treptat valoarea **B** pornind de la zero, atunci se constată, în dreptul intersecțiilor, modificări marcate ale intensității radiației și a gradului de polarizare a acesteia. Intersecția de nivele are loc numai dacă nu există nici o interacțiune între cele două stări. Dacă între cele două stări există interacțiuni, atunci fenomenul decurge așa cum se arată în figura 11.11, b, avînd loc *antiintersecția* nivelelor. Menționăm că intersecția nivelelor are loc și cînd $\mathbf{B} = 0$ (efectul Hanle).

Studiul intersecției nivelelor permite obținerea de informații privitoare la structura fină, respectiv hiperfină a nivelelor de energie, la momentele magnetice nucleare, la valorile factorului lui Landé etc.*

Rezonanța magnetică. În general, prin rezonanță magnetică se înțelege tranziția stimulată (absorbție și/sau emisie) între două subnivele Zeeman. În teoria tranzițiilor cuantice se arată că, între nivele cu J dat și cu aceeași paritate, singurele tranziții cu mare probabilitate sînt tranzițiile stimulate de

---

* Pentru detalii și bibliografie vezi : Șt. Tudorache, „Intersecții de nivele atomice și moleculare" în monografia *Aplicații ale laserilor* de I. M. Popescu și colab., Ed. Tehnică, București (1979).

dipol magnetic. Întrucît conform regulii de selecție $\Delta m = \pm 1$, tranzițiile nu pot avea loc decît între subnivele învecinate, energia unei tranziții fiind

$$\hbar\omega_{mn} = g\mu_B B \tag{11.39}$$

Experimental se constată că rezonanța are loc dacă se aplică asupra mediului cercetat un cîmp magnetic constant, care determină despicarea Zeeman a nivelelor de energie, iar perpendicular pe acesta un cîmp electromagnetic practic monocromatic de frecvență ω_{mn}. Deoarece subnivelele Zeeman sînt foarte apropiate, frecvența ω_{mn} este situată în domeniul microundelor.

Sub denumirea de rezonanță electronică de spin (RES), sau de rezonanță paramagnetică electronică (RPE), se înțelege rezonanța produsă în materiale paramagnetice sau impurificate cu ioni paramagnetici. Despicarea nivelelor adeseori nu este datorată numai cîmpului magnetic, ci și unor alte interacțiuni, cum ar fi efectul Stark (vezi § 11.5) datorat cîmpului electric cristalin sau cuplajului spin-orbită. Ca urmare a acestor interacțiuni se multiplică subnivelele și apar noi frecvențe de rezonanță (despicare fină). Efecte de rezonanță magnetică analoge celor observate la substanțele paramagnetice se obțin și în cazul materialelor feromagnetice (RFM), sau antiferomagnetice (RAFM).

Un alt tip de rezonanță este rezonanța magnetică nucleară (RMN). În absența unui cîmp magnetic exterior, stările de spin nuclear ale unui nucleu sînt $2I + 1$ degenerate. Un cîmp de inducție magnetică **B** va ridica degenerescența apărînd $2I + 1$ subnivele de energie

$$\Delta\mathscr{E}_{m_I} = g_I m_I \mu_N B \tag{11.40}$$

unde g_I este factorul Landé, m_I numărul cuantic magnetic de spin nuclear, iar μ_N magnetonul nuclear. Întrucît în raport cu magnetonul Bohr-Procopiu $\mu_N : \mu_B = 1 : 1836$, subnivelele sînt extrem de apropiate, $\Delta\mathscr{E}_{m_I}$ avînd valori atît de mici, încît frecvențele tranzițiilor se găsesc în subdomeniul undelor scurte din domeniul radiofrecvențelor.

În sfîrșit, în metoda dublei rezonanțe nucleare se folosește atît despicarea Zeeman provocată de un cîmp magnetic exterior cît și despicarea hiperfină a acestora ca urmare a interacțiunii cu spinul nuclear.

Metodele de rezonanță magnetică prezintă mare importanță în studiul semiconductorilor, al centrelor de culoare, al radicalilor liberi și al ionilor organici, în stereochimie, biologie etc.*

Efectul Paschen-Back. S-a văzut că în cazul în care o sursă luminoasă se află într-un cîmp magnetic, variațiile $\Delta\omega_k$ cresc proporțional cu inducția magnetică, iar subnivelele aparținînd unor multipleți diferiți se vor intersecta. Dacă, însă, componentele Zeeman aparțin unui aceluiași multiplet, se constată că la valori mari ale cîmpului de inducție, aceste componente se contopesc într-un efect Zeeman simplu, care prezintă trei componente în observația transversală, respectiv două în cea longitudinală. Fenomenul poartă numele de efect Paschen-Back.

---

* O analiză cuprinzătoare a metodelor de rezonanță și a aplicațiilor acestor metode se găsește în cartea academicianului Ioan Ursu : *Rezonanța electronică de spin*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1965. Pentru aplicații în chimie, vezi : I. Pogany și I. Banciu ; *Metode fizice în chimia organică*, Ed. Științifică, București, 1972.

În cazul cîmpurilor de intensitate intermediară efectul este mai complicat. Termenul de „cîmp intens“ este relativ, deoarece un cîmp de o aceeași intensitate poate produce un efect Paschen-Back complet în cazul unui multiplet care ocupă un domeniu îngust de frecvențe și un efect incomplet în cazul unui multiplet care ocupă un domeniu mai larg.

Efectul Paschen-Back apare în momentul în care cuplajul dintre momentul magnetic orbital $\mathcal{M}_L$ și cîmpul magnetic, respectiv cel dintre momentul magnetic de spin $\mathcal{M}_s$ și cîmpul magnetic, devine mai strîns decît cuplajul L, S. În cîmpurile intense, în care efectul este complet, cîmpul magnetic acționează separat asupra fiecăruia din vectorii $\mathcal{M}_L$, respectiv $\mathcal{M}_s$. În acest caz, energia perturbației este

$$\varepsilon = -\{\langle \mathcal{M}_L B\rangle + \langle \mathcal{M}_s B\rangle\}. \tag{11.41}$$

Însă,

$$-\langle \mathcal{M}_L B\rangle = m_L \frac{e\hbar}{2m_0} B$$

$$-\langle \mathcal{M}_s B\rangle = 2m_s \frac{e\hbar}{2m_0} B$$

și deci

$$\varepsilon = (m_L + 2m_s) \frac{e\hbar}{2m_0} B$$

De aici urmează

$$\Delta\omega = (\Delta m_L + 2\Delta m_s) \frac{eB}{2m_0} \tag{11.42}$$

sau, ținînd seama de regulile de selecție

$$\Delta m_L = 0, \ \pm 1, \quad \Delta m_s = 0,$$

rezultă tripletul Zeeman simplu

$$\omega_0, \ \omega_0 \pm \frac{eB}{2m_0} \tag{11.43}$$

11.5. Efectul Stark

Prin efect Stark se înțelege despicarea și/sau deplasarea nivelelor de energie a unui sistem cuantic, ca urmare a interacțiunii exercitate între momentele electrice ale sistemului și un cîmp electric aplicat din exterior. Ca o consecință a acestui fapt are loc și despicarea și/sau deplasarea liniilor spectrale rezultate prin tranzițiile optice între nivelele supuse efectului Stark. Despicările și deplasările Stark ale liniilor spectrale sînt foarte mici, așa încît observarea lor necesită folosirea unor aparate spectrale cu mare putere de rezoluție. Se constată că, o dată cu creșterea intensității cîmpului electric, are loc și lărgirea liniilor spectrale, iar la intensități foarte mari liniile dispar

întrucît prin ionizare electronul care efectua tranziția este înlăturat. Cîmpul electric care produce efectul Stark poate fi aplicat din exterior, după cum poate fi chiar cîmpul electric produs de particulele încărcate care înconjoară sistemul considerat. Cînd acest sistem se află situat într-un cristal, simetria cîmpului electric care provoacă efectul Stark este determinată de simetria cristalului.

În cazul unui cîmp electric omogen aplicat din exterior electronii se găsesc într-un cîmp cu *simetrie axială*, astfel că momentul cinetic total $\hat{J}$ nu mai este o constantă a mișcării. În schimb, proiecția $\hat{J}_z$ a acestui vector pe direcția cîmpului electric (luată ca axă z) continuă să se conserve și este cuantificată de modulul numărului cuantic magnetic $|m_J|$ în felul următor:

$$\begin{aligned} &|m_J| = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots J && \text{(pentru } J \text{ întreg)} \\ &|m_J| = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \ldots J && \text{(pentru } J \text{ semiîntreg).} \end{aligned} \tag{11.44}$$

Se observă că, exceptînd nivelul $m_J = 0$, toate celelalte nivele sînt dublu degenerate, aceasta decurgînd din caracterul polar al vectorului **E**.

Înainte de a discuta diversele aspecte ale efectului Stark, menționăm că în interiorul atomilor intensitatea cîmpului electric este foarte mare, de ordinul 10^{11} V/m, așa încît cîmpurile aplicate din exterior pot fi întotdeauna tratate ca mici perturbații.

Efectul Stark pătratic. Toate microsistemele situate într-un cîmp electric capătă un moment electric de dipol, proporțional cu intensitatea **E**, a cîmpului electric. Pe de altă parte, energia perturbației determinată de interacțiunea dintre momentul electric și cîmpul electric este de asemenea proporțională cu intensitatea cîmpului electric așa încît în primă aproximație variația energiei unui nivel (n) datorată perturbației va fi

$$\Delta\mathcal{E}_n = -\frac{1}{2}\sum_{i,\,k}\alpha_{ik}^{(n)}E_iE_k \qquad (i,\ k = x,\ y,\ z). \tag{11.45}$$

$\alpha_{ik}^{(n)}$ sînt componentele tensorului simetric denumit *polarizabilitate*, care leagă componentele momentului de dipol $\mathbf{d}^{(n)}$, de componentele intensității cîmpului electric **E**

$$d_i^{(n)} = \sum_k \alpha_{ik}^{(n)}E_k. \tag{11.46}$$

Orientînd axa z pe direcția vectorului **E**, (11.45) devine

$$\Delta\mathcal{E}_n = -\frac{1}{2}\alpha_{zz}^{(n)}E^2. \tag{11.47}$$

În mecanica cuantică se arată * că

$$\alpha_{zz}^{(n)} = \alpha_n + 2\beta_n\left[|m_J|^2 - \frac{1}{3}J(J+1)\right] \tag{11.48}$$

unde $|m_J|$ ia valorile date la (11.44). Pentru $m_J = 0$, variația energiei se reduce la simpla deplasare a nivelului nedegenerat.

---

* Vezi: L. D. Landau, E. M. Lifșit, *Mecanica cuantică*, § 76 (traducere din limba rusă), Ed. Tehnică, București, 1965.

Efectul Stark liniar. Atomul de hidrogen și ionii hidrogenoizi prezintă efectul Stark liniar, deplasările în acest caz fiind mult mai mari decît în cazul efectului pătratic. Efectul liniar este datorat faptului că atomul de hidrogen are un moment dipolar permanent nenul. Existența unui astfel de moment dipolar se explică cuantic prin particularitatea atomului de hidrogen de a prezenta degenerescența stărilor după numărul cuantic l. Această degenerescență „accidentală", consecință a simetriei atomului de hidrogen, permite ca în stări cu același număr cuantic principal n, deci cu aceeași energie, numărul cuantic orbital l să ia valori diferite, cu parități diferite. În acest fel poate apare un moment dipolar permanent, diferit de zero. În efectul Stark liniar se despică toate nivelele, cu excepția nivelului cu $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$. Și în acest efect se păstrează dubla degenerescență după m. În observația transversală se observă trei componente : o componentă π ($\Delta \mid m \mid = 0$) plan-polarizată paralel cu cîmpul electric și două componente σ ($\Delta \mid m \mid = \pm 1$) situate simetric față de componenta π și plan-polarizate perpendicular pe direcția cîmpului. În observația longitudinală se observă numai cele două componente σ, care sînt nepolarizate. Efectul liniar se observă și la nivelele de rotație ale moleculelor care posedă moment dipolar permanent. În absența momentului permanent însă, nu apare decît efectul pătratic.

În cîmpuri foarte intense, superioare valorii 10^7 V/m, energia perturbației poate prezenta și termeni de ordin superior

$$\Delta \mathscr{E} = aE + bE^2 + cE^3 + \ldots$$

Rezonanța electrică. Analog rezonanței magnetice discutate la finele precedentului paragraf, se poate obține și rezonanța electrică, drept urmare a tranzițiilor între două subnivele Stark ($\Delta \mid m \mid = 1$). Substanța studiată este supusă, pe de o parte, unui cîmp electric $\mathbf{E}$ constant care produce despicarea nivelelor. Dacă se aplică, pe de altă parte, un cîmp de microunde, al cărui vector $\mathbf{E}_\sim$ este perpendicular pe $\mathbf{E}$ și a cărui frecvență este egală cu frecvența tranziției între cele două subnivele Stark, se constată absorbția microundelor. Aceste fenomene de rezonanță electrică pot furniza informații interesante asupra momentelor dipolare ale moleculelor.

11.6. Procese de difuzie elastică a luminii

În accepțiunea cea mai generală a termenului, prin difuzia luminii într-un mediu se înțelege apariția unor unde secundare cu direcții de propagare diferite de direcția de propagare a undei primare. Dacă frecvența undelor secundare este egală cu frecvența undei primare, se spune că difuzia este elastică (difuzie Rayleigh). Dacă, însă, frecvențele undelor difuzate diferă de cea a undei primare, procesele de difuzie sînt neelastice. Aceste procese vor fi studiate în paragraful următor.

Apariția difuziei este legată întotdeauna de prezența unor neomogenități ale mediului, cu o întindere care nu diferă decît cu 1—2 ordine de mărime de lungimea de undă. Într-adevăr, macroscopic vorbind, efectul neomogenităților datorate structurii atomiste a mediului este neglijabil atît timp cît fluctuațiile sînt și ele neglijabile. În aceste condiții undele secundare, emise de

molecule ca urmare a tranziţiilor induse de unda primară, sînt coerente Deoarece aceste unde interferă, nu are loc difuzia luminii, ci se reconstruieşte unda primară. Dimpotrivă, dacă există fluctuaţii ale densităţii, suspensii coloidale etc. undele secundare sînt necoerente întrucît între aceste neomogenităţi nu există corelaţii. În plus, ca urmare a agitaţiei termice, aceste centre de difuzie se deplasează aleatoriu, astfel încît şi diferenţa de fază variază de asemenea aleatoriu. Undele secundare necoerente formează lumina difuzată.

Ca urmare a procesului de difuzie, intensitatea undei primare scade exponenţial, întrucît aceasta transferă energie undelor secundare. Notînd ca de obicei cu α coeficientul de absorbţie, legea scăderii intensităţii luminoase este

$$I(x) = I_0 \exp[-(\alpha + h)x]. \qquad (11.49)$$

Coeficientul de extincţie h caracterizează atenuarea undei prin difuzie în mediul considerat.

*Difuzia în medii tulburi**. Un mediu se numeşte tulbure dacă în el sînt dispersate particule coloidale. Astfel, fumul, ceaţa, emulsiile sînt medii tulburi. Dacă dimensiunile particulelor dispersate sînt cu un ordin de mărime mai mici decît lungimea de undă, se constată experimental următoarele:

a) Lumina difuzată este polarizată. Dacă unda luminoasă primară este total polarizată, lumina difuzată este de asemenea total polarizată indiferent de direcţia de observaţie. Dacă, însă, unda primară este o undă de lumină naturală, atunci undele difuzate pe o direcţie perpendiculară pe direcţia de propagare a undei primare sînt total polarizate şi anume în planul format de aceste două direcţii, în timp ce undele difuzate după alte direcţii sînt doar parţial polarizate.

b) Intensitatea luminii difuzate depinde de unghiul θ dintre direcţia de propagare a undei primare şi direcţia de observaţie, conform următoarei legi:

$$I_\theta = I_{\pi/2}(1 + \cos^2 \theta). \qquad (11.50)$$

În figura 11.12 se arată *indicatoarea de difuzie*. Aceasta este o suprafaţă generată de extremităţile vectorilor cu originea în centrul de difuzie, de normă egală cu I_θ şi orientaţi după unghiul θ, unghiul φ luînd toate valorile din intervalul $[0, 2\pi]$.

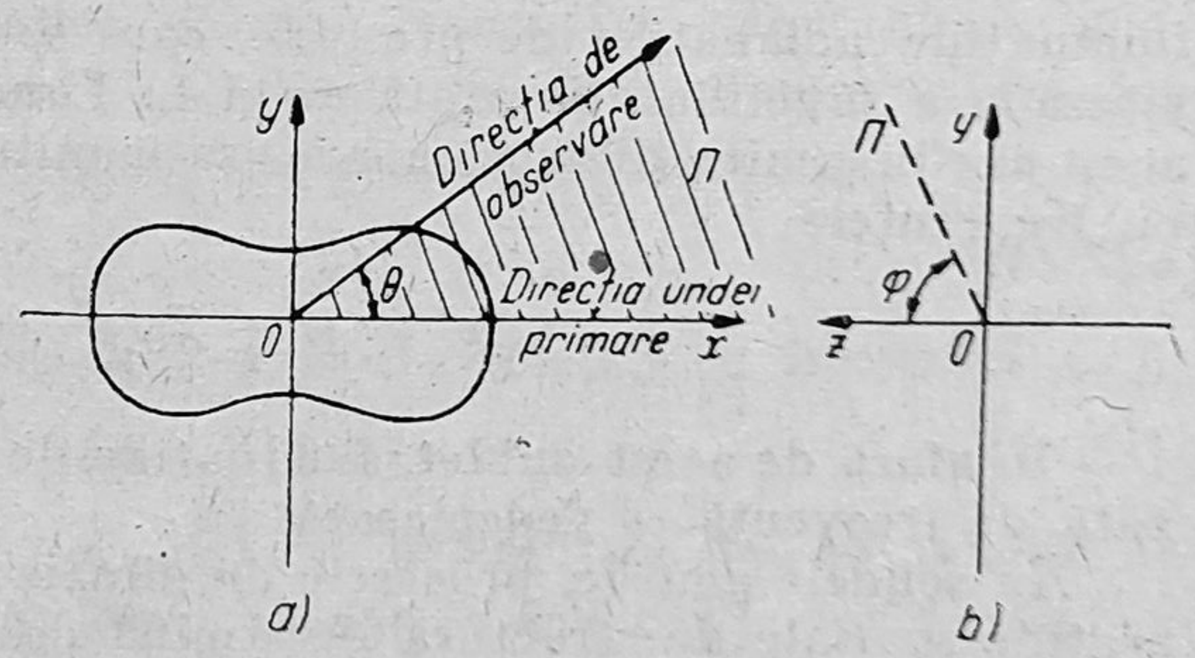


Fig. 11.12

c) Intensitatea $I_{\pi/2}$ este invers proporţională cu λ^4, factorul de proporţionalitate depinzînd de numărul de particule difuzante din unitatea de volum, de dimensiunile particulelor, de gradul de neomogenitate al mediului şi de distanţa r de la centrul de difuzie pînă la punctul de observaţie

$$I_{\pi/2} = I_0 \frac{F(r)}{\lambda^4} \qquad (11.51)$$

unde I_0 este intensitatea undei primare.

---

* Difuzia în medii tulburi a fost semnalată în antichitate de Lucretius şi studiată ştiinţific în secolul al XIX-lea mai întîi de fizicianul irlandez Tyndall.

d) Coeficientul de extincție scade cu λ^4 conform relației.

$$h = \frac{16}{3}\pi\frac{2\pi^2(n-1)^2}{N\lambda^4} \tag{11.52}$$

unde n este indicele de refracție al mediului asimilat unui gaz perfect, iar N numărul particulelor difuzante din unitatea de volum.

Toate aceste observații experimentale sînt justificate și teoretic*.

Menționăm că în cazul în care dimensiunile particulelor sînt egale sau mai mari decît lungimea de undă a radiației $I \sim \lambda^{-p}$, unde p este un exponent inferior lui 4 și care scade o dată cu creșterea dimensiunilor particulelor. De asemenea, în acest caz apare și *efectul Mie*, care consistă în faptul că intensitatea luminii difuzate după unghiul $\theta < \pi/2$ este mai mare decît cea a luminii difuzate după unghiuri $\theta > \pi/2$, efect cu atît mai marcat, cu cît dimensiunile particulelor sînt mai mari. Totodată, radiația difuzată chiar și sub unghiul $\theta = \pi/2$ nu este polarizată decît parțial.

Difuzia în gaze. Prezintă interes difuzia luminii în gaze pure la presiuni pentru care λ^2 este foarte mare în raport cu drumul liber mediu al moleculelor. În astfel de medii gazoase pot apare fluctuații ale densității care determină variații ale permitivității scalare, cît și neregularități ale orientărilor moleculelor, în care caz perturbarea permitivității are caracter tensorial. Culoarea albastră a cerului se explică drept o consecință a difuziei moleculare a luminii solare pe fluctuațiile de densitate ale aerului. Fluctuațiile de densitate sînt însă mari mai ales la temperaturi situate în jurul temperaturii critice (Smoluchowscki). Cînd temperatura tinde către temperatura critică, coeficientul $(\partial\rho/\partial p)_T \to \infty$, astfel că fluctuațiile pot deveni importante și, în consecință, și difuzia luminii devine sensibilă (opalescență critică). Totuși, și în acest caz energia luminii difuzate este mică, de ordinul unei milionimi din energia undei primare.

Difuzia în lichide și solide amorfe. În lichidele pure sînt foarte importante fluctuațiile adiabatice de presiune, care se propagă în mediul respectiv cu viteza u a sunetului. Se arată (vezi L. Landau și L. Lifșiț, luc. cit.), că în acest caz în lumina difuzată apare așa-numitul dublet Brillouin-Mandelstamm cu frecvențele

$$\omega' = \omega \pm 2\omega\frac{u}{c}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{11.53}$$

În afară de acest dublet, fluctuațiile de entropie determină o undă difuzată de frecvență ω nedeplasată.

În solidele amorfe, procesele de difuzie sînt mult mai complicate. Fluctuațiile spațiale de structură determină difuzia fără modificarea frecvenței. Pe de altă parte, existența în solide a două tipuri de unde elastice, longitudinale și transversale, cu viteze u_l, respectiv u_t, conduce la apariția a două dublete de frecvențe

$$\omega_l' = \omega \pm u_l q. \qquad \omega_t' = \omega \pm u_t q \tag{11.54}$$

unde $q = |\mathbf{K}' - \mathbf{K}|$, $\mathbf{K}$ fiind vectorul de undă al undei primare, iar $\mathbf{K}'$ cel al undei difuzate.

---

* Pentru teoria clasică a difuziei Raylcigh, vezi : L. Landau, E. Lifșit, *Electrodinamica mediilor continue* (traducere din limba rusă), Ed. Tehnică, București, 1968.

Difuzia superficială la lichide. Ca urmare a agitației termice, suprafața lichidelor ar trebui să prezinte o anumită „rugozitate". Această tendință spre rugozitate este însă în competiție cu tensiunea superficială care tinde ca suprafața lichidului să fie cît mai netedă. În cazul suprafeței de separație aer-lichid, observația difuziei superficiale este foarte dificilă. Mult mai puternică este însă difuzia luminii la suprafața de separație a două lichide în condiții în care tensiunile superficiale ale acestora au valori foarte apropiate. Fenomenul apare foarte clar în jurul temperaturii critice de miscibilitate a celor două lichide. Menționăm că în cazul difuziei superficiale, intensitatea luminii difuzate este invers proporțională cu λ^2.

11.7. Procese de difuzie neelastică a luminii

Difuzia luminii de tip Rayleigh, discutată în paragraful precedent, constituie un caz foarte particular de interacțiune a undelor electromagnetice cu mediul în care se propagă. În general, constituția moleculară, respectiv structura cristalină a mediului, determină interacțiuni neelastice, pentru fiecare frecvență a radiației primare unda difuzată prezentînd un spectru de radiații destul de complex. Interacțiunile neelastice dintre lumină și substanță au fost prezise mai întîi teoretic de către Lommel, în cadrul teoriei clasice a cîmpului electromagnetic, iar după apariția concepțiilor cuantice de către Smekal. Cercetarea experimentală a acestor interacțiuni a fost inițiată practic în același timp (1928) de către C. V. Raman și K. S. Krishan în India și de către G. Landsberg și L. I. Mandelstamm în U.R.S.S. În literatura mondială s-a încetățenit pentru aceste interacțiuni denumirea de efecte tip Raman*.

Efectul Raman spontan. Dacă unda primară este emisă de o sursă convențională, efectul este *spontan*, adică datorat tranzițiilor spontane și *liniar*. Fiecărei linii spectrale de frecvență ω_0 a undei primare, îi aparțin, în unda difuzată, un număr de sateliți Stokes (sau „roșii") cu frecvența

$$\omega_i^{(r)} = \omega_0 - \Delta\omega_i \qquad (11.55\,a)$$

și un număr egal de sateliți anti-Stokes (sau „violeți") cu frecvența

$$\omega_i^{(v)} = \omega_0 + \Delta\omega_i \qquad (11.55\,b)$$

situați simetric față de linia undei primare. Diferențele $\Delta\omega_i$ se numesc deplasări Raman. Difuzia Raygleigh apare așadar ca acel caz particular în care deplasarea Raman este nulă. Deplasările Raman sînt caracteristici ale mediului difuzant și sînt strîns legate de frecvențele proprii ale moleculelor, respectiv de modurile proprii de oscilație ale rețelelor cristaline. Intensitatea luminoasă a sateliților anti-Stokes este, la temperatura obișnuită, foarte mică, dar o dată cu încălzirea mediului crește exponențial cu temperatura absolută.

* În cele ce urmează se vor semnala doar tipurile de interacțiuni care conduc la spectre Raman. Asupra teoriei acestor interacțiuni, cît și asupra aspectelor experimentale, recomandăm extrem de interesanta și de cuprinzătoare monografie : N. Avram, *Introducere în spectroscopia Raman*, Ed. Facla, Timișoara, 1982, care de altfel a și stat la baza elaborării acestui paragraf.

Teoria semicuantică (în care sistemele difuzante sînt sisteme cuantice, în timp ce radiația este privită ca un sistem clasic) a efectului Raman este asemănătoare teoriei dispersiei luminii dată în § 10.5, dar dezvoltată de data aceasta pînă la aproximația de ordinul al II-lea (vezi N. Avram, luc. cit. § 3). În acest caz, teoria perturbațiilor conduce la stări „virtuale", care au un rol

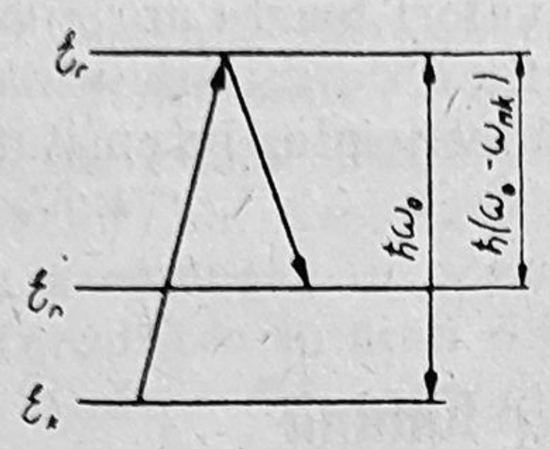


Fig. 11.13

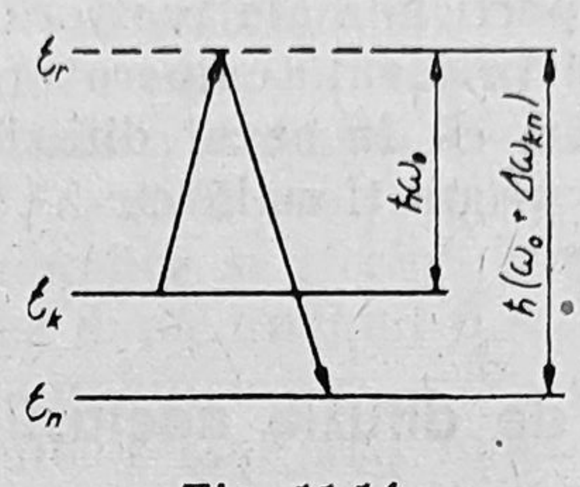


Fig. 11.14

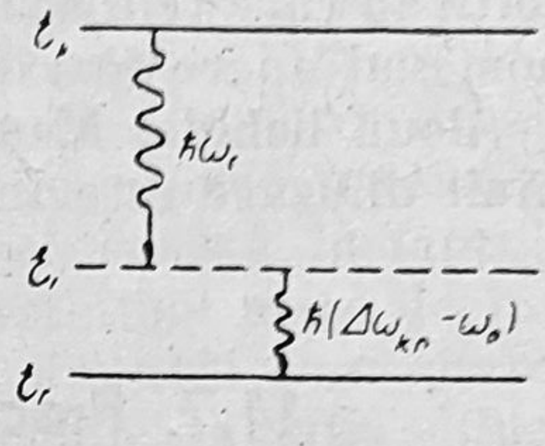


Fig. 11.15

important în interpretarea fenomenului. Să considerăm mai întîi emisia sateliților Stokes (fig. 11.13). Inițial, sistemul se află într-o stare proprie cu energia $\mathcal{E}_k$. Radiația primară, de frecvență ω_0, excită sistemul, care trece astfel în starea virtuală cu energia $\mathcal{E}_r$, pentru a trece apoi în starea proprie cu energia $\mathcal{E}_n > \mathcal{E}_k$. Acest ultim salt, este însoțit de emisia fotonului difuzat cu frecvența $\omega_0 - \Delta\omega_{nk}$. Apariția sateliților anti-Stokes (fig. 11.14) are loc cînd sistemul se găsește inițial într-o stare *excitată*, cu energia $\mathcal{E}_k$, și, după ce trece sub acțiunea radiației primare cu frecvența ω_0 pe nivelul virtual de energie $\mathcal{E}_r$, revine pe un nivel cu energia $\mathcal{E}_n < \mathcal{E}_k$, emițînd un foton difuzat cu frecvența $\omega_0 + \Delta\omega_{kn}$.

Dacă sistemul se află inițial într-o stare excitată cu energia $\mathcal{E}_k > \hbar\omega_0$, unde ω_0 este frecvența radiației primare, atunci la trecerea sistemului pe nivelul fundamental are loc emisia a doi fotoni difuzați (fig. 11.15) cu frecvențele ω_0, respectiv $\Delta\omega_{kn} - \omega_0$.

Mulțimea nivelelor de energie ale sistemelor implicate în tranzițiile cuantice care determină apariția luminii difuzate pot fi în cazul substanțelor în stare moleculară : nivele electronice, nivele de vibrație sau nivele de rotație. În cazul cristalelor intervine difuzia luminii pe cvasiparticule de tipul fononi, polaritoni, magnoni, plasmoni, excitoni etc.

Efecte Raman neliniare. În aceste efecte, amplitudinea momentului electric dipolar indus al sistemului difuzant nu mai depinde liniar de amplitudinea undei primare. Un astfel de exemplu este efectul *hiper Raman* (fig. 11.16). Inițial, sistemul se găsește într-o stare neexcitată de energie $\mathcal{E}_k$. Unda primară este o radiație laser de mare putere. Sistemul trece într-o stare virtuală de energie $\mathcal{E}_r$ sub acțiunea a *doi* fotoni fiecare de energie $\hbar\omega$, astfel că $\mathcal{E}_r - \mathcal{E}_k = 2\hbar\omega_0$. Sistemul trece apoi pe un al doilea nivel virtual $\mathcal{E}_p$ și apoi în starea finală cu energia $\mathcal{E}_n$, emițîndu-se radiația Stokes hiper Raman de frecvență

$$\omega = 2\omega_0 - \Delta\omega_{kn}.$$

În figura 11.17 se arată apariția radiației anti-Stokes hiper Raman cînd sistemul se găsește inițial într-o stare excitată. Din figura 11.16 și 11.17 se vede că în cazul în care nivelele de energie $\mathcal{E}_k$, respectiv $\mathcal{E}_n$ se confundă, radiația

difuzată are frecvența $2\omega_0$, adică dublul frecvenței radiației primare (efect hiper Rayleig). Intensitatea liniilor hiper Raman este de circa un milion de ori mai slabă decît cea a liniilor efectului Raman spontan.

Există posibilitatea să se obțină o radiație Raman coerentă (efect Raman stimulat) dacă, pe lîngă unda primară, asupra mediului difuzant acționează

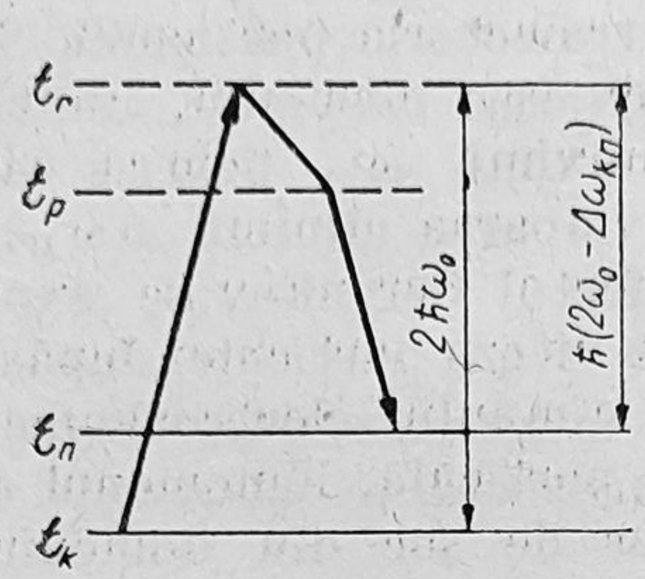


Fig. 11.16

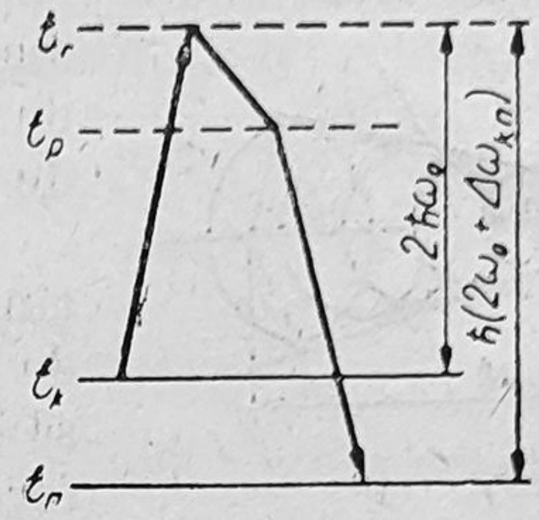


Fig. 11.17

și o undă de frecvență egală cu cea a liniei Raman, apărînd astfel un efect de amplificare a radiației Raman. Un alt exemplu de difuzie Raman coerentă îl constituie efectul denumit pe scurt CARS*. Pentru obținerea acestui efect, se iradiază mediul considerat cu două radiații practic monocromatice de frecvențe ω_1, respectiv ω_2 astfel alese încît diferența $\omega_1 - \omega_2$ să coincidă cu una din frecvențele proprii ale sistemului cuantic. Ca urmare a interacțiunii acestor radiații cu mediul apare o undă difuzată coerentă, de frecvență anti-Stokes

$$\omega = \omega_1 + (\omega_1 - \omega_2) = 2\omega_1 - \omega_2. \tag{11.56}$$

11.8. Efectul Cerenkov, radiația de frînare și radiația de tranziție

Efectul Cerenkov. Să considerăm un dielectric izotrop și nemagnetic, de indice de refracție

$$n(\omega) = \frac{c}{v(\omega)} \tag{11.57}$$

unde $v(\omega) < c$ este viteza de fază a undelor electromagnetice în acest mediu. Să presupunem acum că în mediul respectiv sosește o particulă încărcată, avînd o energie suficientă pentru ca viteza u a acesteia să fie cuprinsă în intervalul

$$c > u > v(\omega).$$

Așadar, fără a se contrazice teoria relativității restrînse, particula se deplasează în dielectric cu o viteză *superioară* vitezei de fază a luminii în acel mediu.

* Denumirea provine din prescurtarea expresiei din limba engleză : Coherent AntiStokes Raman Scattering (difuzie coerentă Raman anti-Stokes).

Experimental se constată că în acest caz apare o luminiscență slabă, care se propagă după un unghi θ, dat de relația

$$\cos\ \theta = \frac{v}{u}\cdot \tag{11.58}$$

Această radiație, denumită radiație Cerenkov, este plan-polarizată în planul determinat de direcția de propagare și de traiectoria particulei. Spectrul radiației Cerenkov este continuu, limitat superior de frecvența maximă ω_M pentru care indicele de refracție ia valoarea minimă $n(\omega_M) = 1$.

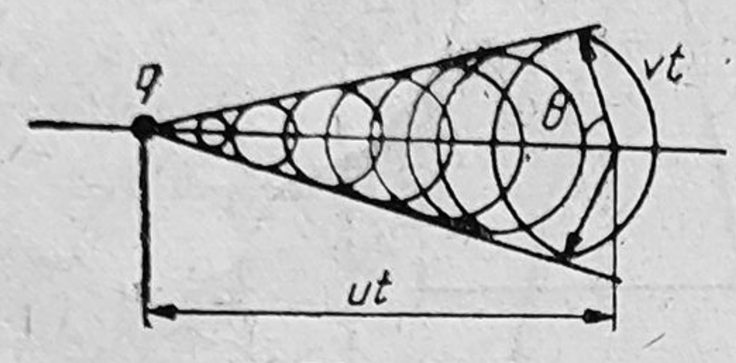


Fig. 11.18

Intuitiv, efectul Cerenkov se explică admițînd că întrucît viteza particulei depășește viteza de propagare a cîmpului electromagnetic, acesta se desprinde de particulă. Fenomenul este analog formării undelor de șoc din domeniul acustic, care apar cînd un corp se deplasează cu o viteză supersonică. În figura 11.18 se arată, cîmpul produs de o particulă care se deplasează cu o viteză $u > v$. Din figură se deduce ușor relația (11.58.)

Emisia fotonului trebuie privită ca un efect cuantic relativist care se desfășoară cu conservarea energiei și a impulsului. Notînd cu p, respectiv p' impulsul particulei înainte, respectiv după emisia fotonului de frecvență ω, conservarea energiei se scrie

$$c(p^2 + m_0^2c^2)^{1/2} - \hbar\omega = c(p'^2 + m_0^2c^2)^{1/2} \tag{11.59}$$

sau, după ridicarea ambilor membri la pătrat și substituția $\hbar\omega/c = \hbar K/n$, unde n este indicele de refracție,

$$p'^2 = p^2 + (\hbar K/n)^2 - 2\hbar K(p^2 + m_0^2c^2)^{1/2}/n.$$

Observînd că

$$(p^2 + m_0^2c^2)^{1/2} = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{m_0c}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{c}{u}\,\frac{m_0u}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{cp}{u}$$

rezultă

$$p'^2 = p^2 + (\hbar K/n)^2 - 2(\hbar cKp/nu). \tag{11.60}$$

Conservarea impulsului conduce, pe de altă parte, la expresia

$$p'^2 = p^2 + \hbar^2K^2 - 2\hbar Kp\cos\theta. \tag{11.61}$$

Comparînd (11.60) și (11.61), reducînd p^2 în cei doi membri și simplificînd $\hbar K$, se obține ușor

$$\cos\theta = \frac{c}{nu} + \frac{\hbar k}{2p}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{11.62}$$

Introducînd lungimea de undă a radiației $\lambda = 2\pi/K$ și lungimea de undă asociată particulei $\Lambda = 2\pi\hbar/p$ și ținînd seama că, în conformitate cu (11.57), $c/nu = v/u$, rezultă în definitiv

$$\cos\theta = \frac{v(\omega)}{u} + \frac{\Lambda}{2\lambda(\omega)}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{11.63}$$

Efectul se produce pentru acele frecvenţe pentru care se respectă condiţia

$$\frac{v(\omega)}{u} + \frac{\Lambda}{2\lambda(\omega)}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leqslant 1. \qquad (11.64)$$

Raportul $\Lambda/\lambda \ll 1$ chiar şi pentru acele frecvenţe pentru care condiţia (11.64) nu mai este îndeplinită. Aceasta înseamnă că pe întregul domeniu de frecvenţe pentru care se produce radiaţia Cerenkov, putem neglija în (11.63) cel de-al doilea termen din membrul drept, regăsind astfel relaţia experimentală (11.58)

$$\cos\theta = \frac{v(\omega)}{u}\,.$$

O dată cu creşterea frecvenţei şi $v(\omega)$ creşte, tinzînd spre viteza plafon c. Fenomenul nu mai are loc pentru frecvenţe superioare valorii ω_M, pentru care $v(\omega_M) = u$.

Contorii de particule bazaţi pe efectul Cerenkov permit numărarea selectivă a particulelor al căror impuls este cuprins într-un interval dat.

Efectul Cerenkov invers. În încheiere, menţionăm existenţa efectului Cerenkov invers. În plasmă, ca urmare a ciocnirii particulelor, apare radiaţia de frînare ; reciproc plasma poate absorbi radiaţia ca urmare a ciocnirilor. În mod analog, tot aşa cum electronii din plasmă cu viteza $u \geqslant v/\cos\theta$ produc radiaţia Cerenkov independent de ciocniri, este posibil şi procesul invers de absorbţie a radiaţiei, independent de ciocniri, de către electroni a căror viteză este $u \geqslant v/\cos\theta$ şi care astfel îşi sporesc energia.

Radiaţia de frînare şi radiaţia de sincrotron. Împrăştierea neelastică a particulelor încărcate în cîmpul unui atom sau al unui nucleu este însoţită de emisia unui cîmp electromagnetic denumit *radiaţie de frînare**. Spectrul acestei radiaţii este continuu, dar se întrerupe la o frecvenţă superioară limită ω_s. Dacă particula este nerelativistă, cu energia cinetică $m_0v^2/2$, expresia frecvenţei limită este

$$\omega_s = \frac{m_0v^2}{2\hbar}\,.$$

Fie acum o particulă cu sarcina q şi masa de repaus m_0, care efectuează o mişcare circulară uniformă relativistă, cu viteza v, într-un plan perpendicular pe direcţia unui cîmp magnetic omogen spaţial şi uniform în timp. În acest caz se emite o radiaţie, denumită de *sincrotron*, a cărei intensitate totală este

$$I = \frac{2q^4B^2v^2}{3\varepsilon_0 m_0^2 c^3(1-\beta^2)} \qquad (\beta = v/c).$$

Radiaţia este plan-polarizată total, intensitatea cîmpului electric al undei fiind perpendiculară pe inducţia magnetică **B** a cîmpului exterior omogen şi uniform.

Datorită caracterului periodic al mişcării, mărimile caracteristice cîmpului electromagnetic, de exemplu potenţialul vectorial, pot fi descompuse în

---

* O prezentare cuprinzătoare se găseşte în : L. Landau, E. Lifschitz, *Théorie des champs*, Ed. Mir, Moscou, 1970.

serie Fourier, obținîndu-se un spectru discret format dintr-un număr mare de linii a căror intensitate descrește exponențial pentru componentele de rang înalt. Intensitatea este maximă pentru liniile a căror frecvență este situată în jurul valorii

$$\omega_0 = \frac{qB}{m_0(1-\beta^2)}.$$

Radiația de tranziție. În timp ce radiația de frînare apare ca urmare a variației temporale a vitezei unei particule încărcate, radiația de tranziție (prezisă mai întîi de Ginsburg în 1946), se emite în cazul în care indicele de refracție al mediului variază în regiunea în care are loc deplasarea particulei încărcate. Vom considera cazul cel mai simplu și anume deplasarea unui electron cu viteza constantă u, inferioară vitezei de fază a luminii în mediu și care sosește normal pe suprafața de separație dintre vid și un metal, aproximat ca un conductor perfect, aproximație justificată nu numai pentru undele de mare lungime de undă, dar chiar și pentru cele din domeniul vizibil. Atît timp cît electronul se află încă în vid (fig. 11.19) cîmpul electric este determinat atît de sarcina $-e$ a electronului cît și de sarcina $+e$ a imaginii acestuia. La pătrunderea electronului în metal, cîmpul acestuia este complet ecranat astfel că nu mai pot fi observați nici electronul, nici imaginea sa. Această dispariție simultană a sarcinilor $-e$ și $+e$ este întrucîtva asemănătoare anihilării unei perechi electron-pozitron și, ca și în acest caz, este însoțită de emisia unei radiații, denumite în acest caz „de tranziție". Radiația emisă este concentrată într-un con de deschidere $\theta \sim \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$. În cazul particulelor ultrarelativiste aceasta aparține domeniului razelor X. Numărul fotonilor emiși este extrem de mic, de aceea pentru detectarea radiației este necesar să se folosească un număr mare de plăci. Se arată că grosimea d a plăcii trebuie să fie mai mare decît distanța de-a lungul căreia faza radiației variază cu π. Radiația de tranziție apare în general ori de cîte ori în mediul în care se deplasează o particulă încărcată există o neomogenitate a repartiției indicelui de refracție, inclusiv neomogenități statistice*.

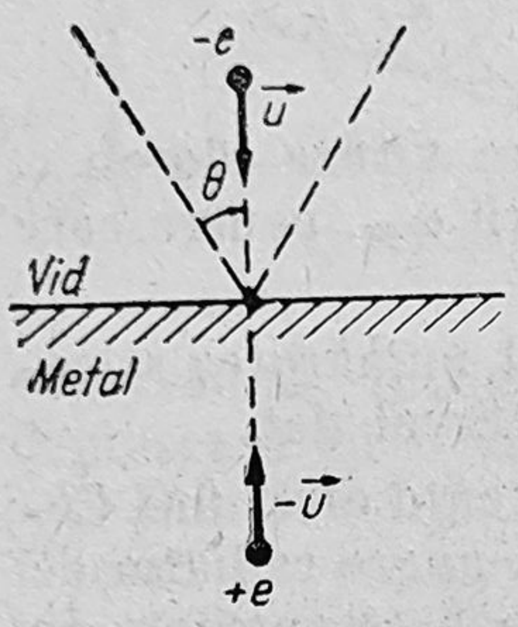


Fig. 11.19

---

* Pentru detalii privitoare la radiația de tranziție vezi : V. Ginzburg, *Physique théorique et astrophysique*, Ed. Mir., Moscou, 1978.

PARTEA A DOUA

12. NOȚIUNI FUNDAMENTALE DE OPTICĂ TEHNICĂ

12.1. Energia luminii

În acest capitol se vor defini noțiunile fundamentale necesare studierii cantitative a transferului energiei luminii în procesul de propagare a luminii prin sisteme optice, în accepțiunea opticii geometrice. Energia transferată printr-o suprafață oarecare, raportată la durata transferului, se numește fluxul energiei. Ca unitate de flux energetic se ia practic unitatea de putere (watt). Pentru caracterizarea completă a energiei luminii, în afară de fluxul total, trebuie să se cunoască distribuția spectrală a energiei.

12.1.1. Vederea în culori. Senzațiile luminoase

Acțiunea energiei luminii asupra ochiului produce ceea ce numim *senzație vizuală*. De aceea, metodele de măsurare care folosesc ochiul ca receptor se numesc *subiective*, în timp ce metodele care utilizează receptorii fizici se numesc *fizice* sau *obiective*. Ochiul poate avea senzații vizuale numai în porțiunea spectrului radiației cu $\lambda \in [400 ; 780\ mm]$. Senzațiile vizuale sînt de două feluri:

— senzație de intensitate, care depinde de energia luminii care cade în unitatea de timp pe unitatea de suprafață a retinei;

— senzație de culoare, care depinde de lungimea de undă a radiației.

Deosebirile între aceste senzații fac ca ochiul să nu poată aprecia cantitativ două radiații de intensități și de culori diferite, în schimb este destul de precis în aprecierea culorilor unor radiații de intensități egale și, de asemenea, în aprecierea intensităților a două radiații monocromatice. Totalitatea mărimilor legate de intensitate, respectiv de culoare, precum și metodele de măsurare formează două secțiuni ale opticii tehnice: fotometria și colorimetria.

12.1.2. Sensibilitatea spectrală a ochiului

Mărimea fotometrică analogă fluxului de energie este fluxul luminos. Acesta se poate obține prin compararea cu un flux considerat drept unitate. Legat de modul de a reacționa al ochiului, sau al altui receptor, la radiații de diferite lungimi de undă, s-a introdus noțiunea de *sensibilitate spectrală relativă* V_λ. Ochiul uman prezintă maximum de sensibilitate, în vedere diurnă, față de radiația cu $\lambda_0 = 555$ nm. Sensibilitatea spectrală relativă este dată de raportul $V_\lambda = W_0/W$, unde W_0 este fluxul de energie radiantă de $\lambda_0 = 555$ nm, iar W este fluxul de energie radiantă de lungime de undă λ, care produce iluminări egale pe două suprafețe perfect difuzante privite simultan. Este clar că pentru $\lambda_0 = 555$ nm avem $V_\lambda = 1$, iar în rest $V_\lambda < 1$. În vederea nocturnă curba V'_λ este deplasată puțin spre lungimile de undă mai mici (fig. 12.1).

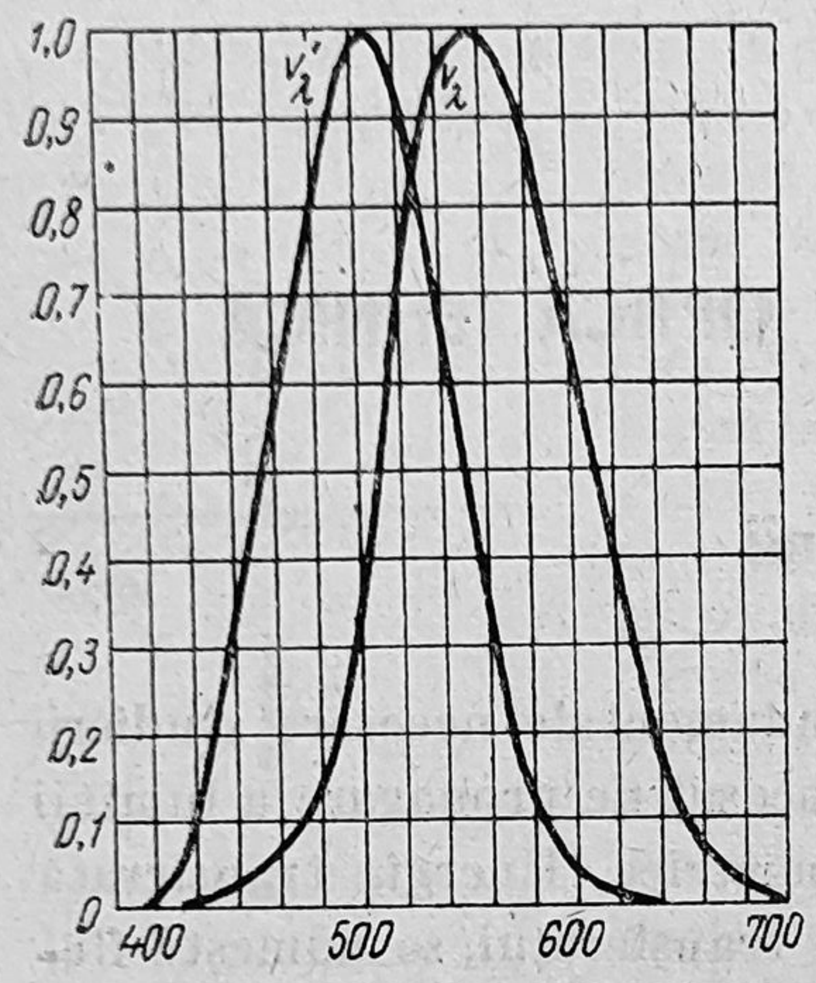


Fig. 12.1

12.1.3. Mărimi și unități fotometrice. Legile fotometriei și ale energeticii sistemelor optice

Definițiile mărimilor și unităților fundamentale și derivate pentru fotometrie sînt specificate în STAS 2849/1-73. Vom prezenta definițiile, expresiile matematice și unitățile de măsură pentru mărimile fotometrice utilizate mai des în tehnică.

a) *Fluxul energiei luminii* (sau *flux luminos*) se determină cu relația

$$\Phi = K \int_0^\infty \rho_\lambda V_\lambda \mathrm{d}\lambda \qquad (12.1)$$

unde K este o constantă care dă echivalența unităților energetice, în unități fotometrice (experimental s-a determinat $K = 692\ \mathrm{lm/W}$), ρ_λ distribuția energiei radiante (în wați), V_λ sensibilitatea spectrală relativă.

Unitatea de măsură a fluxului luminos este *lumenul*.

b) *Intensitatea luminoasă* I a unei surse ce poate fi considerată punctiformă (are dimensiuni reduse față de distanța la care se face observarea), într-o direcție dată, este raportul dintre mărimea fluxului luminos din interiorul unghiului solid elementar în jurul direcției considerate și unghiul solid

$$I = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\Omega. \qquad (12.2)$$

Dacă sursa emite uniform în toate direcțiile, atunci fluxul integral (total) rezultă

$$\Phi_{tot} = 4\pi I. \tag{12.3}$$

Intensitatea medie specifică a unei surse se determină cu relația

$$\bar{I} = \Phi_{tot}/4\pi. \tag{12.4}$$

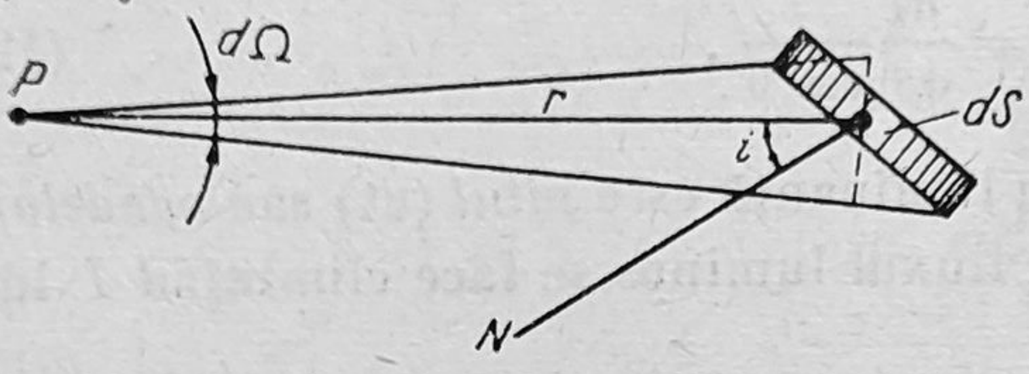


Fig. 12.2

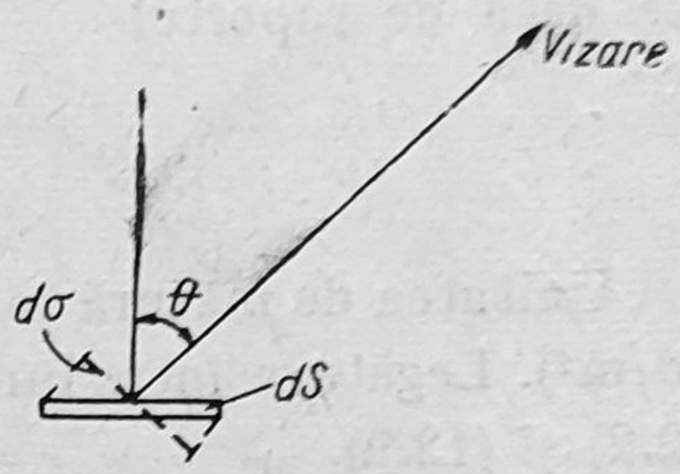


Fig. 12.3

Unitatea de măsură a intensității luminoase este *candela* — unitate fotometrică fundamentală. Definiția candelei dată de cea de-a XIII-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți (CGPM), din anul 1967, este: intensitatea luminoasă în direcție normală la o suprafață de 1/600000 m² a unui corp negru aflat la temperatura de topire a platinei $T = 2042$ K, la presiunea atmosferică $p_0 = 101\,325$ N/m².

c) Iluminarea E într-un punct al unei suprafețe se măsoară prin fluxul care cade pe unitatea de suprafață

$$E = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S \tag{12.5}$$

unde $\mathrm{d}S$ este aria elementară în jurul punctului considerat. Unitatea de măsură în SI a iluminării este *luxul* (lx). Legătura între iluminarea E și intensitatea luminoasă I se obține eliminînd fluxul luminos elementar $\mathrm{d}\Phi$ între relațiile (12.2) și (12.5) și exprimînd elementul de unghi solid în funcție de aria elementară $\mathrm{d}S$ (fig. 12.2).

Dacă i este unghiul de incidență al razei medii a fasciculului îngust cu vîrful în sursă punctiformă P, atunci

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S\cos i}{r^2}, \tag{12.6}$$

iar expresia iluminării devine

$$E = \frac{I}{r^2}\cos i = E_0 \cos i \tag{12.7}$$

ceea ce reprezintă *legea Kepler-Lambert.*

Exemple de iluminări: 0,1 lx — lună plină,
100 lx — necesară pentru citit,
10^4 lx — necesară pentru masa de operație,
10^5 lx — în plin soare.

d) Luminanța (sau *strălucirea*) L se referă la sursele luminoase extinse și reprezintă o măsură a cantității de lumină radiată de o suprafață într-o

direcție dată. Luminanța depinde de direcția de vizare. Fie θ unghiul între normala la aria elementară dS a sursei și direcția de vizare (fig. 12.3). În acest caz

$$d\sigma = dS \cos \theta \tag{12.8}$$

reprezintă proiecția lui dS pe un plan normal la direcția de vizare. Luminanța este dată de raportul

$$L = \frac{dI}{d\sigma} = \frac{dI}{dS} \frac{1}{\cos \theta}. \tag{12.9}$$

Unitatea de măsură în SI pentru luminanță este *nitul* (nt) sau *candela/m²* (cd/m²). Legătura între luminanță și fluxul luminos se face eliminînd I între (12.2) și (12.9)

$$L = \frac{d^2\Phi}{dS\, d\Omega} \frac{1}{\cos \theta}. \tag{12.10}$$

Suprafețele perfect difuzante radiază sau primesc lumina și o difuzează, astfel încît luminanța nu depinde de direcție (despre aceste suprafețe se spune că respectă *legea lui Lambert*). Practic, numai corpul negru și suprafața Soarelui sînt surse care respectă legea lui Lambert. Suprafețe difuzante care respectă cu bună aproximație această lege prezintă ipsosul, barita, sticlele lăptoase sau mate. Din relația (12.9) se observă că pentru a avea $L = \text{const.}$, este necesar ca

$$I = I_n \cos \theta \tag{12.11}$$

unde I_n reprezintă intensitatea în direcția normală la suprafața elementară dS a sursei. Astfel

$$L = \frac{dI_n}{dS} = \text{const.} \tag{12.12}$$

Fluxul luminos emis de o sursă care respectă legea lui Lambert se obține pornind de la expresia generală (12.10) și efectuînd integrala

$$\Phi = \int L \cos \theta \; dS d\Omega \tag{12.13}$$

unde se va ține seama că $L = \text{constant}$ în raport cu θ. Dacă se exprimă unghiul solid elementar

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \tag{12.14}$$

și aria coroanei sferice elementare (fig. 12.4).

$$dA = 2\pi r \sin \theta \, r d\theta \tag{12.15}$$

unghiul solid elementar devine

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta \, d\theta \tag{12.16}$$

iar fluxul luminos emis în unghiul solid avînd unghiul plan la vîrf $2\theta_0$ este :

$$\Phi = 2\pi \int L \cdot \mathrm{d}S \int_0^{\theta_0} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \pi \int L \sin^2\theta_0 \, \mathrm{d}S \qquad (12.17)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} = \pi L \sin^2\theta_0. \qquad (12.18)$$

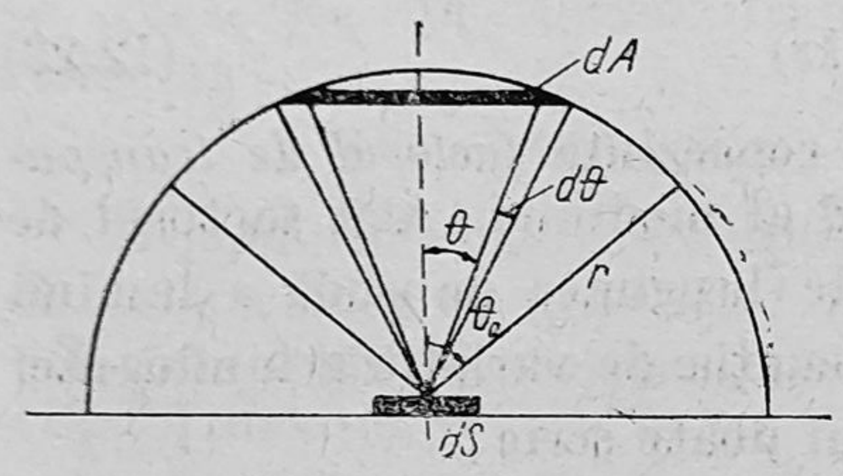


Fig. 12.4

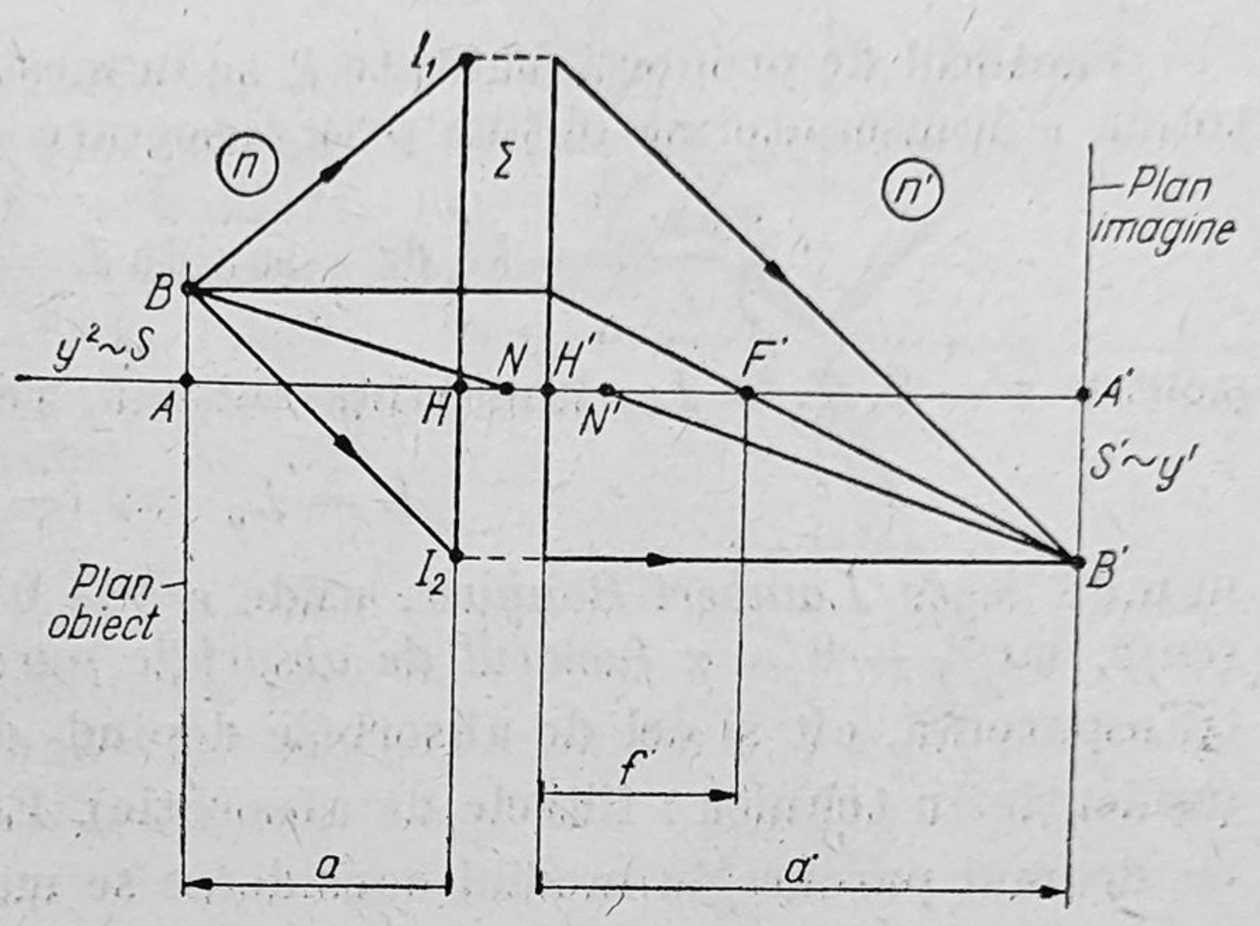


Fig. 12.5

Pentru o emisferă ($\theta_0 = \pi/2$)

$$\mathrm{d}\Phi = \pi L \, \mathrm{d}S. \qquad (12.19)$$

Fie un sistem optic centrat definit prin planele principale H, H', punctele nodale N, N' și prin focarele F, F'. Imaginea unui obiect AB se construiește ușor, considerînd focarele și punctele nodale (fig. 12.5). Dacă se notează cu L și L' luminanța obiectului de arie S și, respectiv, a imaginii de arie S', cu Σ suprafața determinată de fluxul luminos prin planele principale, atunci

$$LS = \frac{\Sigma}{a^2} = L'S' \frac{\Sigma}{a'^2},$$

Aceasta reprezintă condiția de conservare a fluxului luminos (conectarea tuburilor luminoase) printr-un sistem optic. Cum, însă : $S' \sim y'^2$, $S \sim y^2$, $\beta = y'/y = n'a'/na$, atunci

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \qquad (12.20)$$

Așadar, raportul luminanțelor imagine și obiect este egal cu pătratul raportului indicilor de refracție corespunzători (*legea lui Clausius*). Dacă cele două medii sînt identice, luminanța (strălucirea) imaginii este egală cu cea a obiectului. Dar, în realitate există o absorbție, fluxul neconservîndu-se prin sistemul optic. În acest caz :

$$L'/L = \mathcal{T}(n'/n)^2 \qquad (12.21)$$

unde $\mathcal{T} < 1$ reprezintă *factorul de transmisie* al sistemului. Legea lui Clausius se aplică nu numai în domeniul paraxial, ci și pentru sisteme cu deschideri mari, în cazul respectării condiției de aplanetism.

Reducerea luminanței prin absorbția mediului. Variația elementară a luminanței unui fascicul de raze este proporțională cu variația drumului prin mediul respectiv și cu luminanța L la un moment dat

$$\mathrm{d}L = -kL\mathrm{d}z. \tag{12.22}$$

Factorul de proporționalitate k se numește *extincție naturală.* Diminuarea totală a luminanței se obține prin integrare

$$\int \frac{\mathrm{d}L}{L} = -k\int \mathrm{d}z \quad \text{sau} \quad \ln L = -k\cdot z + C\,;$$

pentru $z = 0$, $L = L_0$, luminanța inițială, rezultînd ecuația

$$L = L_0 \exp(-kz) \tag{12.23}$$

numită *legea Lambert-Bouguer,* unde $e^{-k} = \theta$ reprezintă *factorul de transparență,* iar $1 - \theta = \alpha$ *factorul de absorbție pură* al mediului. Atît factorul de transparență, cît și cel de absorbție depind de lungimea de undă a luminii (aplicație în tehnică : filtrele de absorbție). Ecuația de variație a luminanței cu drumul parcurs în mediul considerat se mai poate scrie ;

$$L = L_0\theta^z. \tag{12.24}$$

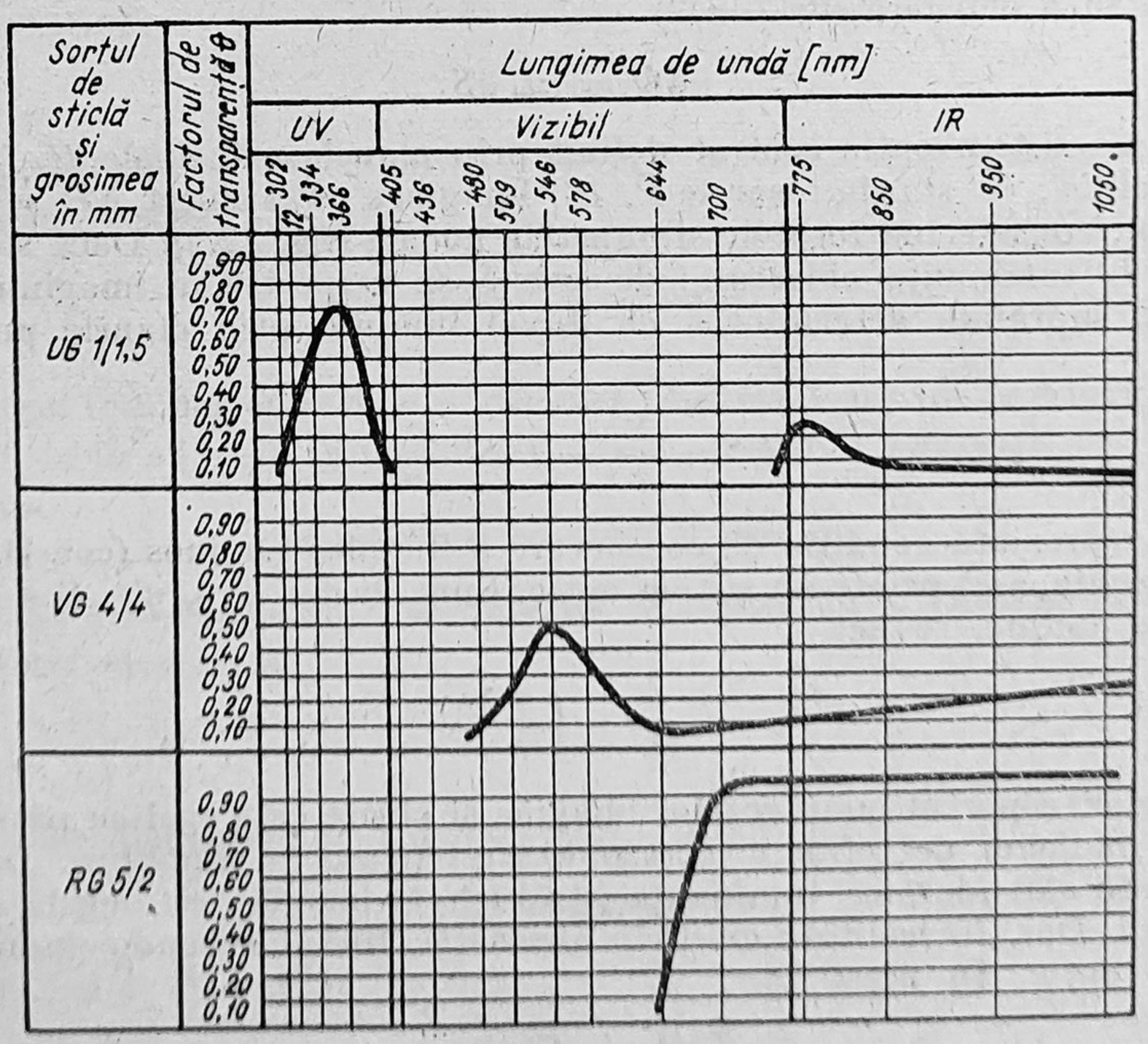


Fig. 12.6

Se mai poate utiliza și o altă notație: extincția zecimală $E_{10} = \lg(1/\theta)$, în locul extincției naturale $k = E_n = ln(1/\theta)$, între ele existînd relația de legătură

$$E_{10} = \lg e\, E_n = 0{,}43\, k.$$

În figura 12.6 sînt reprezentate caracteristicile $\theta(\lambda)$ a trei filtre de absorbție produse de firma C. Zeiss-Jena.

Reducerea luminanței prin reflexie. Să considerăm niște fascicule conice foarte subțiri în jurul razelor incidentă, refractată (transmisă în mediul următor) și reflectată (întoarsă în mediul inițial), (fig. 12.7). Neglijînd pierderile prin difuzie, fluxul incident se regăsește în fluxul transmis și cel reflectat

$$d\Phi = d\Phi' + d\Phi_r. \qquad (12.25)$$

Unghiurile solide corespunzătoare fasciculelor conice cu vîrful în I fiind $d\Omega$, $d\Omega'$, $d\Omega_r$ și folosind relația (12.13), relația (12.25) devine

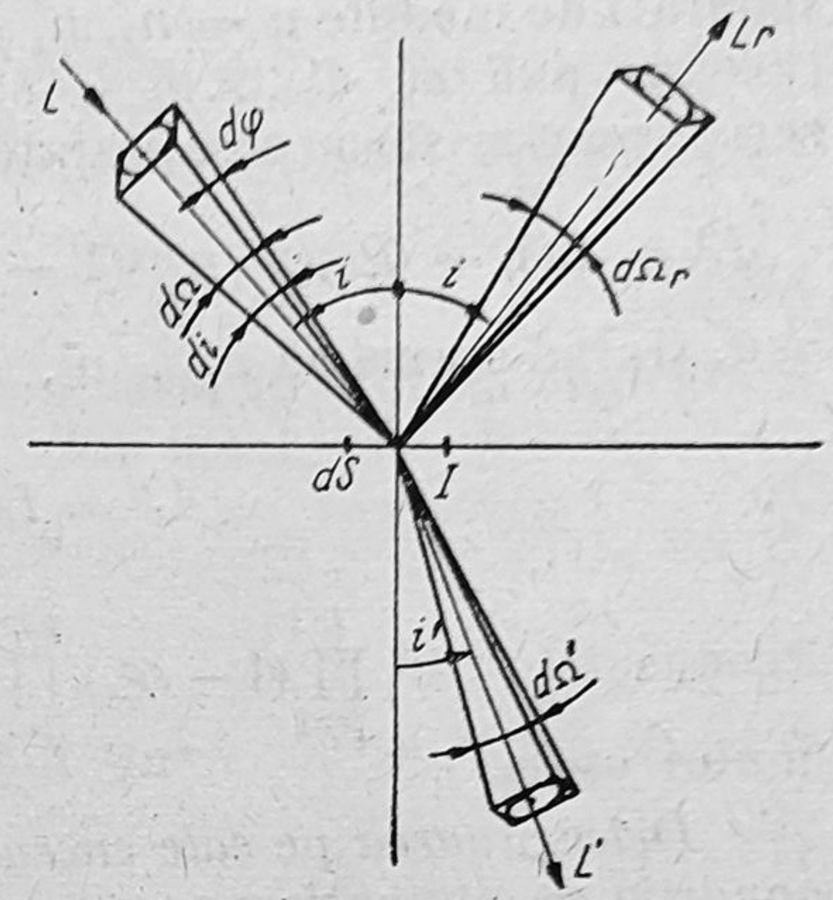


Fig. 12.7

$$L\cos i \cdot dS d\Omega = L'\cos i' dS d\Omega' + L_r \cos i dS d\Omega_r. \qquad (12.26)$$

Înmulțim legea refracției în I: $n \sin i = n' \sin i'$ cu derivata sa $n \cos i\, di = n' \cos i'\, di'$ și obținem

$$n^2 \sin i \cos i\, di = n'^2 \sin i' \cos i' di' \qquad (12.27)$$

unde se poate demonstra că

$$\sin i di d\varphi = d\Omega,$$

$$\sin i' di' d\varphi = d\Omega'.$$

Așadar, legea refracției pentru fascicule subțiri se poate scrie sub forma „*energetică*“

$$n^2 \cos i\, d\Omega = n'^2 \cos i' d\Omega'. \qquad (12.28)$$

Revenim la bilanțul energetic (12.26), care poate fi scris simplificat, ținînd seama de legea refracției scrisă sub forma (12.28) și de faptul că $d\Omega_r = d\Omega$,

$$L = L'(n/n')^2 + L_r. \qquad (12.29)$$

Raportul dintre luminanțele fasciculelor reflectat și incident se determină la studiul polarizării luminii pe baza teoriei electromagnetice a luminii. Inițial acest raport a fost determinat de Fresnel, dar ipotezele sale privind natura luminii au fost de mult timp abandonate. Pentru unghiuri de incidență mici (în practică se utilizează pînă la $i = 30°$)

$$\mathcal{R} = L_r/L = \left(\frac{n' - n}{n' + n}\right)^2 \qquad (12.30)$$

unde $\mathcal{R}$ reprezintă *factorul de reflexie* al suprafeței de separație între mediile n și n'. Factorul de transmisie rezultă :

$$\mathcal{T} = L'/L = (1 - \mathcal{R})(n'/n)^2. \tag{12.31}$$

Concluzia tehnică privind energetica unui sistem optic care se desprinde de aici este : luminanța imaginii date de un sistem optic format din k dioptri separați de mediile $n = n_1$, $n'_1 = n_2$, $n'_2, \ldots, n'_k = n'$, avînd distanțele măsurate pe axă d'_1, $d'_2, \ldots d'_{k-1}$, se obține înmulțind expresiile (12.24) și (12.31) scrise pentru fiecare suprafață de separație și pentru fiecare grosime

$$L' = L(1 - \mathcal{R}_1)(n'/n_1)^2(1 - \mathcal{R}_2)(n'_2/n_2)^2 \ldots (1 - \mathcal{R}_k)(n'/n_k)^2 \theta_1^{d'_1} \theta_2^{d'_2} \ldots \theta_{k-1}^{d'_{k-1}},$$

sau, ținînd seama că $n'_1 = n_2$, $n'_2 = n_3, \ldots, n'_{k-1} = n_k$,

$$L' = L(n'/n)^2 \prod_{j=1}^{k} (1 - \mathcal{R}_j) \prod_{j=1}^{k-1} \theta_j^{d'_j}. \tag{12.32}$$

Produsul $(n'/n)^2 \prod_{j=1}^{k} (1 - \mathcal{R}_j) \prod_{j=1}^{k-1} \theta_j^{d'_j}$ reprezintă randamentul luminos al sistemului optic.

Determinarea pe cale energetică a legii sinusurilor. Această lege reprezintă condiția de stigmatism pentru sistemele optice cu deschidere finită (în domeniul extraaxial). Se consideră un obiect luminos plan (circular) de dimensiune y relativ mică (fig. 12.8). Fie R raza undei sferice cu centrul în A și sprijinindu-se pe pupila de intrare. O suprafață elementară de forma unei zone inelare are mărimea

$$ds = 2\pi h R d\sigma = 2\pi R^2 \sin \sigma d\sigma$$

iar unghiul solid corespunzător

$$d\Omega = ds/R^2 = 2\pi \sin \sigma \, d\sigma. \tag{12.33}$$

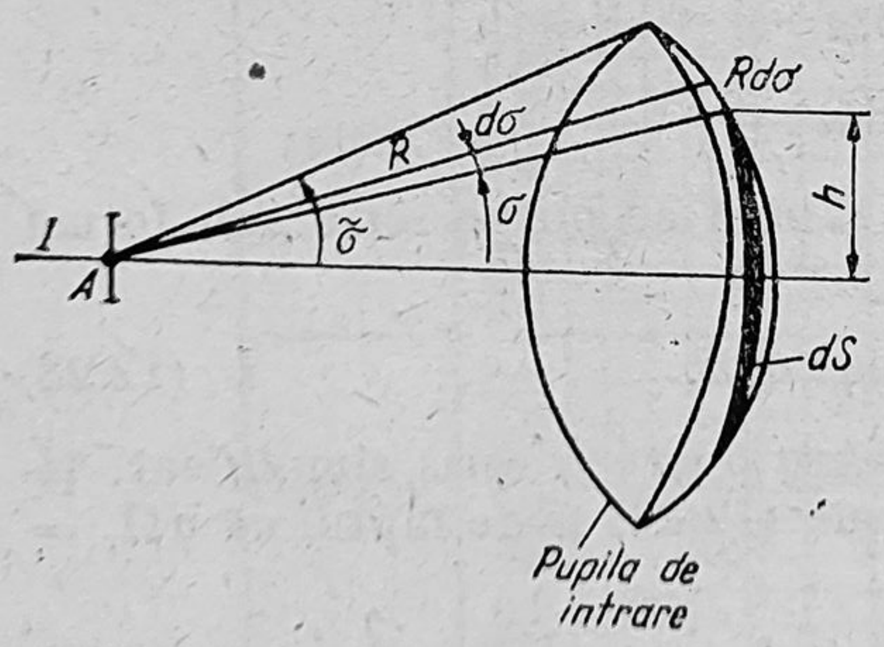


Fig. 12.8

Fluxul luminos elementar prin ds va fi, conform relației (12.13) : $d\Phi = L\pi y^2 \cos \sigma \, d\Omega$ sau, înlocuind cu (12.33),

$$d\Phi = \pi^2 L y^2 \sin 2\sigma \, d\sigma. \tag{12.34}$$

Fluxul luminos care intră într-un aparat optic are expresia

$$\Phi = \int_0^{\tilde{\sigma}} \pi^2 L y^2 \sin 2\sigma \, d\sigma = \pi^2 y^2 \int_0^{\tilde{\sigma}} L \sin 2\sigma \, d\sigma \tag{12.35}$$

sau, considerînd luminanța aceeași în toate direcțiile,

$$\Phi = L(\pi y \sin \tilde{\sigma})^2. \tag{12.36}$$

Refăcînd aceleași calcule pornind din cîmpul imagine către pupila de ieșire a sistemului optic, se obține

$$\Phi' = L'(\pi y' \sin \tilde{\sigma}')^2 \tag{12.37}$$

Pentru ca sistemul să fie ideal din punct de vedere energetic este necesar ca fluxul să se conserve, $\Phi = \Phi'$, iar luminanțele imaginii și obiectului să respecte legea lui Clausius (12.20): $L'/L = (n'/n)^2$. Ținînd seama de aceste condiții din relațiile (12.36) și (12.37) se obține legea sinusurilor (Abbe)

$$ny \sin \tilde{\sigma} = n'y' \sin \tilde{\sigma}' ; \tag{12.38}$$

$n \sin \tilde{\sigma} = A$ reprezintă *apertura numerică* a sistemului optic (are foarte mare importanță în microscopie), iar $n' \sin \tilde{\sigma}' = A'$ apertura numerică imagine. Relația (12.38) se mai scrie

$$A'/A = 1/\beta. \tag{12.39}$$

Iluminarea în planul imagine poate fi determinată, în ipoteza respectării condițiilor enunțate mai sus, pentru un sistem optic ideal

$$E' = \Phi'/(\pi y'^2) = \pi L' \sin^2 \tilde{\sigma}'$$

sau, ținînd seama de legea lui Clausius (12.20),

$$E' = \pi L (n'/n)^2 \sin^2 \tilde{\sigma}' = \pi L A'^2/n^2 \tag{12.40}$$

$$E' = \pi L (A/n\beta)^2 \tag{12.41}$$

ceea ce reprezintă iluminarea în planul imagine în funcție de luminația obiectului, apertura numerică și mărirea sistemului optic.

e) Emitanța luminoasă (sau *luminozitatea) M* este densitatea superficială a unui flux emis printr-o suprafață

$$M = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S. \tag{12.42}$$

Unitatea de măsură pentru emitanță este *luxul* (lx). Din relația (12.13), în care nu am ținut seama de legea lui Lambert, rezultă legătura dintre emitanță și luminanță

$$M = \int L \cos \theta \, \mathrm{d}\Omega \tag{12.43}$$

sau, ținînd seama de relația (12.16),

$$M = 2\pi \int_0^{\pi/2} L \cos \theta \sin \theta \, \mathrm{d}\theta. \tag{12.44}$$

Dacă sursa respectă legea lui Lambert, atunci $L = \text{const}$, iar integrala (12.44) devine

$$M = \pi L. \tag{12.45}$$

f) Expunerea (sau *cantitatea de iluminare) H* se utilizează mai ales în tehnica fotografierii sau în holografie. Ea reprezintă produsul între iluminare și timp

$$H = Et. \tag{12.46}$$

Dacă iluminarea variază în timp, atunci

$$H = \int_0^t E \mathrm{d}t \tag{12.47}$$

Unitatea de măsură este *lux* × *secundă* (lx·s).

g) Eficacitatea luminoasă η (sau K) a fluxului energetic reprezintă legătura între mărimile energetice și cele fotometrice

$$\eta = \frac{\Phi_{luminos}}{\Phi_{energetic}} = \frac{\Phi}{P} = k\frac{\int \rho_\lambda V_\lambda \, d\lambda}{\int \rho_\lambda \, d\lambda}$$

unde fluxul energetic nu reprezintă altă mărime fizică decît fluxul luminos, dar se exprimă în unități de putere: $\langle \Phi_{energetic} \rangle = \langle P \rangle =$ watt. Dealtfel, orice mărime fotometrică poate fi „tradusă" energetic prin împărțirea la $k = 692$ lm/W. Eficacitatea luminoasă se exprimă în lumen/watt (lm/W).

Remarcă: se observă că $\int_0^\infty \rho_\lambda V_\lambda d\lambda = \int_{400\,nm}^{780\,nm} \rho_\lambda V_\lambda d\lambda$,

deoarece $V_\lambda = 0$ în afara intervalului $\lambda \in [400\,;\ 780]$ nm.

Exemple de eficacități luminoase: becurile cu incandescență $\eta = 7 - 18$ lm/W pentru puteri $P = 25 - 1\,000$ W; tuburile luminiscente (fluorescente) au $\eta = 50$ lm/W.

Raportul dintre puterea totală emisă sub formă de radiație vizibilă și puterea consumată de sursă reprezintă *randamentul vizual* η_v (adimensional). Acest randament este 3—4% pentru becurile cu incandescență și aproximativ 20% pentru tuburile luminiscente. În literatura de specialitate se mai întîlnesc diferite unități „tolerate" pentru mărimile fotometrice, reprezentate în tabelele 12.1 și 12.2.

Tabelul 12.1

Iluminarea	lx	ph	mph
1 lux =	1	10^{-4}	0,1
1 phot =	10^4	1	1 000
1 miliphot =	10	10^{-3}	1

Tabelul 12.2

Luminanța	nt	Sb	ASb	La	mLa
1 nit =	1	10^{-4}	3,14	$3,14 \cdot 10^{-4}$	0,314
1 stilb =	10^4	1	$3,14 \cdot 10^4$	3,14	$3,14 \cdot 10^3$
1 apostilb =	0,318	$0,318 \cdot 10^{-4}$	1	10^{-4}	0,1
1 lambert =	3 183	0,318	10^4	1	1 000
1 mililambert =	3,18	$0,318 \cdot 10^{-3}$	10	10^{-3}	1

12.2. Fotometrie

Fotometria, parte a metrologiei optice, are ca obiect măsurarea mărimilor caracteristice luminii (cel mai frecvent se măsoară intensitatea luminoasă, fluxul și iluminarea). Metodele de măsurare se împart în metode obiective (sau fizice) și în metode subiective (sau vizuale), după cum receptorul de lumină este un receptor fizic (fotoelectric sau termic), respectiv, ochiul.

12.2.1. **Metode subiective (vizuale)**

În cadrul acestor metode se folosește capacitatea ochiului de a aprecia diferența de luminanță a două cîmpuri alăturate, respectiv aceeași luminozitate atunci cînd prezintă aceeași culoare (sau culori apropiate). Luminozitatea este corespondentul psiho-senzorial al mărimii fotometrice luminanță (adică senzația pe care o are ochiul că o suprafață pare că emite mai multă sau mai puțină lumină). Precizia metodelor fotometriei izocromatice (se compară radiații cu același spectru cromatic) și eterocromatice este limitată din cauza variației caracteristicilor vizuale ale ochiului uman de la un individ la altul ; în plus, rezultatele măsurătorilor fotometrice prin metode vizuale nu sînt reproductibile, mai ales la diferențe mari de culoare între sursele comparate. Pentru o precizie bună în metodele fotometrice vizuale se recomandă ca iluminarea suprafețelor care se compară să fie 5—20 lx. Fotometrele vizuale pot fi :

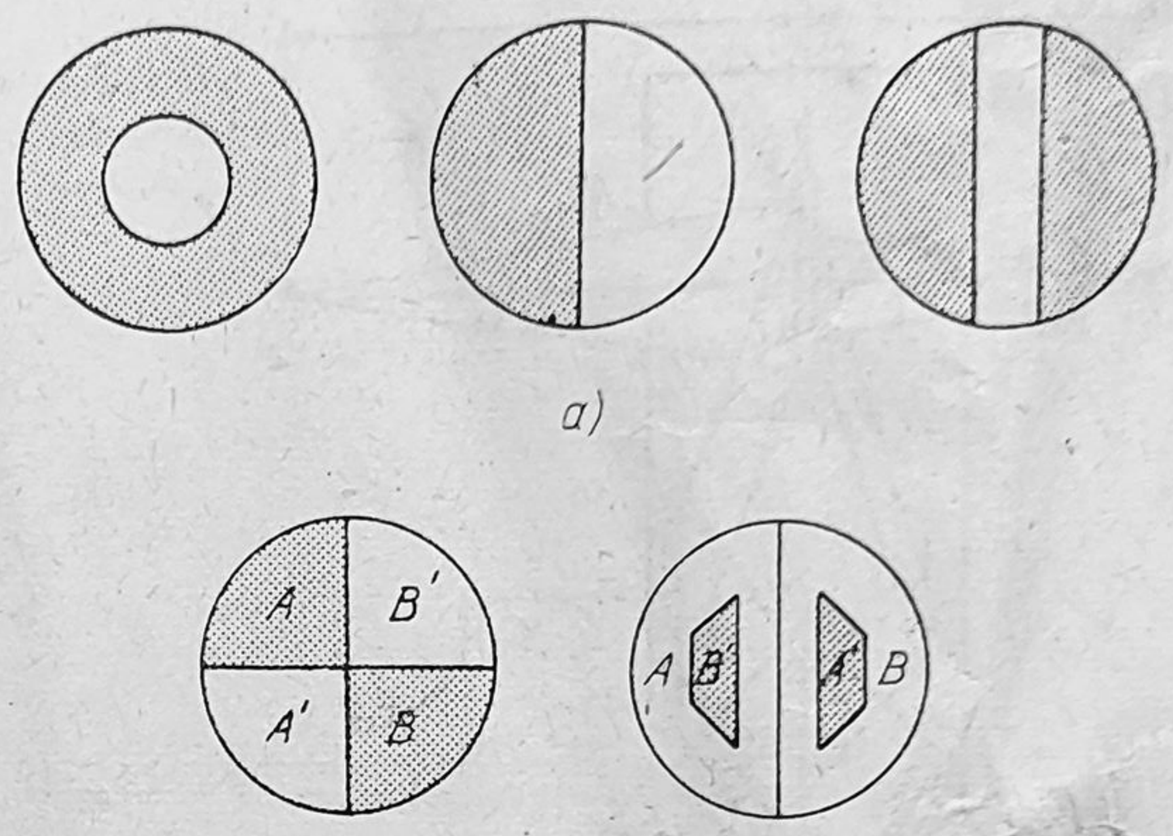


Fig. 12.9

— cu egalizarea luminozității, care funcționează pe principiul egalizării de luminozitate a două cîmpuri juxtapuse în unul din modurile reprezentate în figura 12.9, *a* și care se prezintă simultan ochiului ;

— cu egalizarea contrastului de luminozitate, care funcționează pe principiul egalizării contrastelor a două cîmpuri prezentate simultan ochiului (fig. 12.9, *b*). În acest caz, două părți *A* și *B* ale cîmpului sînt iluminate de sursele de lumină care se compară, iar iluminarea altcr două părți ale cîmpului *A'* și *B'*, juxtapuse primelor părți, va fi modificată de un raport constant *K*. Luminanțele părților *A'* și *B'* vor fi : $L_{A'} = KL_A$ și $L_{B'} = KL_B$. Dacă $L_A = L_B$, $L_{A'} = L_{B'}$, contrastul A'/B = constrastul B'/A. Egalitatea contrastului de luminozitate este mai ușor de urmărit decît egalitatea luminozităților, fotometrele cu contrast de luminozitate avînd sensibilitate mai ridicată decît cele cu egalizarea luminozității. *Fotometrul Lummer-Brodhun* este unul dintre cele mai precise fotometre vizuale. Elementul de bază îl constituie cubul fotometric Lummer, care este alcătuit din două prisme cu reflexie totală *ABC* și *MNP* (din același sort de sticlă) : fața *NP* este plană, dar fața *BC* este sferică, fiind șlefuită plan numai în porțiunea centrală *bc* (fig. 12.10). De la ecranul cu două fețe *E*, prin difuzie, lumina provenind de la sursa S_1 prin oglinda O_1 și prisma *ABC* trece prin porțiunea *bc* în contact optic cu *NP* dînd cîmpul luminos *1* ; lumina provenind de la sursa *2* este reflectată total pe marginile *bN* și *cP* dînd, prin luneta *L*, cîmpul luminos *2*. Prin deplasarea

uneia dintre surse, sau a fotometrului între cele două surse fixe, se obține egalitatea de iluminare, dispărînd demarcația între cele două cîmpuri : $E_1 = E_2$. Aplicînd legea Kepler-Lambert (12.7) se obține

$$I_1/r_1^2 = I_2/r_2^2. \qquad (12.50)$$

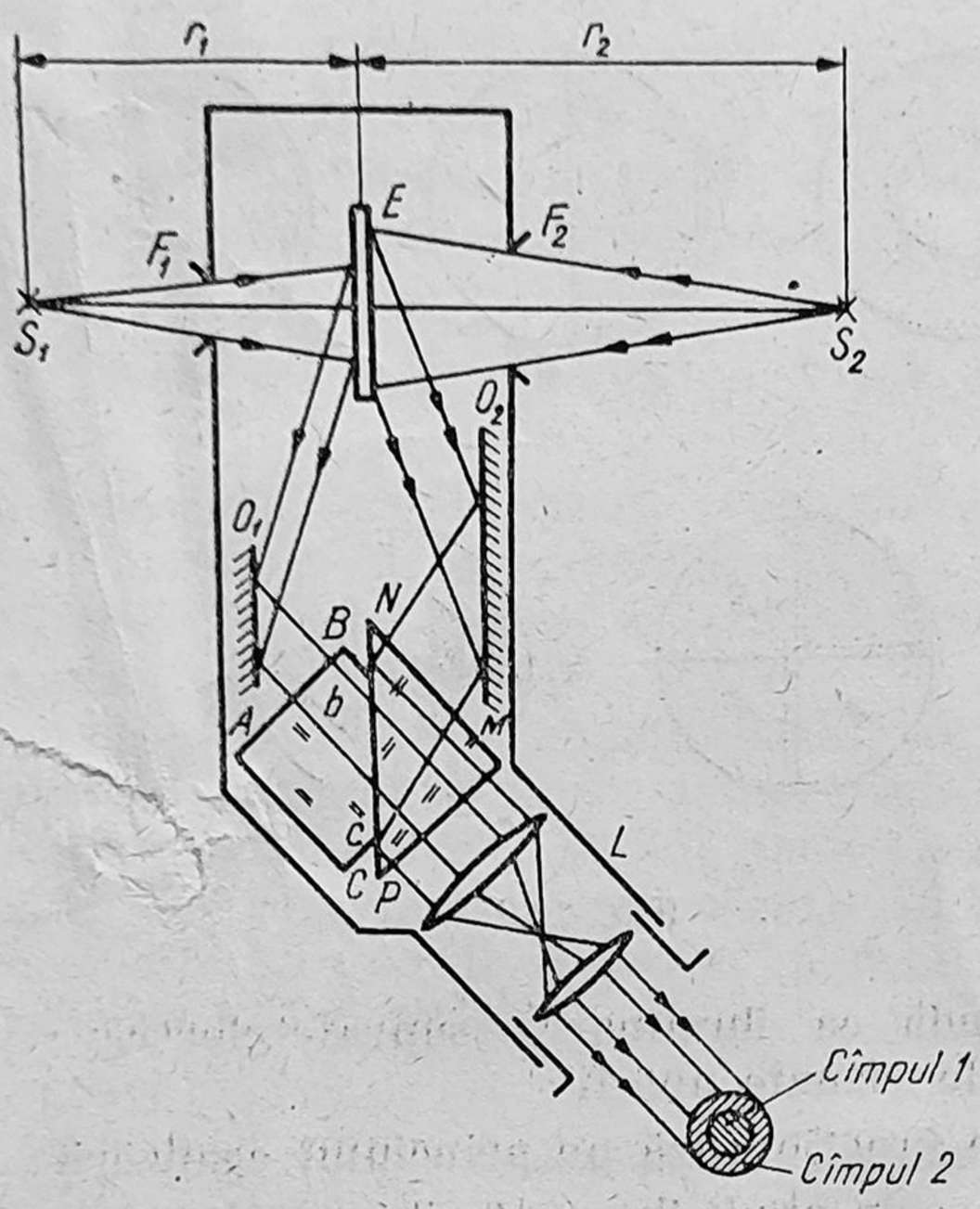


Fig. 12.10

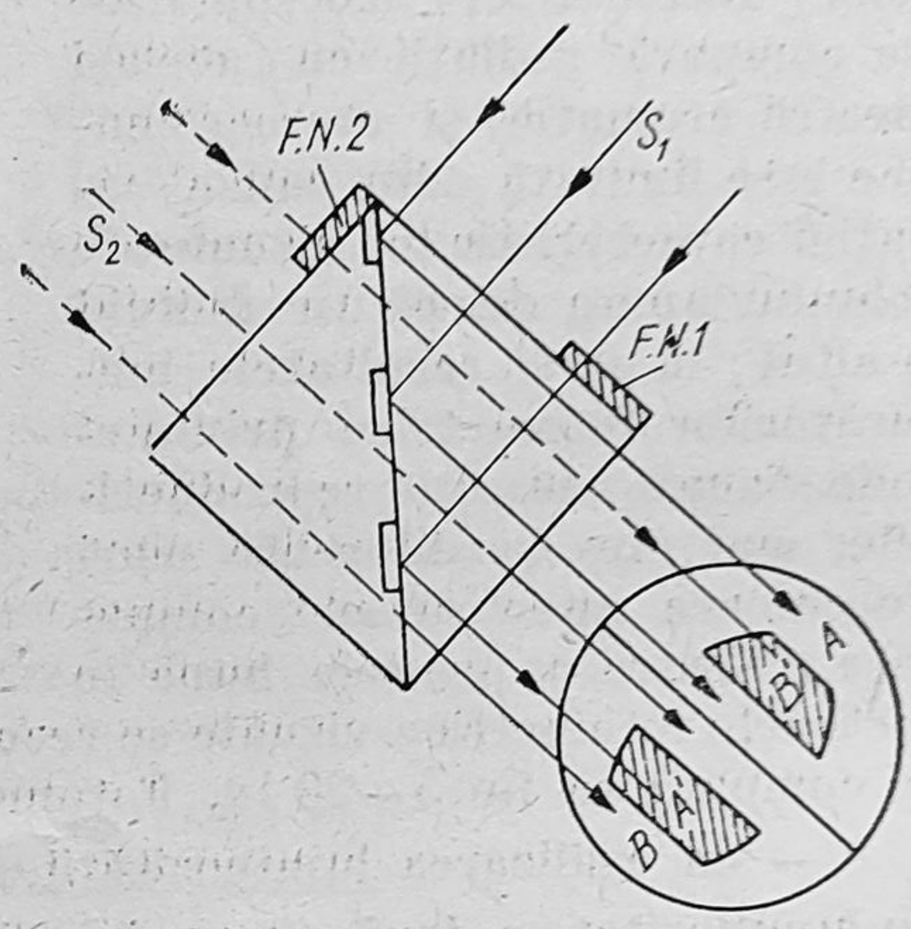


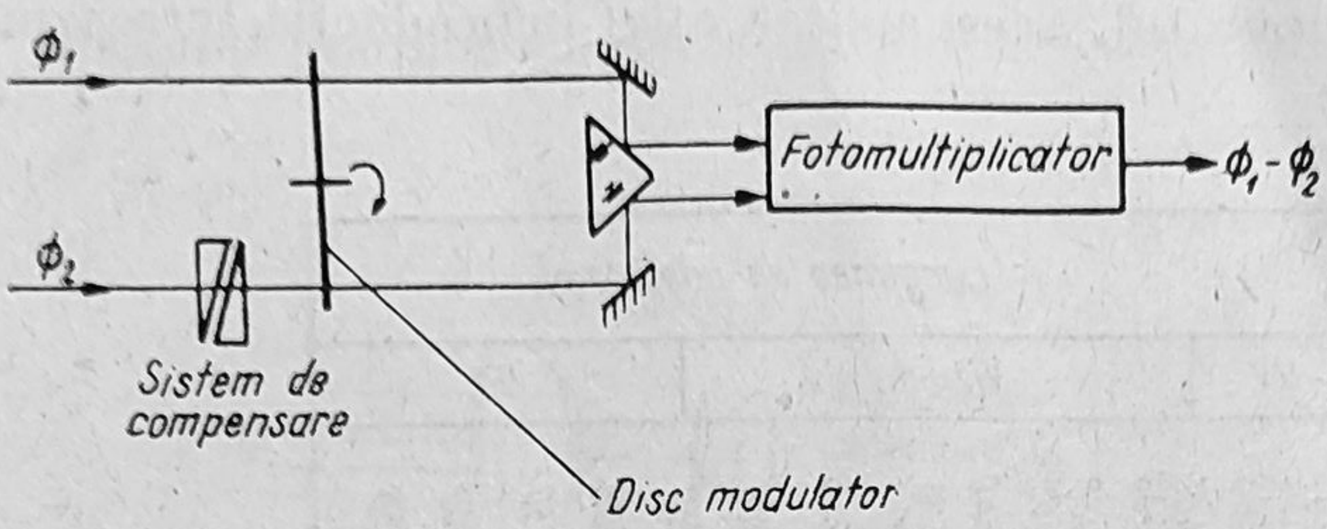
Fig. 12.11

Fotometrul Lummer-Brodhun poate funcționa și pe principiul egalității contrastelor. În acest caz o jumătate a cubului fotometric prezintă trei scobituri (fig. 12.11). Lumina emisă de sursa S_1 ajunge în zonele A și A' suferind fenomenul reflexiei totale în porțiunile scobite, iar lumina emisă de sursa S_2 ajunge în zonele B și B' trecînd prin porțiunile nescobite ale celor două jumătăți ale cubului care se găsesc în contact optic. Contrastul de luminozitate se obține cu ajutorul unor filtre *F.N.1* și *F.N.2* avînd același factor de transparență θ și care obturează fasciculele luminoase care formează cîmpurile A', respectiv B'.

12.2.2. Metode obiective (fizice)

Avantajele metodelor fizice de măsurare a mărimilor fotometrice față de metodele vizuale constau în o precizie mai bună și în reproductivitatea rezultatelor măsurătorilor. Totodată, aceste metode sînt mai rapide și nu sînt influențate de oboseala pe care o resimte ochiul după un anumit timp de observare atentă. În fotometria fizică heterocromatică, ca și în cea izocromatică, erorile de măsurare devin cu atît mai importante cu cît repartițiile spectrale energetice ale surselor de lumină ce se compară sînt mai diferite. Aceste metode

au la bază compararea fluxurilor luminoase Φ_1 și Φ_2 cu aceeași distribuție energetică în spectru, folosind unul sau doi receptori fotoelectrici calibrați. La iluminări egale, datorate unor fluxuri egale $\Phi_1 = \Phi_2$, atunci $i_1 = i_2$, deci prin galvanometrul G nu trece curent ($i_G = 0$). Dacă fluxurile sînt inegale, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, atunci $i_1 \neq i_2$. În acest caz, în calea fasciculului mai intens se in-



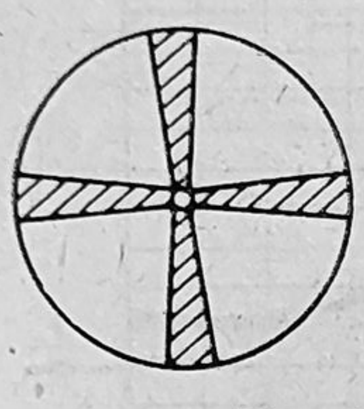


Fig. 12.12

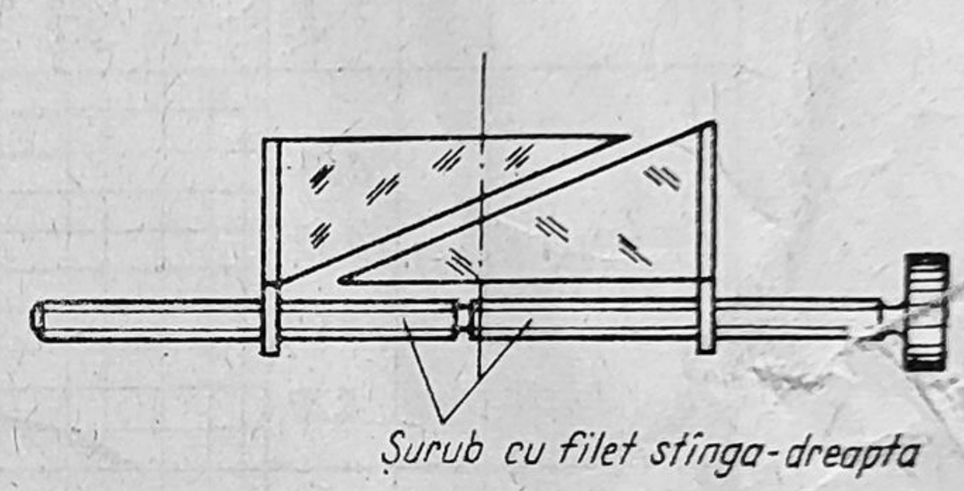


Fig. 12.13

troduce un compensator cu pene (filtru neutru), etalonat, cu care se atenuează de un număr cunoscut de ori k fluxul Φ_1, pînă se obține $i_G = 0$. Se determină astfel $\Phi_1/\Phi_2 = k$. Cu ajutorul discului modulator, cele două fascicule care se compară se trimit succesiv pe același receptor. Semnalul electric va avea o componentă constantă și o componentă variabilă de amplitudine proporțională cu $(\Phi_1 - \Phi_2)$, (fig. 12.12). Prin amplificator trece numai componenta variabilă. După această determinare, se atenuează de un număr cunoscut de ori, k, unul din fascicule, determinînd de această dată $\Phi_1 - \Phi_2/k$. Din cele două determinări se poate deduce Φ_1/Φ_2

$$\Phi_1/\Phi_2 = \frac{\varkappa - 1/k}{\varkappa - 1} \tag{12.51}$$

unde $\varkappa$ este raportul între cea de-a doua determinare și prima

$$\varkappa = \frac{\Phi_1 - \Phi_2/k}{\Phi_1 - \Phi_2}. \tag{12.52}$$

Pentru atenuarea (compensarea) caracteristicilor energetice ale radiațiilor luminoase există diferite procedee. Cel mai simplu constă în varierea distanței de la sursă la suprafață iluminată (legea Kepler-Lambert sau a pătratelor inverse, 12.7)

$$E_1/E_2 = (r_2/r_1)^2. \tag{12.53}$$

Un procedeu mai precis, foarte răspîndit mai ales pentru comoditatea tehnică a utilizării, este procedeul compensării cu penele realizate din filtre neutre. Penele sînt deplasate simetric față de axa optică cu ajutorul unui

șurub cu filet stînga-dreapta (fig. 12.13). Atenuarea liniară a fluxului luminos necesită folosirea unor filtre neutre, care să prezinte același factor de transparență 0 pentru întregul spectru. Caracteristicile cîtorva asemenea filtre produse de C. Zeiss-Jena sînt prezentate în figura 12.14.

Luxmetrul fotoelectric este un fotometru portabil folosit pentru măsurarea iluminării produse pe suprafața de intrare în aparat sau pe o suprafață exterioară spre care îndreptăm aparatul. Acest aparat, aflat în producția Întreprin-

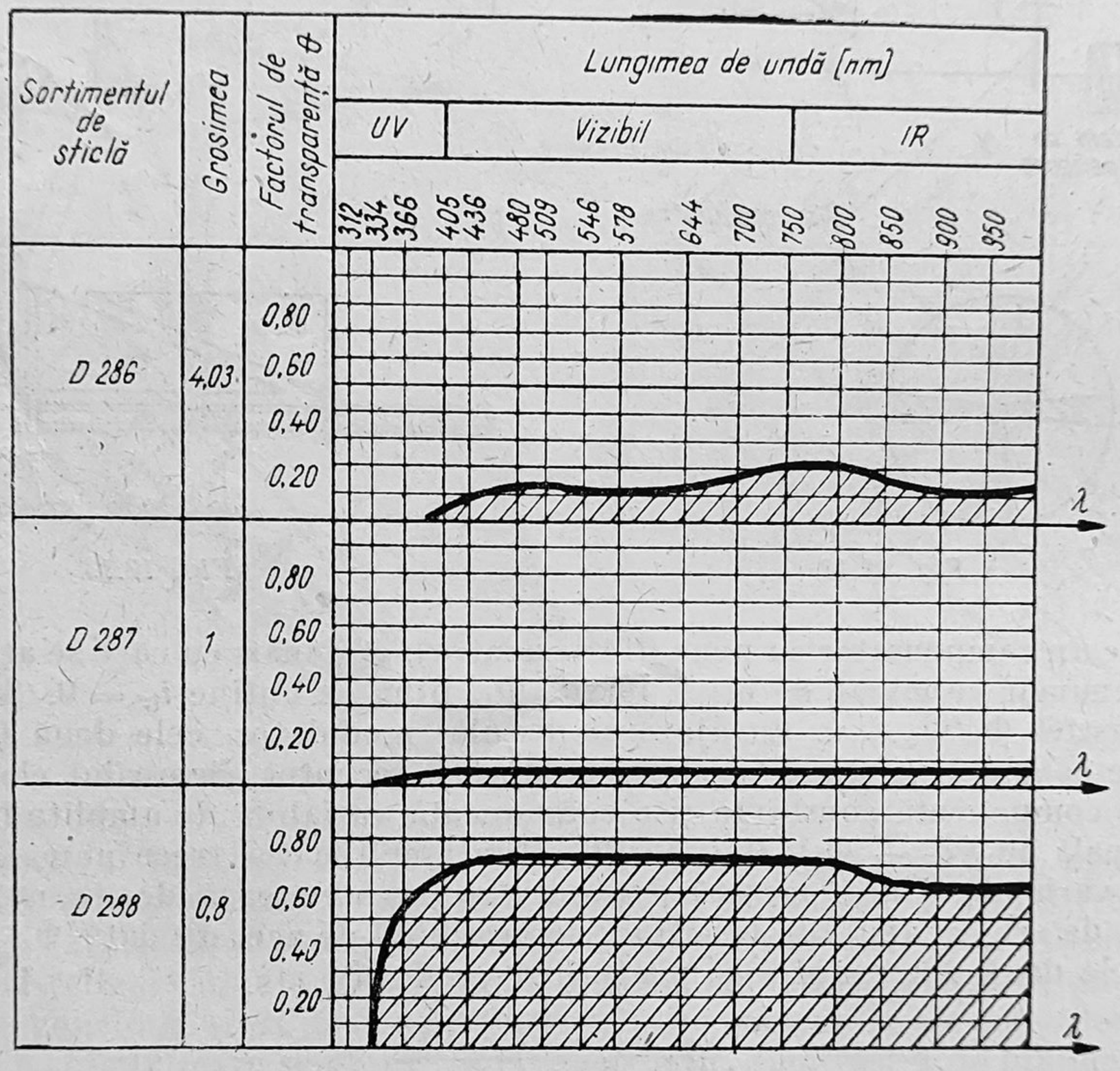


Fig. 12.14

derii de Aparate și Utilaje de Cercetare din București, se remarcă prin precizia sa corespunzătoare și prin manevrabilitate (fig. 12.15). Pentru etalonarea și verificarea luxmetrelor fotoelectrice se utilizează lămpi etalon de intensitate luminoasă, pe baza legii Kepler-Lambert (12.7).

Sfera integratoare Ulbricht se folosește pentru determinarea fluxului integral al unei surse: $\Phi = \int I d\Omega$. Sfera fotometrică are dimensiuni în general mari ($\varnothing = 1$ m); suprafața interioară trebuie să fie netedă și vopsită alb-mat, ca și tijele de susținere și ecranele, cu un factor de reflexie de aproximativ 80% (fig. 12.16). Pentru determinarea fluxului unor surse de lumină care prezină particularități în construcție (componente care absorb sau ecranează

fluxul luminos) se utilizează o sursă auxiliară S' amplasată în apropierea peretelui sferei, diametral opusă ferestrei în dreptul căreia se află fotometrul exterior (de obicei, luxmetru fotoelectric). Lampa auxiliară este astfel ecranată încît lumina emisă de ea să nu cadă direct nici pe fereastra F, nici pe sursa S. Pentru o bună precizie de măsurare, lampa auxiliară trebuie să aibă un flux cît mai apropiat cu cel al sursei studiate. De regulă, pentru măsurarea fluxului luminos cu sfera integratoare se utilizează procedeul substituirii. Se

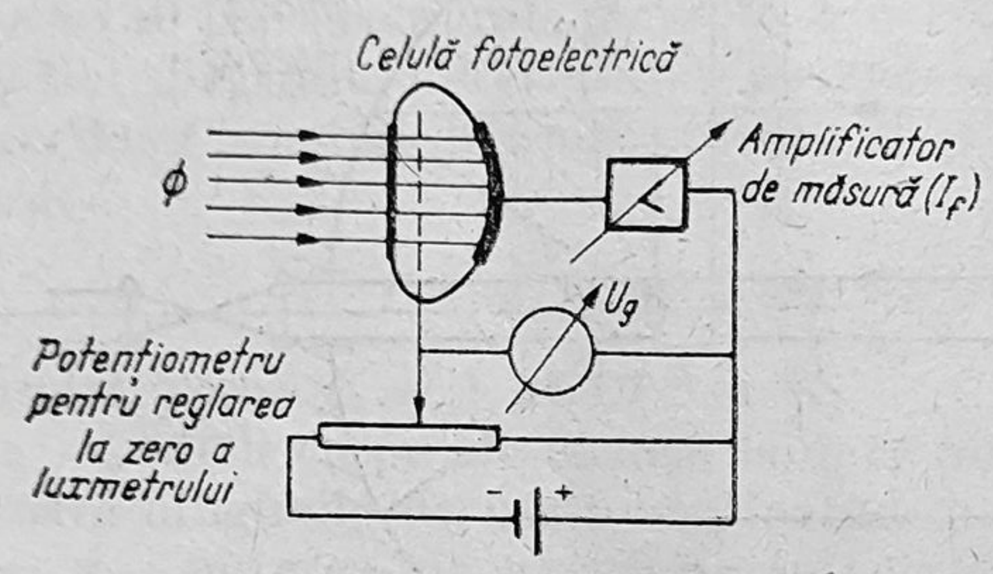


Fig. 12.15

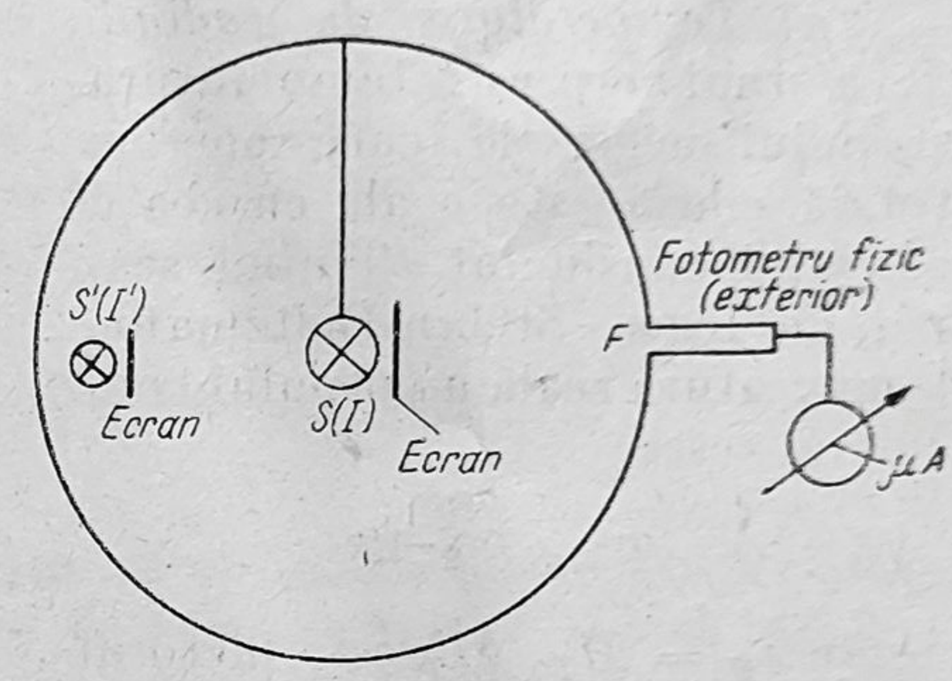


Fig. 12.16

măsoară iluminările E_e și E în direcția ferestrei, în prezența sursei etalon $S_e(I_e)$ și în prezența sursei de măsurat $S(I)$. Raportul iluminărilor este egal cu raportul intensităților celor două surse, deoarece sfera realizează integrarea după toate direcțiile (se obturează razele care ar veni în F direct de la sursă).

$$I/I_e = \Phi/\Phi_e = E/E_e. \tag{12.54}$$

În cazul în care este necesară utilizarea lampei auxiliare măsurarea se efectuează astfel :

— se măsoară iluminarea E_e dată de sursa etalon $S_e(I_e)$;

— se măsoară iluminarea E'_e dată de lampa auxiliară în prezența surse etalon scoase din funcționare ;

— se măsoară iluminarea E dată de sursa de măsurat $S(I)$.

— se măsoară iluminarea E' dată de lampa auxiliară în prezența sursei de măsurat scoase din funcționare.

Fluxul luminos al sursei de măsurat este

$$\Phi = \Phi_e(E/E_e)\ (E'_e/E') = CKE \tag{12.55}$$

unde $K = E'_e/E'$ reprezintă factorul de autoabsorbție al sursei măsurate, iar $C = \Phi_e/E_e$, constanta sferei fotometrice. Dacă constanta sferei fotometrice este exprimată în unități de intensitate luminoasă (avînd în vedere integrarea după toate direcțiile), atunci intensitatea sursei măsurate este

$$I = C_I K E \tag{12.56}$$

unde $C_I = I_e/E_e$

12.3. **Pirometrie optică**

Pirometria optică constituie ansamblul metodelor de măsurare a temperaturilor înalte, bazate pe legile radiației termice (dependența între temperatură și emitanța energetică spectrală sau integrală). Corpurile care pot fi asimilate corpului negru ușurează mult aflarea temperaturii lor, în timp ce corpurile nenegre necesită corecții aduse legilor prin factori dați în tabele.

a) Temperatura de radiație T_r a unui corp este temperatura corpului negru la care energia totală emisă este egală cu cea a corpului considerat. Ținînd seama de legea Stefan-Boltzmann, temperatura reală a corpului considerat este

$$T = T_r \varepsilon_T^{-1/4}$$

unde $\varepsilon_T = M_T / M_T^0$ este factorul de emisie totală, la temperatura T. Cum $\varepsilon_T \leqslant 1$, rezultă că $T \geqslant T_r$.

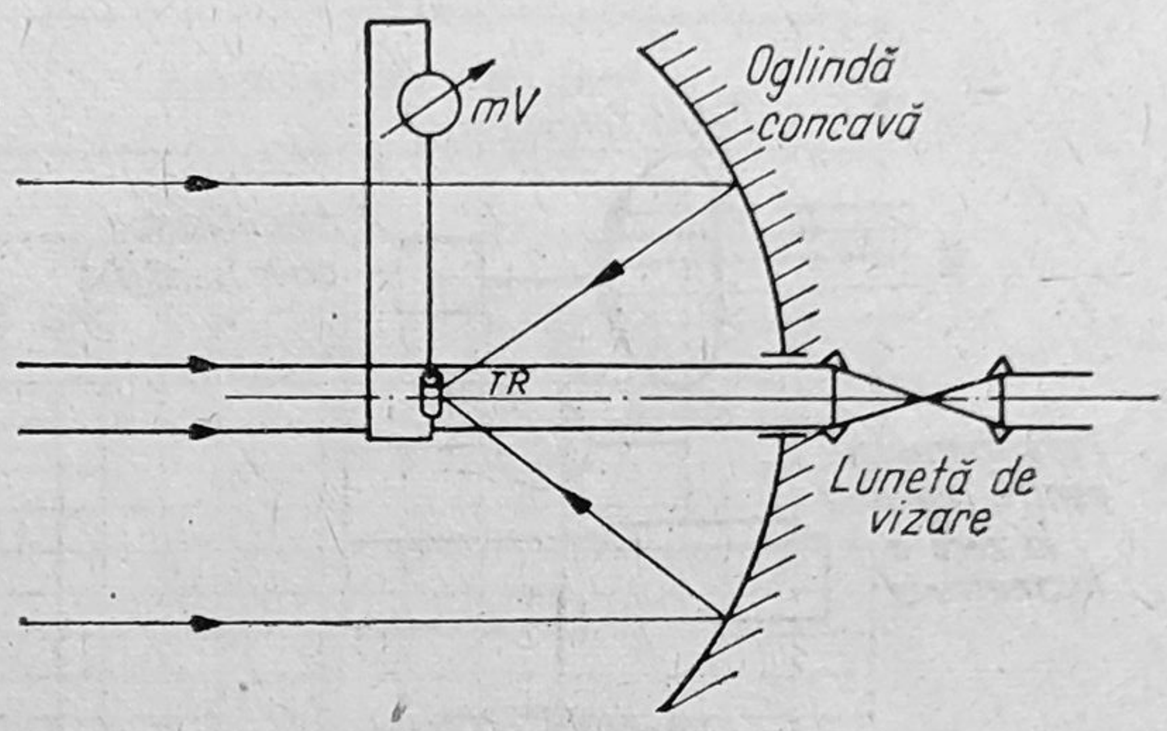


Fig. 12.17

Pirometrele de radiație se utilizează pentru măsurarea temperaturilor de radiație ale corpurilor, domeniul de măsurare fiind aproximativ 400—2 800 K. Pirometrul de radiație este format din două părți: sistemul optic (oglinda sau obiectivul pentru concentrarea radiației) și receptorul de radiație și aparatul de măsurat (de obicei milivoltmetru).

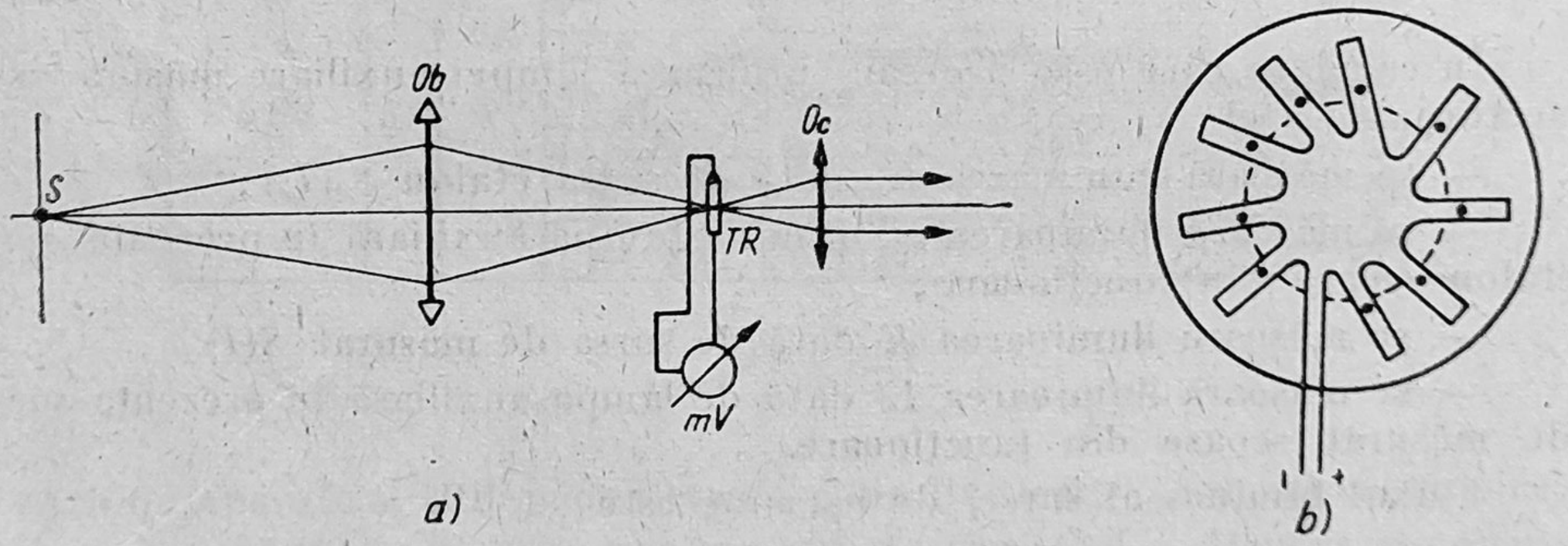


Fig. 12.18

Pirometrul de radiație cu oglindă. Oglinda concavă concentrează fluxul de radiație pe termoreceptorul TR, care furnizează o tensiune termoelectromotoare măsurată de milivoltmetru conectat la borne, etalonat direct în temperatura de radiație T_r (fig. 12.17). Oglinda concavă are un orificiu central pentru a permite vizarea corpului a cărui temperatură de radiație se măsoară, cu ajutorul lunetei de vizare.

Pirometrul de radiație cu obiectiv. Pentru concentrarea fluxului de radiație pe termoreceptorul TR se utilizează obiectivul Ob, iar pentru vizarea supra-

feței S se utilizează ocularul Oc (fig. 12.18). Termoreceptorul este alcătuit dintr-o baterie de termocupluri legate în serie și vopsite în negru pentru mărirea absorbției.

b) Temperatura de culoare T_c a unui corp reprezintă temperatura la care corpul negru are o distribuție spectrală a radiației asemănătoare cu cea a corpului considerat. Temperatura de culoare se determină cu ajutorul legii deplasării ; astfel s-a determinat temperatura Soarelui, considerat corp negru, la care maximul emitanței se situează la $\lambda_{max}=470$ nm : $T_{Soare}=\frac{2\,980\cdot10^{-3}}{470\cdot10^{-9}}=$ $=6\,150$ K. Temperatura reală a corpului se determină pe baza legii distribuției spectrale, determinînd puterile absorbante ale corpului considerat pentru două lungimi de undă diferite λ_1 și λ_2 și ținînd seama de legea lui Kirchhoff

$$T^{-1}=T_c^{-1}+[(hc/k)(\lambda_1^{-1}-\lambda_2^{-1})]^{-1}\ln(A_{\lambda_1,T}/A_{\lambda_2,T}) \qquad (12.58)$$

unde $hc/k=c_2=1{,}44\cdot10^{-2}$ m·K.

Pentru corpurile cenușii la care puterea de absorbție este aceeași pentru toate lungimile de undă, depinzînd numai de temperatura T (adică $A_{\lambda.T}=$ $=A_T$, puterea de absorbție integrală), temperatura de culoare reprezintă chiar temperatura corpului $T_c=T$. În schimb, pentru corpurile cu emisie sau absorbție foarte selectivă, temperatura de culoare nu are sens, deoarece distribuția spectrală a radiației nu se aseamănă deloc cu cea a corpului negru.

Pirometre de culoare. Măsurarea temperaturii de culoare T_c se face în două moduri : prin metoda egalizării culorilor corpului studiat și corpului negru și prin metoda raportului puterilor de absorbție pentru două radiații diferite (de obicei pentru roșu/albastru sau roșu/verde). Cea de a două metodă este mai precisă și este mai folosită.

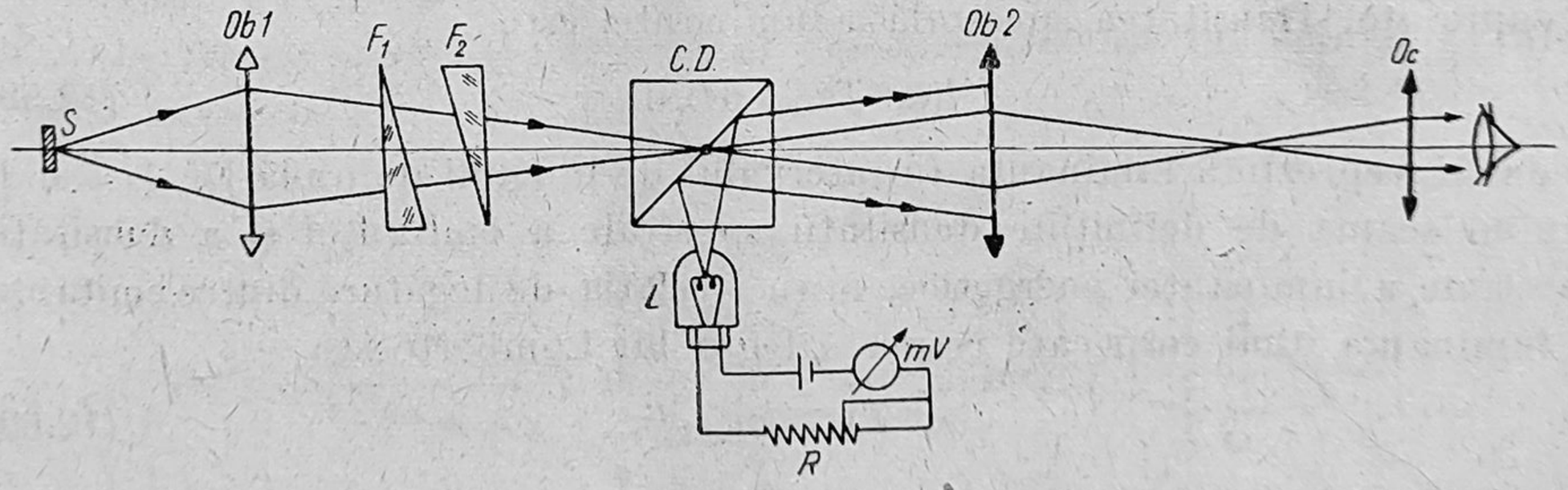


Fig. 12.19

Pirometrul de culoare subiectiv utilizează ochiul ca receptor pentru comparație. Elementele caracteristice ale acestui tip de pirometru sînt penele F_1 (din filtrul care lasă să treacă radiațiile de culoare roșie și verde în raporturi diferite, în funcție de grosimea penei) și F_2 (din filtrul neutru care servește la egalizarea luminanței imaginii suprafeței observate cu cea a lampei etalon L a pirometrului), (fig. 12.19). Radiațiile roșie și verde care trec prin filtrul F_1, aduse la același raport ca și radiațiile lămpii etalon, prin suprapunere

dau o culoare alb-gălbuie a cărei luminanță se reglează din pana F_2. O dată cu deplasarea penelor F_1 și F_2 se deplasează și scările gradate în temperaturi de culoare T_c, respectiv, în temperaturi de luminanță T_L.

Pirometrul de culoare cu fotocelulă. Pentru determinarea luminanțelor corespunzătoare celor două radiații λ_1 și λ_2 se folosesc fotoelementele Fe_1 și Fe_2 (fig. 12.20). Fluxul luminos venind de la corpul a cărui temperatură de culoare trebuie determinată este concentrat de obiectivul *Ob* la intrarea într-o bară de sticlă care în urma unor reflexii repetate aduce radiația la filtrul *F* care separă cele două componente λ_1 și λ_2 prin reflexie, respectiv transmisie. Fluxul radiației reflectate cade pe fotoelementul Fe_1 producînd un curent i_1 (λ_1), în timp ce fluxul transmis produce în fotoelementul Fe_2 curentul i_2 (λ_2). Cei doi curenți amplificați și raportați conduc la determinarea temperaturii de culoare. Pentru vizare se folosește lama divizoare *BS* (cu reflexie redusă) sistemul de prisme și lentila L_T, care duc imaginea corpului vizat la ocularul *Oc*.

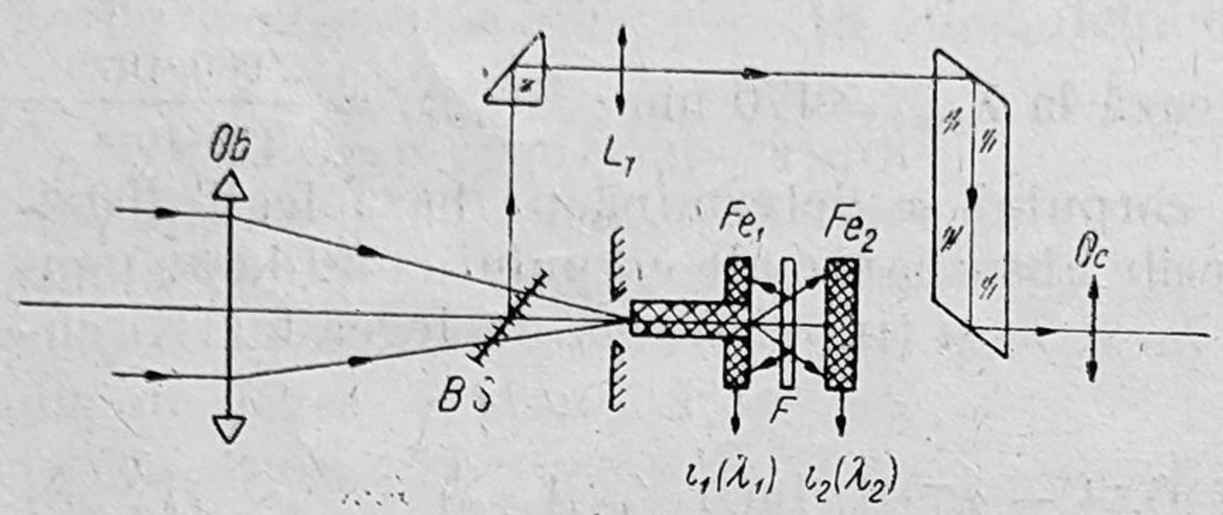


Fig. 12.20

c) Temperatura de luminanță T_L a unui corp este temperatura corpului negru la care densitatea spectrală a luminanței energetice pentru lungimea de undă λ_0 (de obicei $\lambda_0 = 660$ nm) este egală cu densitatea spectrală a luminanței corpului considerat pentru aceeași lungime de undă, în direcția normalei la suprafață. Densitatea spectrală a luminanței este

$$l(\lambda, T) = \mathrm{d}L/\mathrm{d}\lambda \tag{12.59}$$

unde $\mathrm{d}L$ reprezintă luminanța în intervalul de lungimi de undă $[\lambda, \lambda + \mathrm{d}\lambda]$. Ținînd seama de definițiile densității spectrale a emitanței și a densității spectrale a luminanței energetice, atunci relația de legătură dintre emitanța și luminanța unui corp care respectă legea lui Lambert este

$$l(\lambda, T) = m_{\lambda, T}/\pi. \tag{12.60}$$

Pe baza legii distribuției spectrale, temperatura reală a corpului considerat se determină cu relația

$$T^{-1} = T_L^{-1} + \lambda_0 (hc/k)^{-1} \ln[l(\lambda_0, T)/l_0(\lambda_0, T)] \tag{12.61}$$

unde l_0 (λ_0, T) este densitatea spectrală a luminanței corpului negru. Dacă corpul considerat respectă legea lui Lambert (corpul negru o respectă) atunci: $l(\lambda_0, T)/l_0(\lambda_0, T) = m_{\lambda_0, T}/m^0_{\lambda_0, T}$ și, ținînd seama de legea lui Kirchhoff, se obține

$$l(\lambda_0, T)/l_0(\lambda_0, T) = A_{\lambda_0, T} \tag{12.62}$$

UMV. „AL. I. CUZA" FACULTATEA DE FIZICA

iar relația (12.61) se simplifică astfel :

$$T^{-1} = T_L^{-1} + \lambda_0 (hc/k)^{-1} \ln A_{\lambda_0, T}. \tag{12.63}$$

Se observă că : $T \geqslant T_L$.

Pirometre monocromatice (de luminanță). Aceste pirometre măsoară temperatura de luminanță a corpurilor prin comparația luminanței radiației de o anumită lungime de undă λ_0 cu luminanța lămpii pirometrului la aceeași lungime de undă. Lămpile pirometrelor sînt etalonate în temperaturi de luminanță pe un banc special avînd ca sursă de radiație corpul negru. Elementul sensibil al pirometrelor poate fi ochiul observatorului sau o fotocelulă. Egalizarea luminanțelor corpului studiat și a filamentului lămpii se poate efectua fie prin variația curentului de alimentare a filamentului, fie cu pene optice din filtre neutre.

Pirometrul cu dispariția filamentului, tip Holborn-Kurlbaum. Partea optică a pirometrului este constituită dintr-un obiectiv *Ob* care formează imaginea suprafeței incandescente *S*, a cărei temperatură se măsoară, în planul în care se află filamentul *Fil* al lămpii etalon (fig. 12.21). Observarea luminanțe filamentului, simultan cu a imaginii suprafeței studiate, se face prin ocularul *Oc* și prin filtrul *F*, lăsînd să treacă numai radiațiile de lungime de undă λ_0. Filamentul *Fil* va apărea mai luminos sau mai întunecat pe fondul imaginii suprafeței studiate *S*. Se reglează curentul de alimentare a filamentului pînă cînd acesta dispare pe fondul luminos al imaginii lui *S*. Cunoscîndu-se raportul luminanțelor imaginii și a suprafeței studiate *S*, precum și temperaturile corpului negru cu care s-a etalonat lampa pirometrului, se gradează ampermetrul *A* în temperaturi care reprezintă temperaturile de luminanță T_L ale corpului observat.

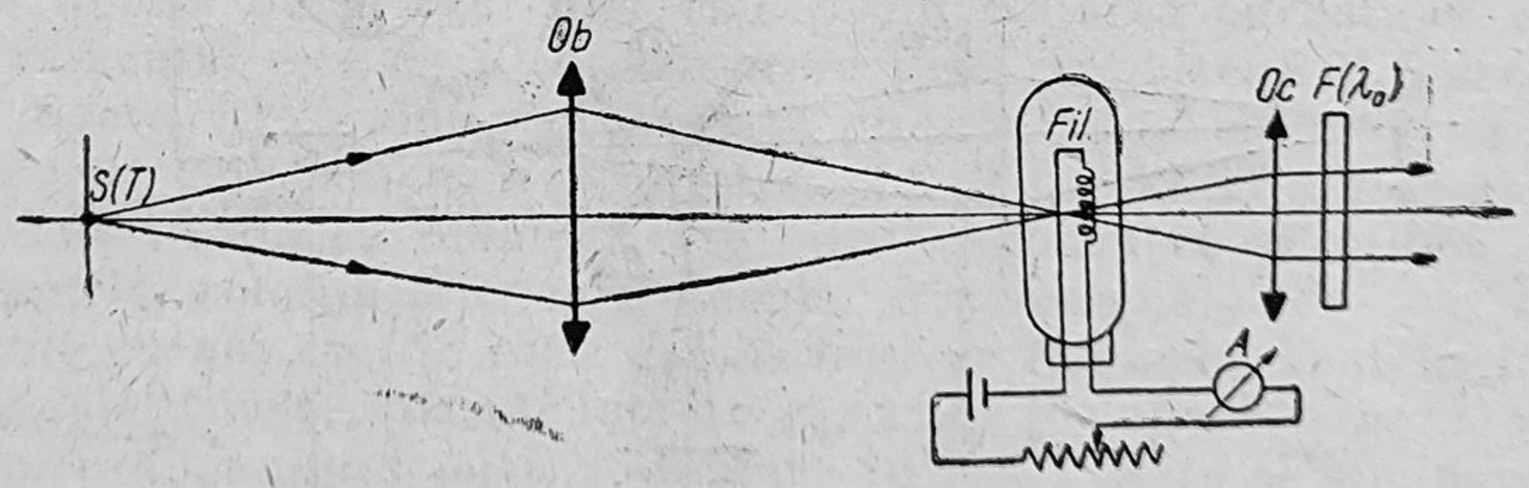


Fig. 12.21

Pirometrul monocromatic cu pene optice. În construcția acestui pirometru (fig. 12.22) în afara sistemului optic de bază, format din obiectivul *Ob*, ocularul *Oc* și filtrul $F(\lambda_0)$, mai există penele optice realizate din filtre neutre (descrise la § 12.2.2) care atenuează luminanța suprafeței studiate *S* pînă cînd

pe fondul luminos din planul imaginii filamentul *Fil* nu se mai distinge. Tamburul de reglare a penelor optice este gradat în temperaturi de luminanță T_L ale corpului studiat. Luminanța lămpii pirometrului este menținută constantă pentru fiecare domeniu de măsurare, cu ajutorul unei punți tip Wheatstone.

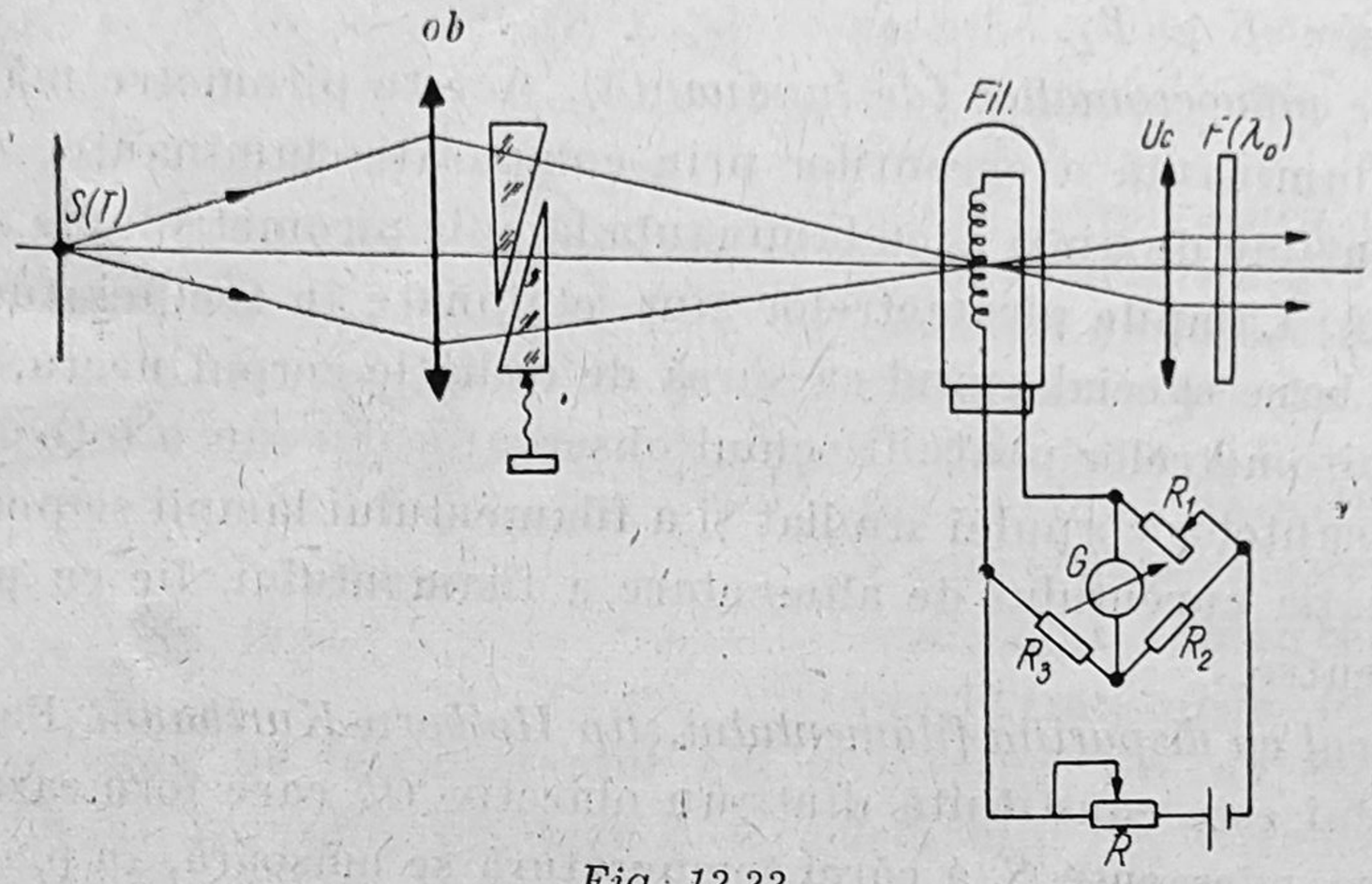


Fig. 12.22

Pirometrul monocromatic cu fotocelulă (fig. 12.23). Compararea luminanței imaginii suprafeței studiate S și a lămpii etalon L se face cu ajutorul unei fotocelule, prin intermediul discului modulator *Mod* acționat de motorul M. Modulatorul face ca fotocelula să fie iluminată succesiv de fluxurile luminoase venind de la suprafața S și de la lampa etalon L. Dacă luminanțele nu sînt egale, în fotocelulă ia naștere o componentă alternativă care este redresată și amplificată, care comandă apoi creșterea sau micșorarea curentului de alimentare a lămpii etalon. Galvanometrul G, care măsoară acest

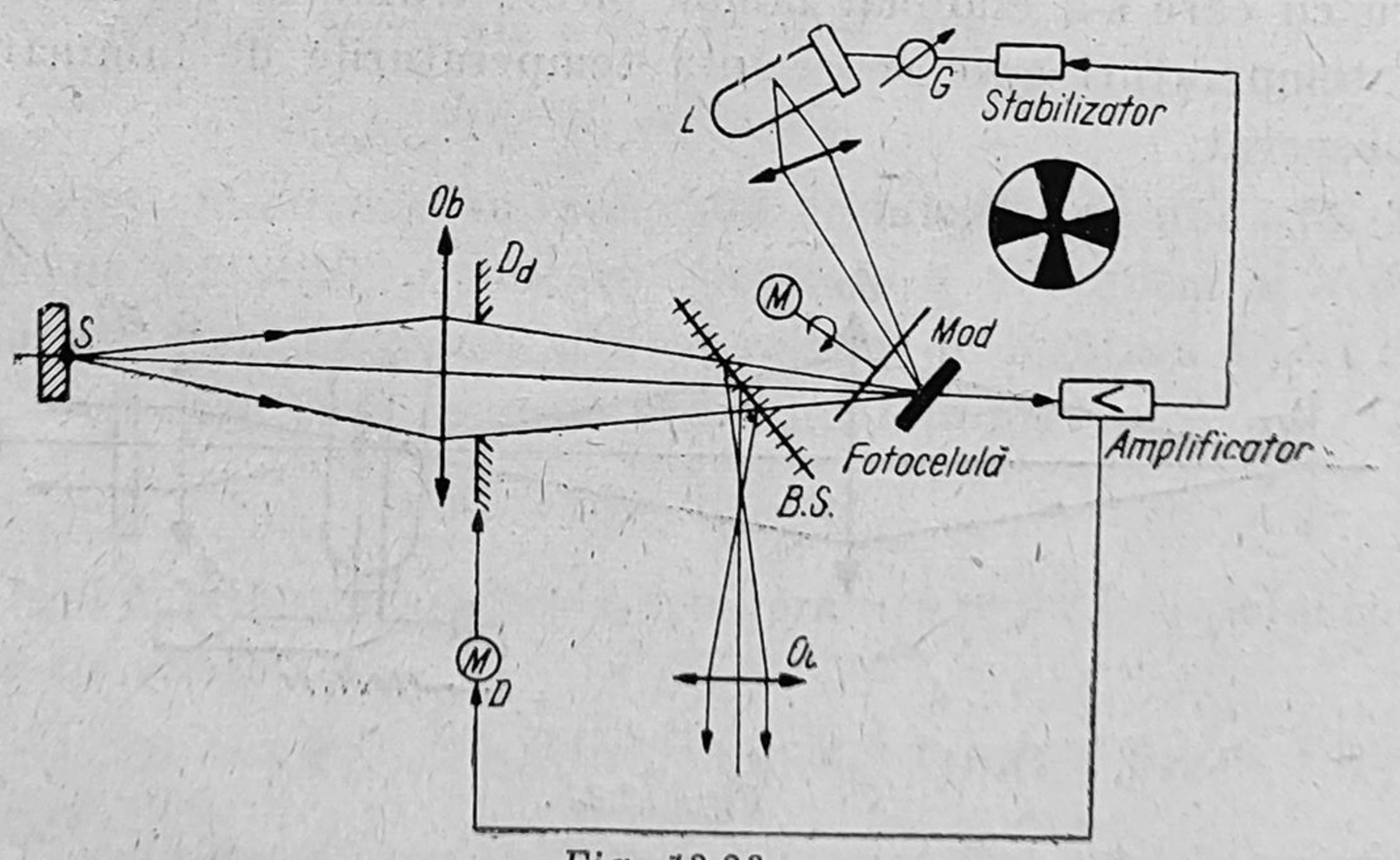


Fig. 12.23

curent, este etalonat direct în temperatura de luminanță a suprafeței studiate S. Dacă diferența între luminanțe este prea mare, se comandă, tot automat, servomotorul M_D care mărește sau micșorează diafragma de deschidere D_d a sistemului optic. Pentru fiecare dimensiune a diafragmei D_d se

utilizează o altă scară de măsurare a galvanometrului *G*. Sistemul optic mai cuprinde lama divizoare *B.S.* (beam splitter) care trimite imaginea suprafeței *S* spre ocularul *Oc* prin care se face vizarea zonei de studiat a suprafeței *S*.

12.4. Surse și receptori de lumină

12.4.1. Surse de lumină utilizate în optica tehnică

Sursele de lumină care realizează iluminarea naturală sau artificială într-un aparat optic interesează din punctul de vedere al luminanței, al dimensiunii și al compoziției spectrale a radiației emise. Un interes deosebit prezintă în anumite cazuri sursele cu luminanță mare, sursele punctiforme și sursele monocromatice. Sursele pot emite un spectru continuu (acestea sînt constituite din solide incandescente) sau un spectru de benzi (lămpi cu descărcare în gaze sau vapori metalici).

a) *Surse cu spectru continuu.* Din grupa surselor cu spectru continuu fac parte : Soarele, lămpile cu flacără luminoasă, becurile cu filament incandescent, tuburile cu arc între electrozi de cărbune. Tabelul 12.3 indică ordinul de mărime a temperaturii de culoare și a luminanței, aceste caracteristici avînd variații mari, după funcționare.

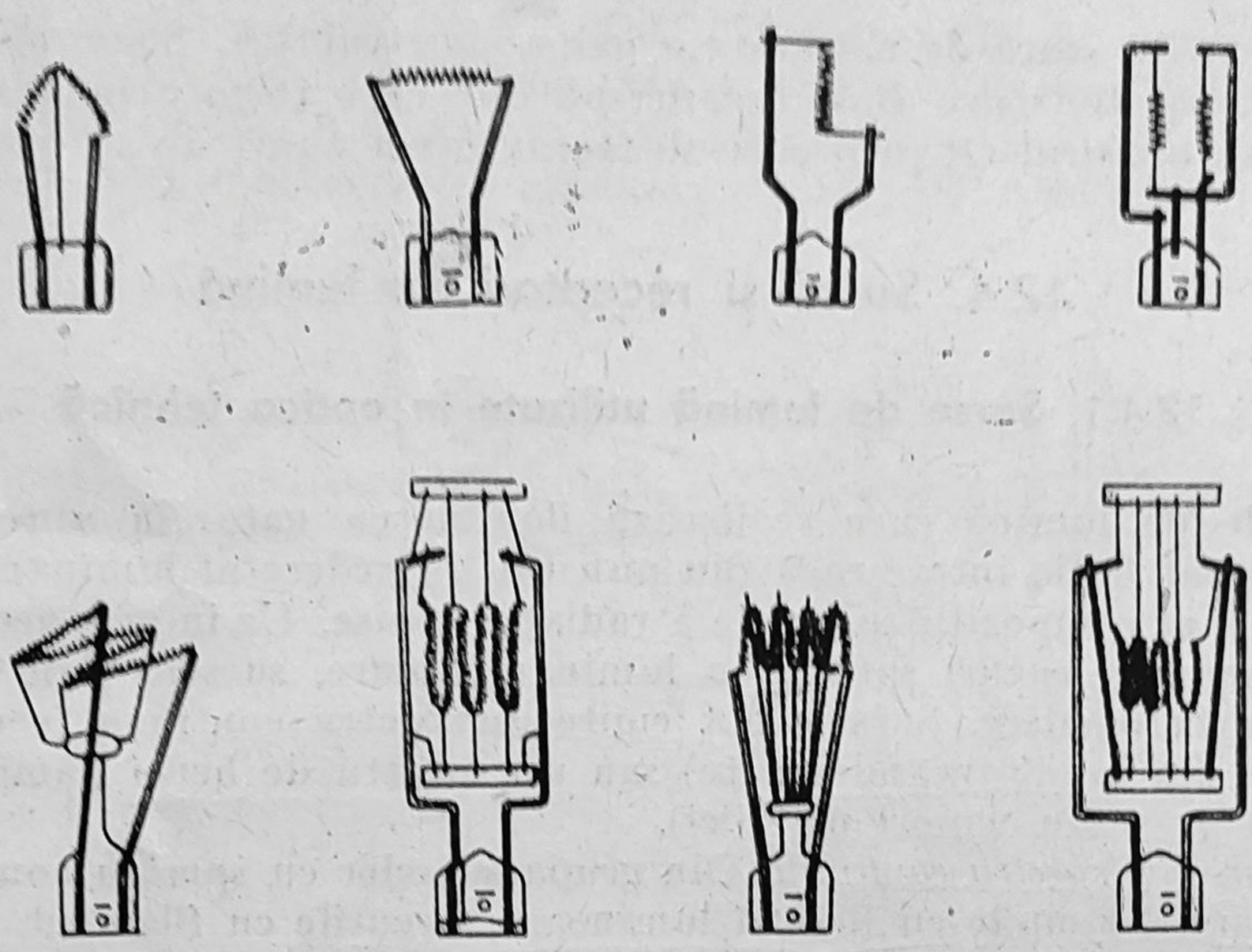
Tabelul 12.3

Surse de lumină cu spectru continuu	Temperatura de culoare, K	Luminanța (nit)
Lămpi cu filament de tungsten în vid	2 500	$2 \cdot 10^6$
Lămpi cu filament de tungsten în gaz	3 000	$10 \cdot 10^6$
Craterul pozitiv al unui arc între electrozi de carbon pur	3 800	$160 \cdot 10^6$
Soarele (prin atmosferă, pe timp senin)	5 600	$1\,600 \cdot 10^6$

Becurile cu filament de tungsten pot avea filamentul în formă de bandă (de exemplu : 0,05 mm grosime și suprafața 2×10 mm), în formă de spirală simplă, de spirală dublă etc. (fig. 12.24). Intensitatea curentului care tranversează filamentul este de 20 A, tensiunea fiind de obicei 6 V (curent alternativ). În figura 12.25 sînt reprezentate diferite tipuri de baloane utilizate pentru becurile cu filament de tungsten. În figura 12.26 sînt reprezentate diferite becuri Osram cu filament, utilizate în aparatura științifică (fotometrie, pirometrie, colorimetrie, microscopie, stroboscopie).

Tuburile cu arc electric între doi electrozi de tungsten, unul în formă de pastilă și celălalt inelar, plasați într-un gaz inert (de obicei, argon), se caracterizează prin dimensiuni mici, stabilitate în funcționare și luminanță comparabilă (uneori chiar superioară) cu becurile cu filament de tungsten. Se utilizează des în microfotografie. În figura 12.27 se prezintă o lampă microfotografică și distribuția spectrală a radiației emise.

Tuburile cu arc între electrozi de cărbune sînt utilizate pentru luminanța lor ridicată. Alimentarea poate fi făcută în curent alternativ, dar o mai bună funcționare asigură alimentarea în curent continuu, și necesită, ca toate arcurile, înserierea unei rezistențe sau, eventual, a unei bobine pentru stabilizarea funcționării ; tensiunea la bornele arcului este ≈ 55 V, evasiinde-



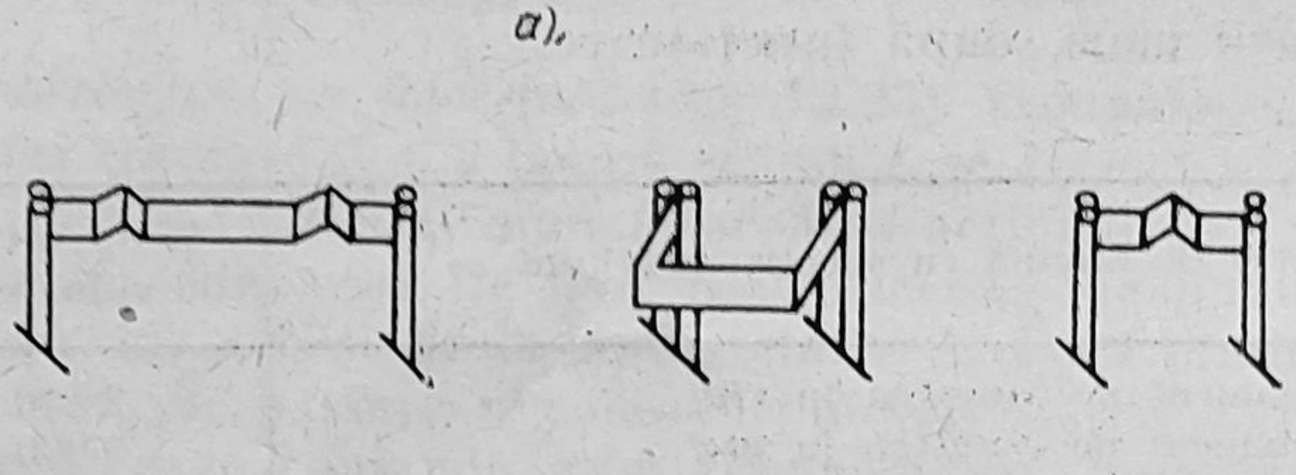


Fig. 12.24

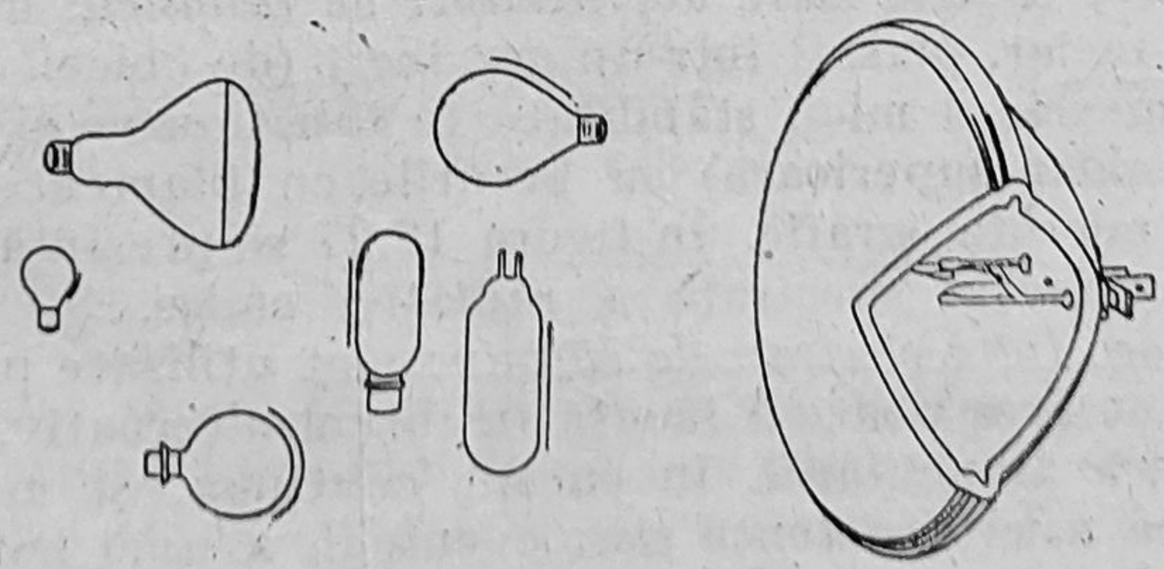
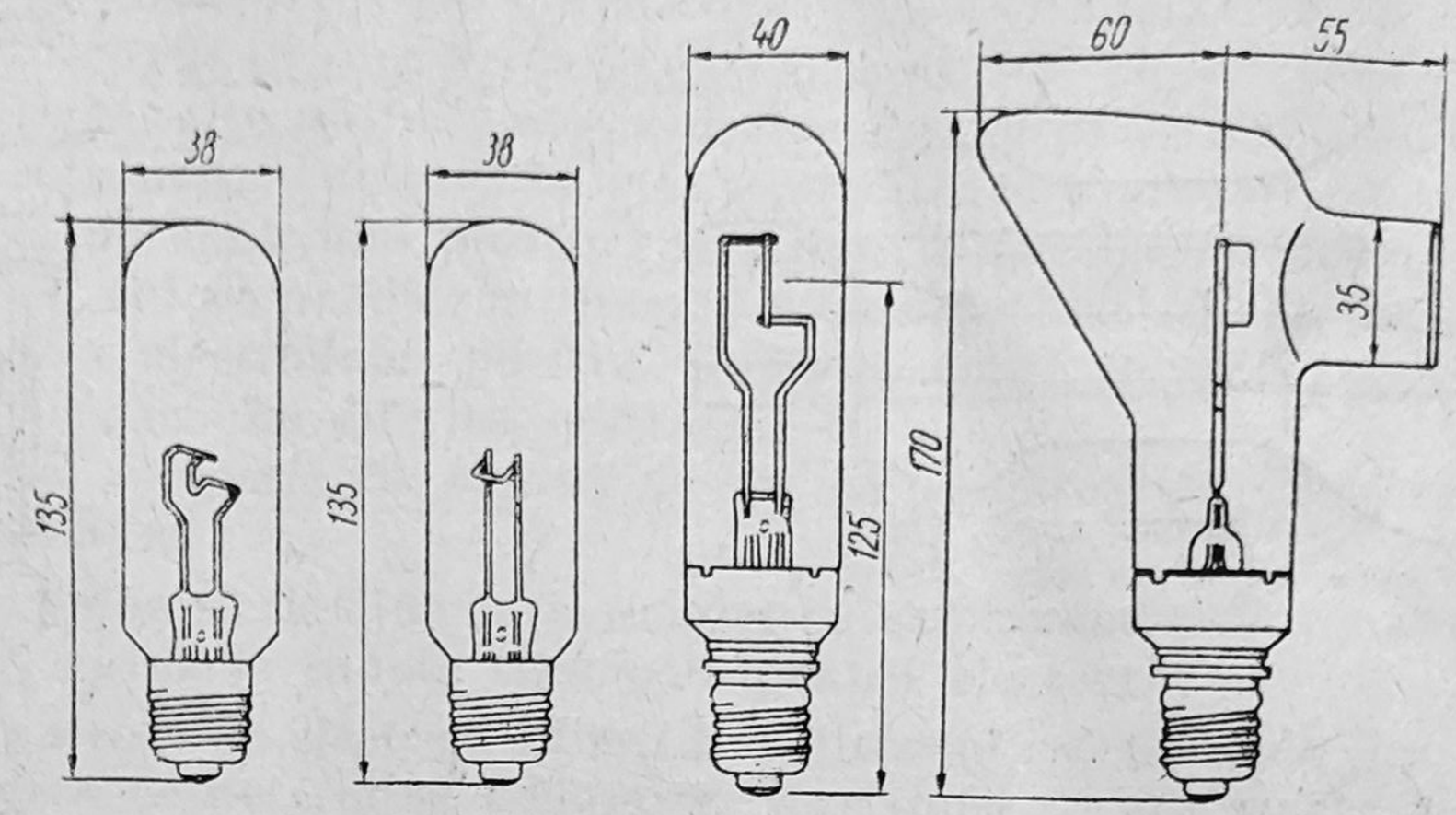
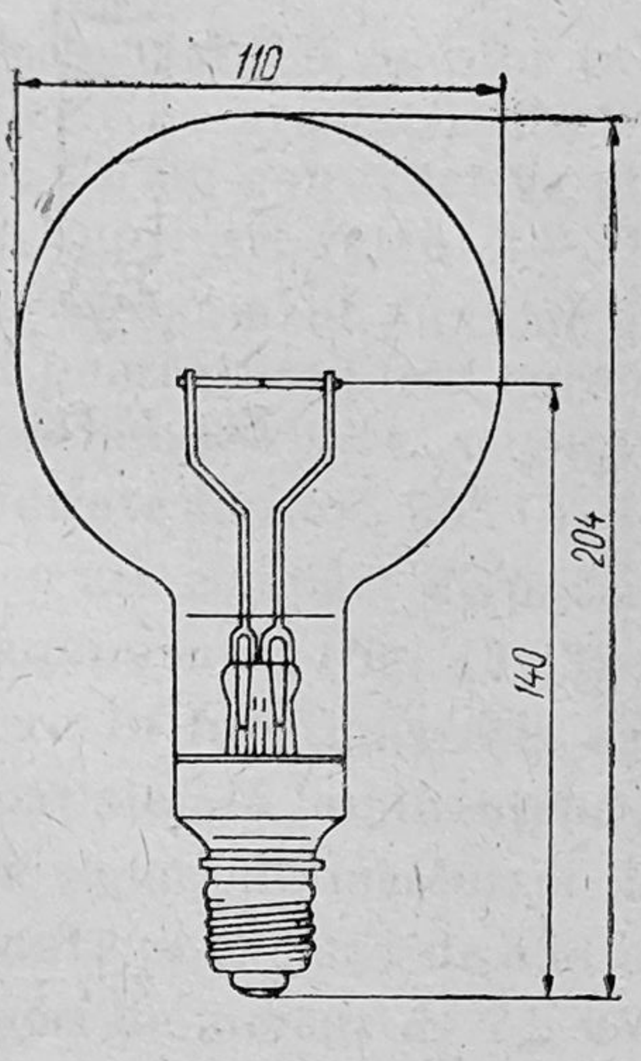
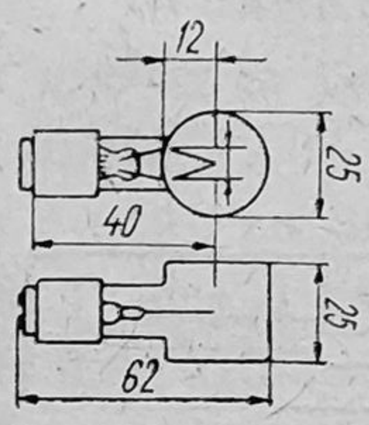
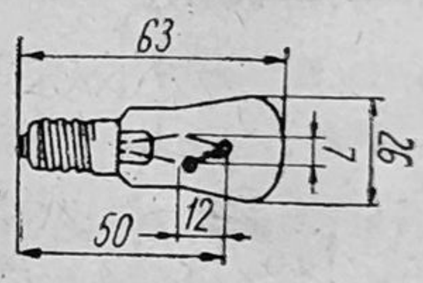


Fig. 12.25


38
135
38
135
40
125
60
55
170
35


110
204
140


12
25
40
25
62


63
26
7
50
12

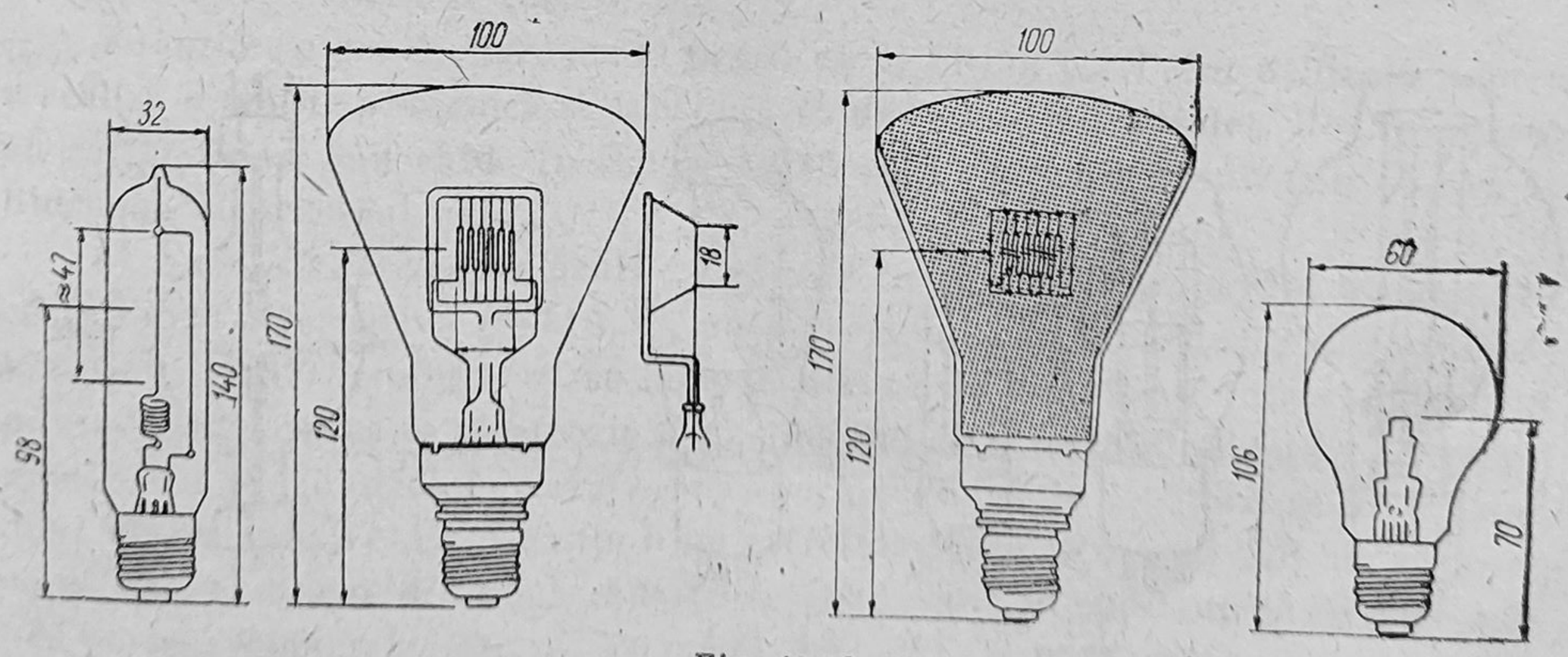
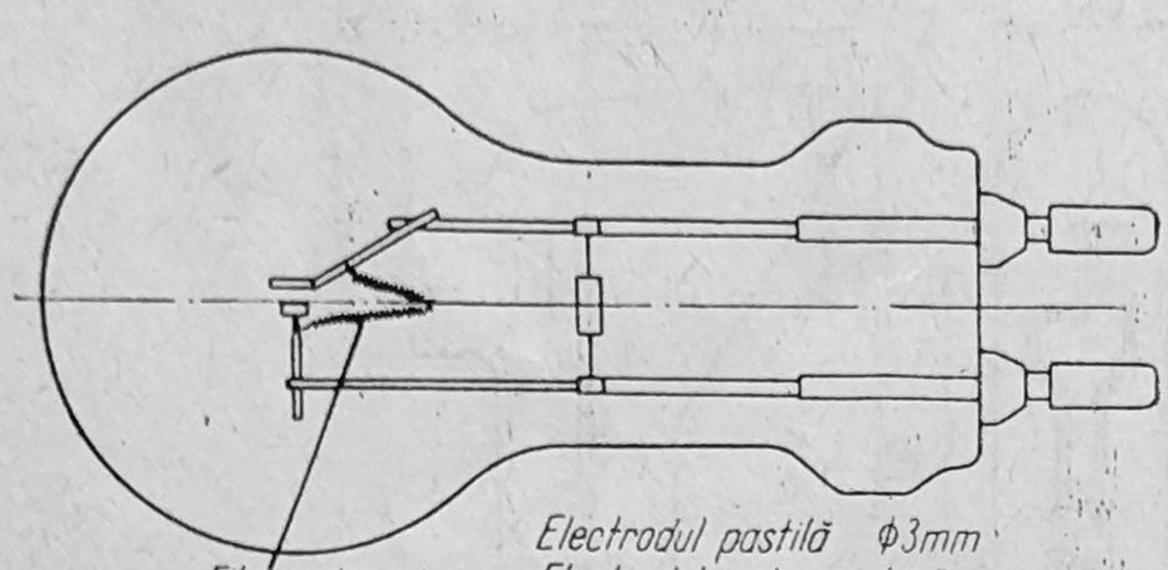

32
≈47
98
140
100
170
120
18
100
170
120
60
106
70

Fig. 12.26



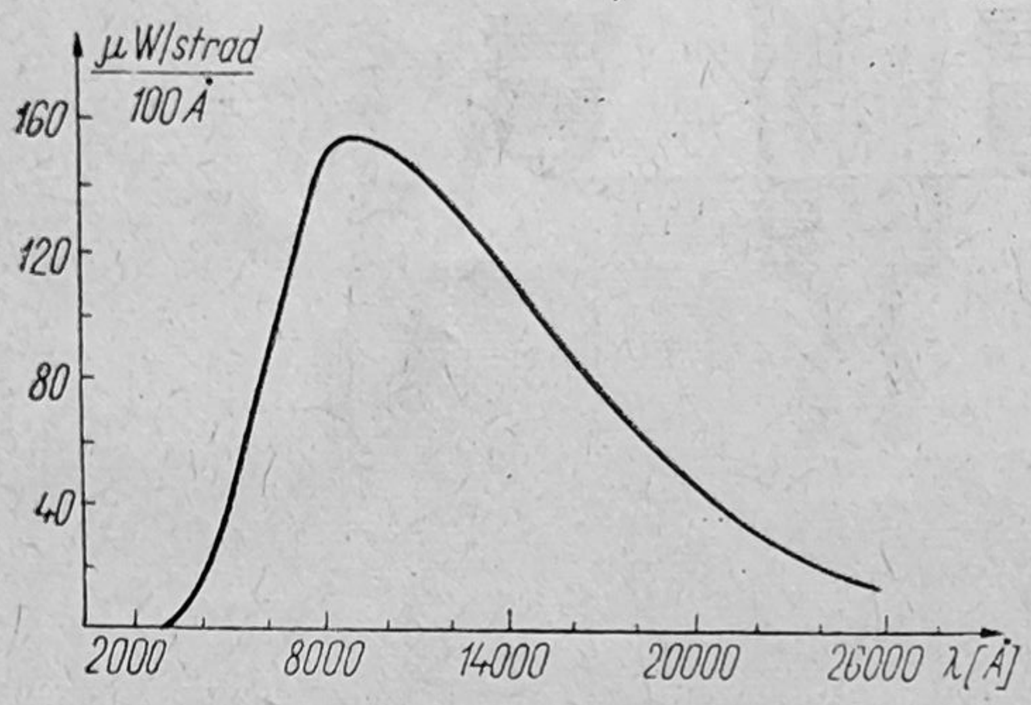


Fig. 12.27

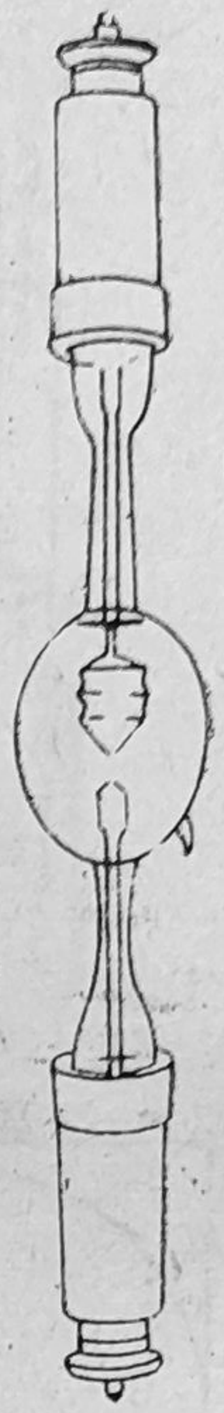


Fig. 12.31

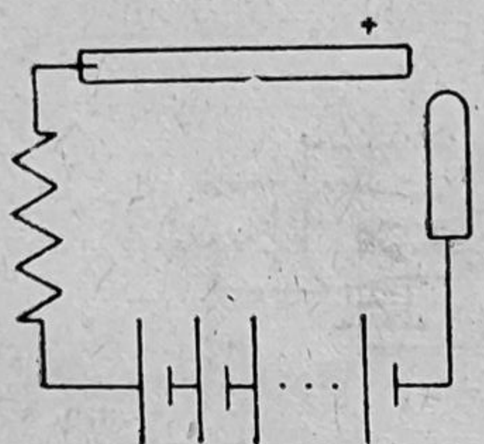


Fig. 12.28

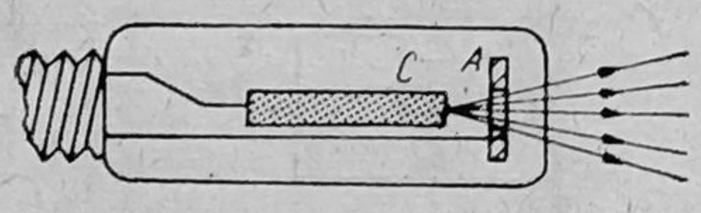


Fig. 12.29

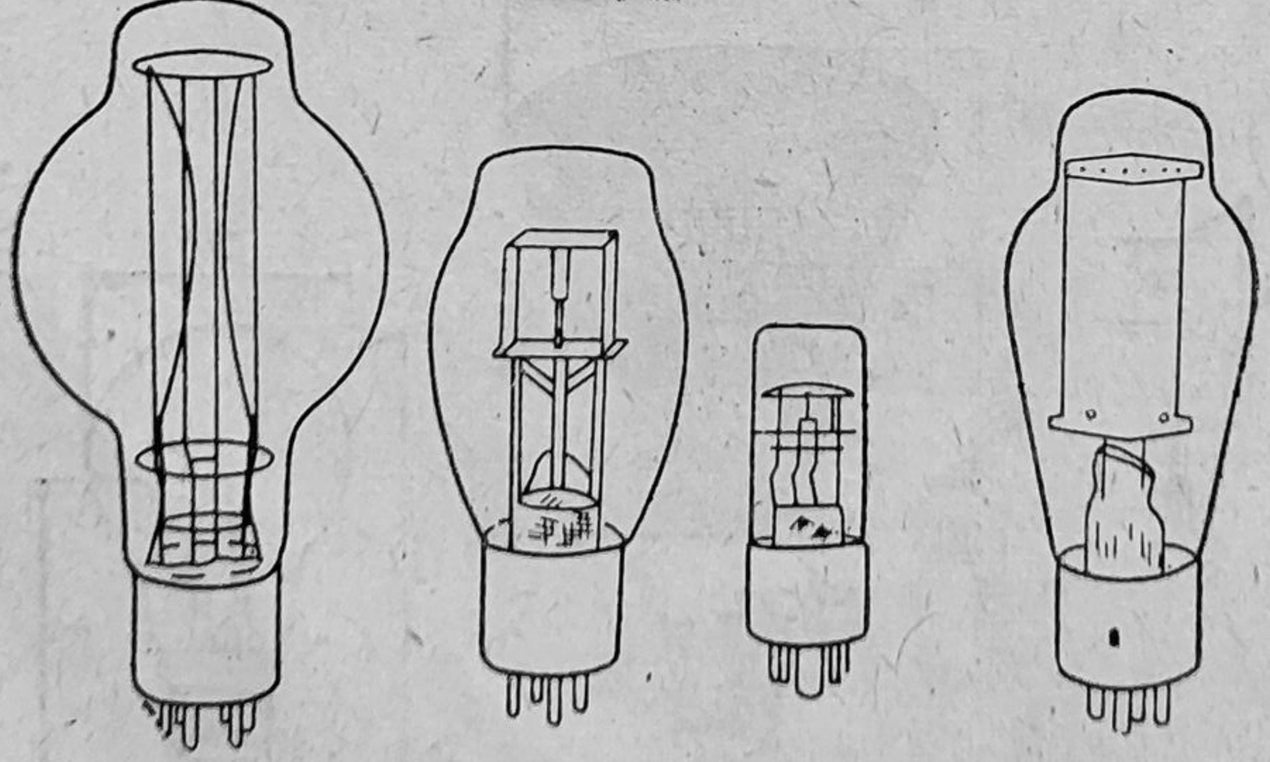


Fig. 12.30

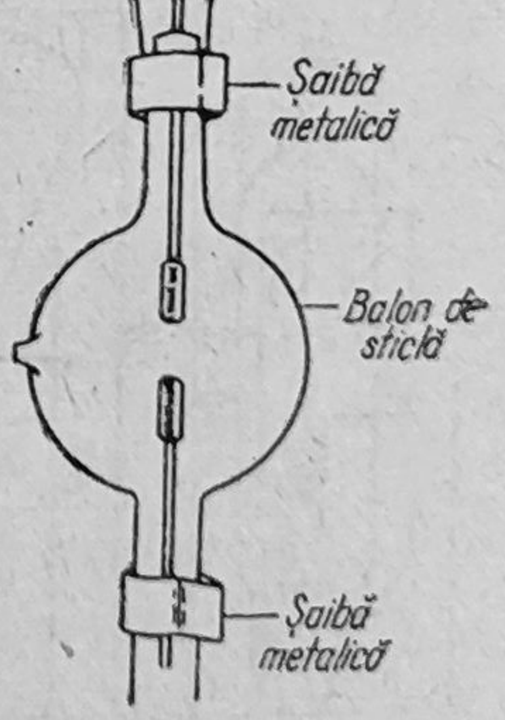


Fig. 12.32

pendentă de intensitatea curentului (fig. 12.28). Arcul se amorsează punînd electrozii în contact, apoi depărtîndu-i convenabil. În aer electrozii ard (se consumă) puţin cîte puţin, ceea ce necesită reglarea lor, eventual printr-un dispozitiv automat. Partea cea mai strălucitoare a arcului este craterul ce se formează pe electrodul pozitiv ; este avantajos, deci, a dispune oblic cei doi electrozi, sau perpendicular, pentru a face să coincidă axa fasciculului luminos cu axa electrodului pozitiv. Radiaţia emisă poate fi modificată încorporînd în cărbune diferite substanţe.

Tuburile compacte cu plasmă de arc au următoarele caracteristici constructive comune :

— un balon sferic din cuarţ, umplut cu gaz (xenon sau argon) sau vapori de mercur, avînd la capete terminale pentru electrozi ;

— o pereche de electrozi situaţi la o distanţă relativ mică (între 1 mm şi 10 mm), ceea ce determină denumirea de ţuburi cu arc scurt : catodul, un tub metalic conţinînd bioxid de zirconiu, şi anodul, o placă metalică cu un orificiu lăsînd să treacă lumina (fig. 12.29).

Performanţele acestor tuburi se situează între cele cu filament de tungsten şi cele cu arc între electrozi de cărbune. În figura 12.30 sînt prezentate diferite forme constructive ale unor tuburi cu arc compact, cu zirconiu, cu puteri cuprinse între 2—300 W.

— echipament auxiliar pentru realizarea unei tensiuni ridicate de amorsare şi pentru limitarea curentului de lucru. Aceste surse cu arc compact au o înaltă luminozitate, asigurată de un regim de lucru la presiuni şi temperaturi ridicate (aprox. 900°C). În figurile 12.31 şi 12.32 sînt reprezentate două surse cu arc compact de puteri ~5 kW. În unele cazuri se utilizează un electrod suplimentar (fig. 12.33), pentru obţinerea tensiunii de amorsare sau de repunere în funcţionare la cald. În figura 12.34 sînt reprezentate distribuţiile spaţiale ale luminanţelor pentru un tub cu xenon de putere 5 kW şi un tub cu vapori de mercur şi xenon de putere 5 kW. În figura 12.35 sînt reprezentate polar faţă de axa arcului distribuţiile radiaţiilor emise de un tub cu vapori de mercur de 7,5 kW şi de un tub cu vapori de mercur şi xenon de putere 2,5 kW, nesimetria diagramei acestuia din urmă se datorează inegalităţii dimensionale a electrozilor.

Tuburile cu arc de hidrogen la presiune de cîţiva torri sînt utilizate pentru a realiza o emisie puternică şi continuă în domeniul ultraviolet. Pot funcţiona cu catodul rece sau cald. În figura 12.36 este reprezentat un tub cu arc în hidrogen cu catodul cald.

b) *Surse cu spectru de benzi. Tuburile cu vapori de sodiu* sînt alimentate cu tensiune alternativă ($\simeq 110$ V), au o rezistenţă în serie de 70 Ω sau o bobină (fig. 12.37) ; amorsarea se face închizînd de cîteva ori întrerupătorul I punînd astfel în serie electrozii E şi aducîndu-i la incandescenţă. Începutul descărcării aduce mediul în stare de vapori, regimul de funcţionare fiind atins după cîteva minute. Luminanţa unei astfel de surse este $\approx 15 \cdot 10^3$ nt. Lumina emisă este compusă din două radiaţii foarte vecine în spectru, de culoare galben-portocaliu deschis ($\lambda_{mediu} = 5\,893$ Å).

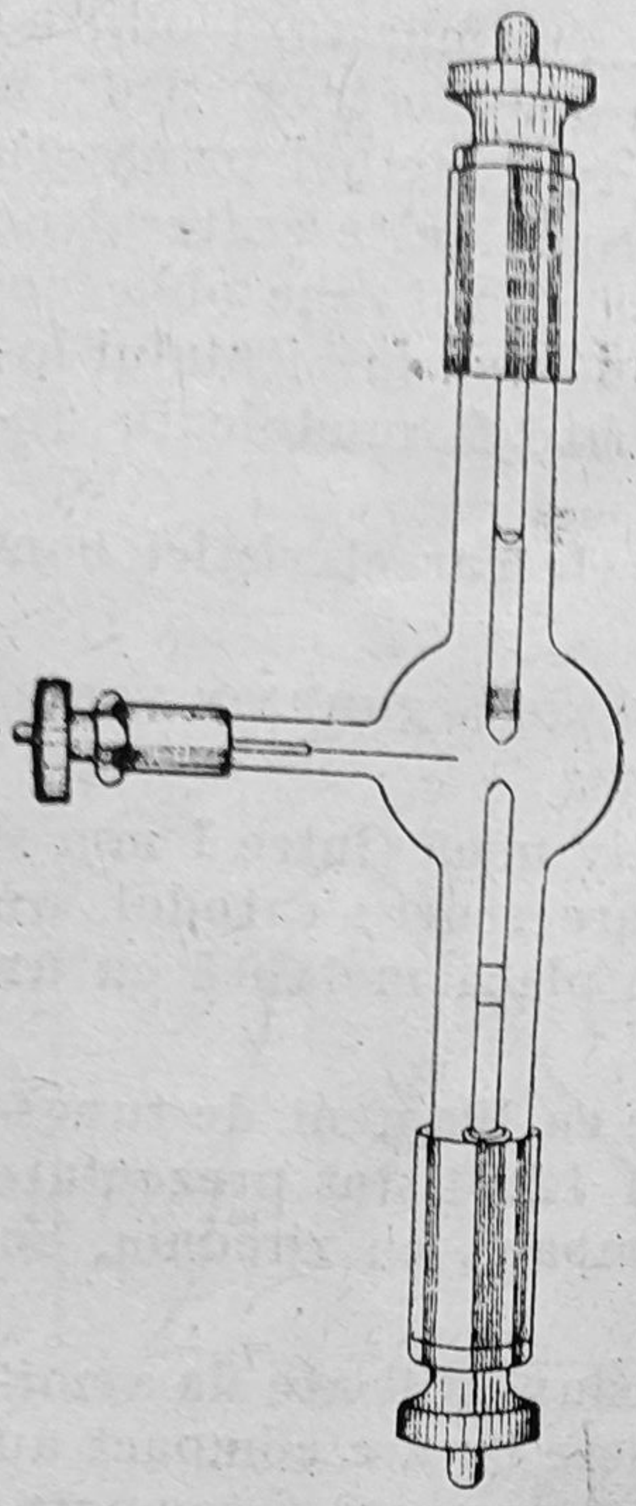


Fig. 12.33

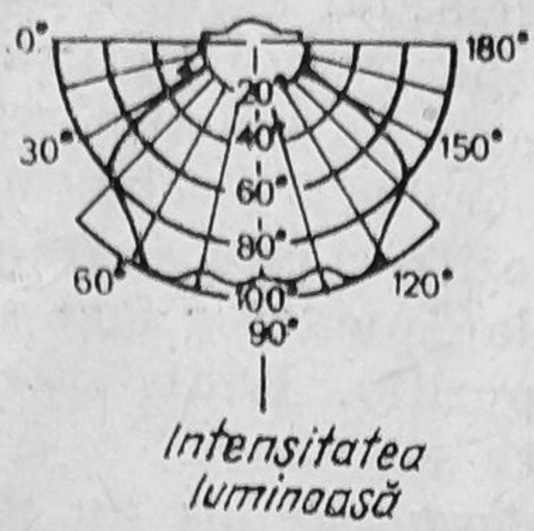


Fig. 12.35

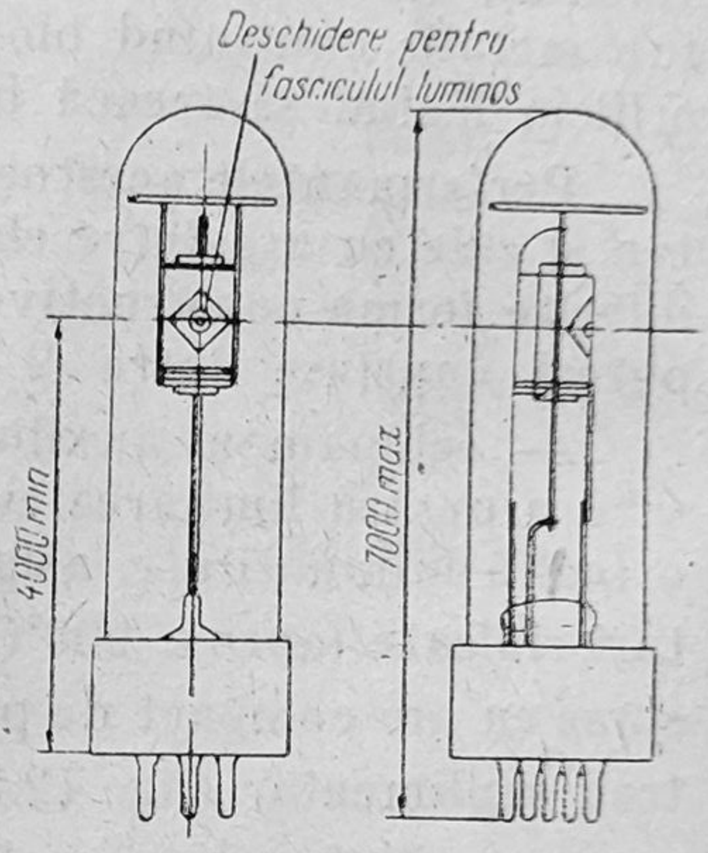


Fig. 12.36

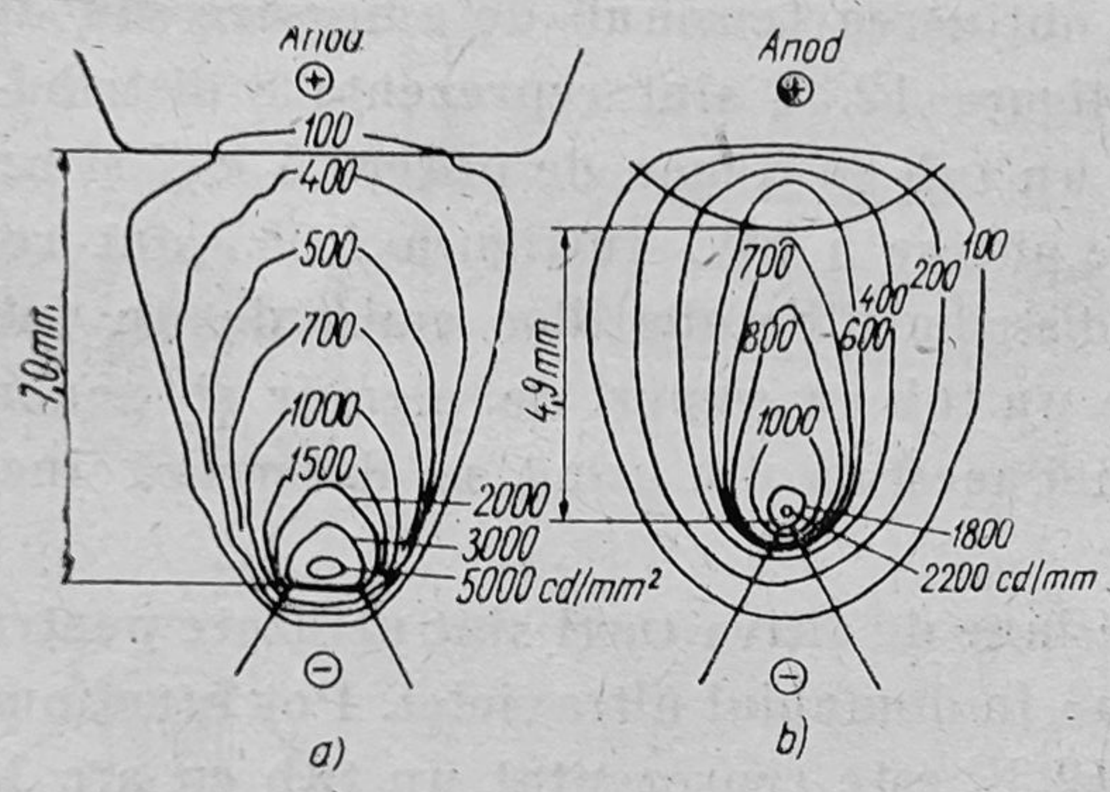


Fig. 12.34

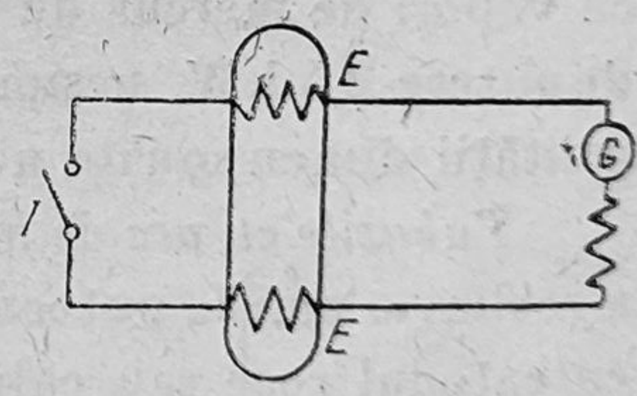


Fig. 12.37

Tuburile cu vapori de mercur sînt constituite în general dintr-un tub de sticlă sau cuarț, traversat de doi electrozi scăldați de mercur între care se stabilește o diferență de potențial (40—100 V), care depinde de lungimea coloanei luminoase, de rezistența interpusă sau de bobină (dacă tensiunea este alternativă). Dacă tensiunea este continuă, anodul poate fi constituit dintr-un alt metal decît din mercur. Pentru amorsarea tubului cu vapori de mercur la presiunea joasă, acesta se înclină astfel ca mercurul să unească temporar cei

doi electrozi. Tubul nu se încălzește, iar presiunea vaporilor și luminanța rămîn scăzute. Luminanța emisă conține mai multe radiații monocromatice, dintre care mai importante în spectrul vizibil sînt : albastru ($\lambda = 435{,}8$ nm), verde ($\lambda = 546{,}1$ nm) și galben ($\lambda = 577$ nm și $\lambda = 579{,}1$ nm).

Există tuburi cu mercur care funcționează la o temperatură mai ridicată, presiunea atingînd cîteva atmosfere. Construcția acestor lămpi se aseamănă cu a celor cu vapori de sodiu (fig. 12.38). Luminanța lor este de ordinul 10^7 nt.

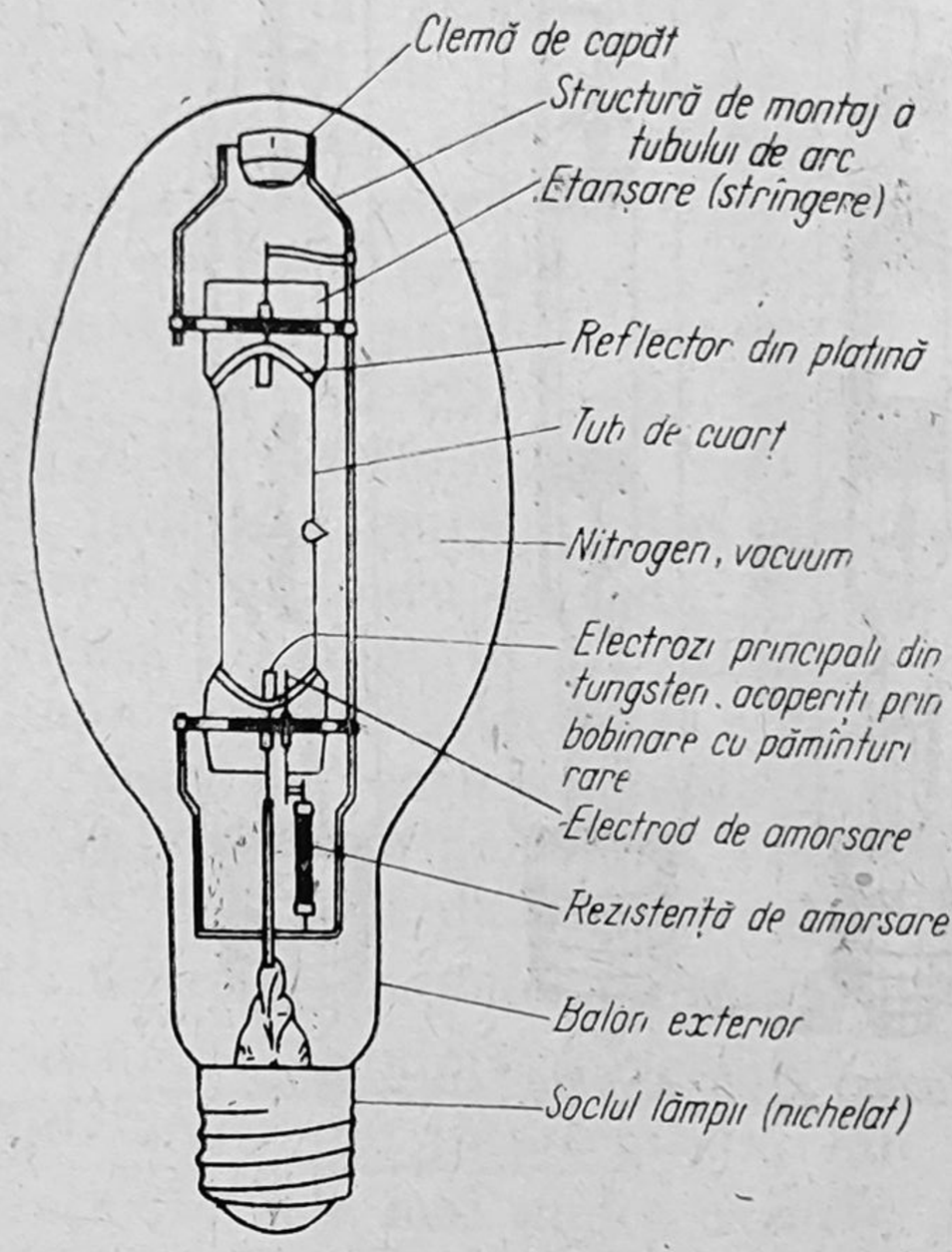


Fig. 12.38

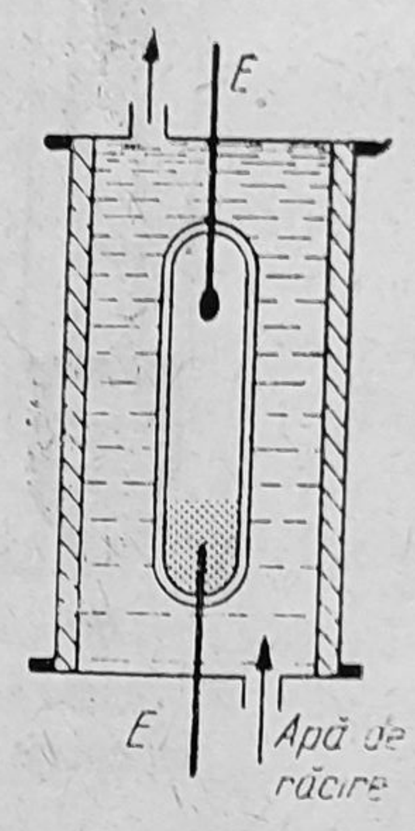


Fig. 12.39

Tuburile cu vapori de mercur la presiune înaltă (200 atm) ating aproape luminanța solară $L \simeq 9 \cdot 10^8$ nt. Aceste tuburi au două învelișuri transparente între care circulă apa de răcire pentru a evita fuziunea balonului interior de cuarț. În figura 12.39 este prezentat un tub cu vapori de mercur la presiunea de 200 bari. Cu cît presiunea crește, cu atît radiațiile monocromatice sînt mai puțin pure, un spectru continuu din ce în ce mai dezvoltat suprapunîndu-se peste spectrul de benzi.

Tuburile spectrale sînt surse cu arc, similare sub aspect constructiv celor compacte, umplute cu diferite gaze rare sau vapori și care emit radiații monocromatice sau un spectru discontinuu controlat, cuprins de la ultraviolet (230 mn) pînă în infraroșu apropiat. Baloanele exterioare ale tuburilor spectrale, realizate din sticlă sau cuarț în funcție de regiunea din spectru în care funcționează, sînt umplute cu un gaz inert. În figura 12.40 sînt reprezentate cîteva tipuri de tuburi spectrale.

Observație. Lumina dată de arcuri între electrozi de cărbune, dar mai ales între electrozi metalici (mercur, îndeosebi) conține o proporție destul de importantă de radiații ultraviolete periculoase pentru ochi, astfel încît este indispensabilă utilizarea ochelarilor, care opresc radiațiilor ultraviolete.

Sursele care lucrează într-un regim de presiune și temperaturi ridicate necesită precauții deosebite de protecție contra unor explozii accidentale.

c) *Laseri.* Sursele laser generează sau/și amplifică radiațiile luminoase, pe baza fenomenului de emisie stimulată. Principiul funcționării unui laser cu două nivele constă din interacțiunea a două sisteme fizice (fig. 12.41): cîmpul electromagnetic dintr-o caviate rezonantă (denumită rezonator optic) și mediul activ, situat în aceeași cavitate, ai cărui atomi sau electroni sau

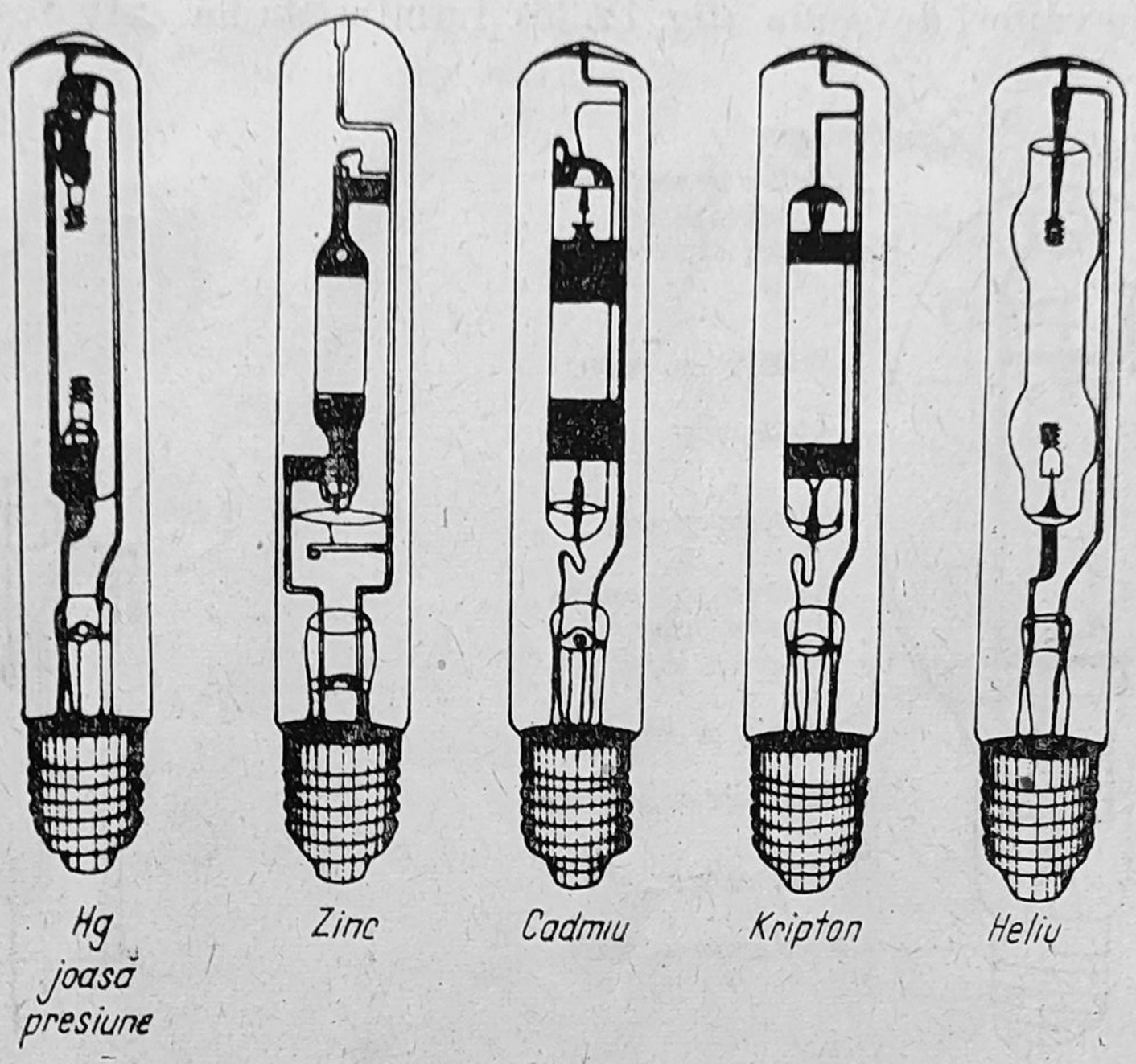


Fig. 12.40

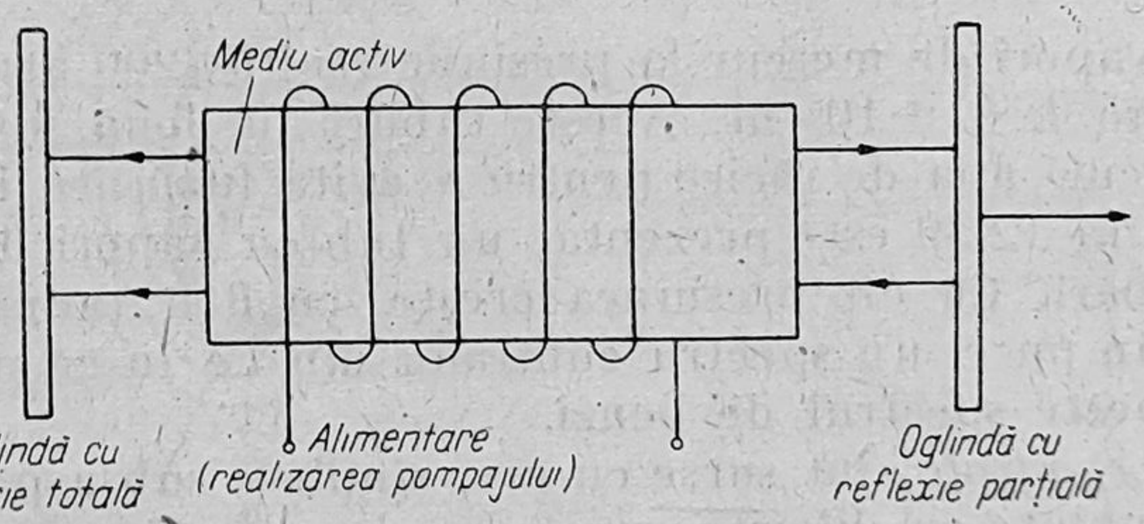


Fig. 12.41

molecule posedă două nivele energetice a căror diferență de energie $\Delta W = \hbar\omega$ corespunde frecvenței de rezonanță ω a cavității: $l = n \cdot \lambda/2 \rightarrow \omega = n \cdot \pi c/l$, unde l este lungimea cavității, iar $n \in \mathbb{N}$ indică ordinul modului (în domeniul optic vizibil $n \simeq 10^6$). Emisia stimulată este asigurată de inversia populației celor două nivele energetice; inversia populației se obține în funcție de particularitatea fiecărui mediu activ, metodele mai des utilizate fiind pompajul optic, descărcarea electrică în gaze, interacțiuni atomice sau reacții chimice care produc atomi sau molecule în stări excitate.

Lungimea de undă a radiației luminoase fiind foarte mică în raport cu dimensiunile obișnuite ale unei cavități rezultă că un dispozitiv laser poate emite într-un număr mare de moduri. În aplicațiile metrologice stabilitatea în frecvență a radiației laser este foarte importantă, astfel încît au fost construiți *laseri monomod* care emit o singură frecvență în domeniul vizibil. Un laser monomod se obține prin reducerea lungimii cavității rezonante, astfel încît în domeniul vizibil să nu mai existe decît o singură frecvență de rezonanță a cavității. Se poate realiza astfel coincidența frecvenței de rezonanță a cavității cu cea a emisiei stimulate în punctul numit *lamb-dip* (fig. 12.42), ceea ce asigură o mare stabilitate a frecvenței radiației emise. Adîncitura lamb în distribuția de intensitate a radiației emise apare datorită efectului Doppler : $\omega = \omega_0(1 \pm v/c)$, unde v este viteza atomilor în cavitatea de rezonanță, iar c viteza luminii.

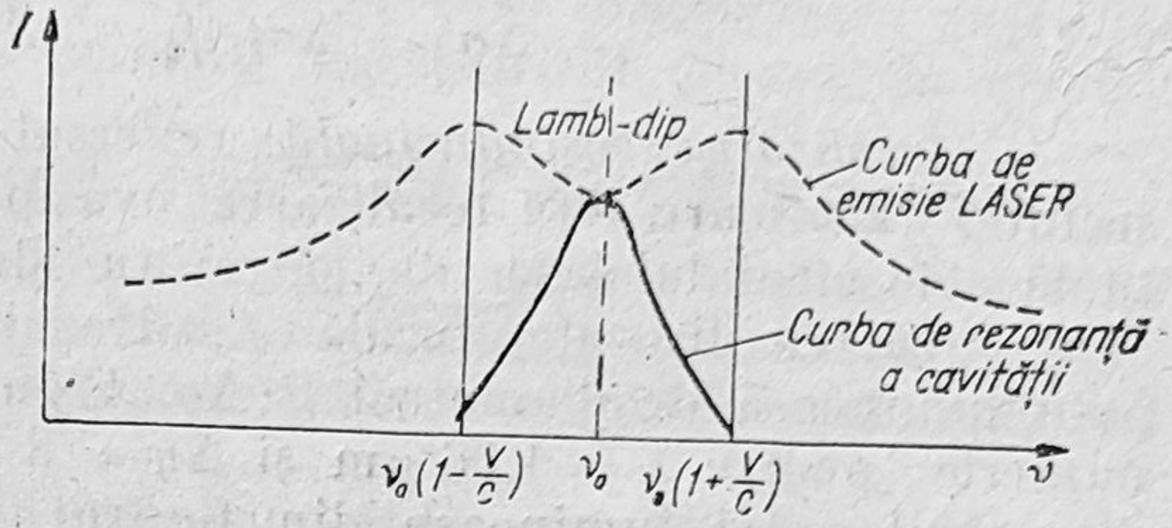


Fig. 12.42

Importanța surselor laser constă în gradul mare de coerență a radiației emise, ceea ce creează posibilitatea analizării și prelucrării radiațiilor emise, analog ca și undele hertziene. Proprietățile radiației laser, datorate faptului că emisia este stimulată, sînt următoarele .

1°. *Coerență spațială.* Definiția coerenței spațiale în cazul surselor clasice este : distanța maximă între două puncte pe suprafața sursei pentru care radiațiile emise pot interfera. Într-un laser lumina axială dă naștere emisiei stimulate (în cele mai multe cazuri), astfel încît noțiunea de coerență spațială exprimă practic întinderea undei plane : suprafața mediului activ în care fotonii sînt descriși de aceeași undă se numește *întindere de coerență.* În cazul unui mediu activ neomogen (de exemplu, cristalul de rubin) emisia luminii se produce instantaneu dintr-o regiune mică a mediului. Însă, în cazul unui mediu activ omogen (de exemplu, laserii cu gaz) unda electromagnetică umple tot volumul cavității. În general, întinderea de coerență reprezintă secțiunea transversală a fasciculului laser. Această proprietate are două consecințe importante observate experimental :

— *directivitatea fasciculului laser :* considerînd propagarea în lungul axei Oz perpendiculară pe oglinzile cavității, iar Δx și Δy dimensiunile secțiunii fasciculului laser reprezentînd întinderea de coerență, conform relațiilor de nedeterminare al lui Heisenberg rezultă

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar/2, \ \Delta y \Delta p_y \geqslant \hbar/2.$$

Impulsul p trebuie să fie paralel cu axa Oz, adică :

$$p_z \simeq p = \hbar k = \hbar \cdot 2\pi/\lambda.$$

Unghiul σ dintre p și axa Oz este, așadar, nul, cu o incertitudine :

$$\Delta\sigma \simeq \Delta p_x/p_z \simeq \Delta p_y/p_z \geqslant \lambda/(4\pi \Delta y) \Rightarrow [\Delta\sigma] \simeq \lambda/\Delta y.$$

Acest rezultat poate fi enunțat astfel : precizia cu care este definit modul de unde staționare este limitată de fenomenul de difracție (apariția lui $\Delta\sigma$), funcție de dimensiunile secțiunii fasciculului laser. Directivitatea fasciculului laser poate fi mărită utilizînd un sistem optic afocal (lunetă așezată invers), reprezentat schematic în figura 12.43. Se obține în acest mod

$$\Delta\sigma' = \Delta\sigma f_1'/f_2'; \quad \Delta y' = \Delta y f_2'/f_1';$$

— *focalizarea cvasipunctuală*: reversul consecinței anterioare este focalizarea cvasipunctuală a fasciculului laser de către un sistem convergent cu distanța focală f'. Rezultă o pată luminoasă de diametrul $f' \cdot \Delta\sigma$. Exemplu numeric : pentru $\lambda = 1{,}06$ μm și $\Delta y = 3$ mm, diametrul petei luminoase din focarul unui obiectiv, cu distanță focală $f' = 40$ mm, este $\simeq 14$ μm.

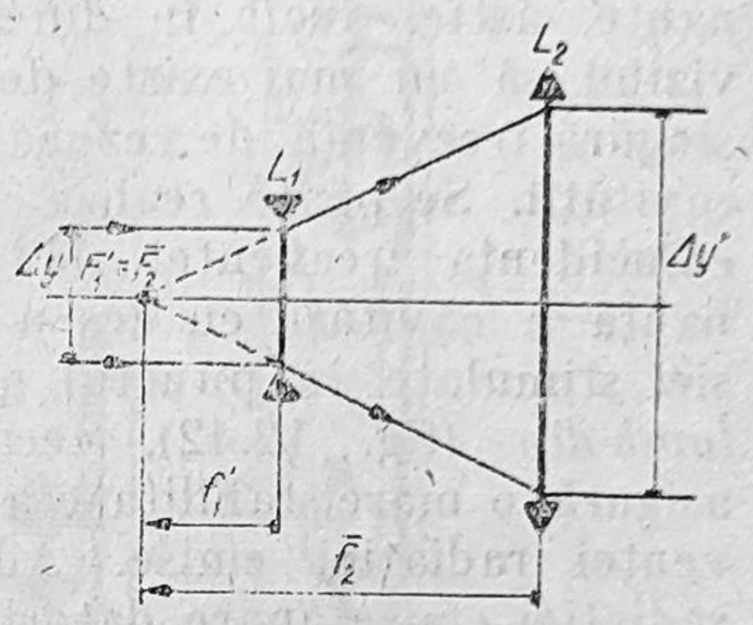


Fig. 12.43

2°. *Coerența temporală* reprezintă intervalul de timp între două emisii ale sursei care pot interfera. Așadar, prin coerență temporală se înțelege intervalul de timp Δt, numit *timp de coerență*, în decursul căruia fotonii emiși sînt descriși de aceeași undă. În cazul surselor de lumină ordinare timpul de coerență este determinat de lărgimea Doppler a liniei spectrale: $\Delta t = 1/\Delta\omega_D \simeq 10^{-9}$ secunde. În cazul laserilor cu emisie continuă timpul de coerență este mult mai mare, atingînd curent $\Delta t \simeq 10^{-6}$ secunde, iar în condiții speciale $\Delta t \simeq 10^{-3}$ s. Timpul de coerență se determină experimental prin observarea franjelor de interferență ce corespund diferențelor de drum foarte mari, rezultînd $\Delta t = \Delta l/c$, sau prin observarea fenomenului de „bătăi" între două fascicule provenind de la doi laseri independenți. Amplitudinea undei rezultante este modulată în timp cu frecvența $\omega_1 - \omega_2$. Fluctuațiile asupra frecvenței bătăilor dau posibilitatea determinării ordinului de mărime al fluctuațiilor celor două frecvențe, $\Delta\omega_1$ și, respectiv, $\Delta\omega_2$, iar utilizarea relației de nedeterminare permite deducerea timpului de coerență $\Delta t = 1/\Delta\omega$.

3°. *Monocromaticitatea radiației laser.* Lumina laser are o puritate spectrală deosebită, deoarece modul axial care este legat strîns de rezonanța atomică are amplitudinea cea mai mare, radiația laser concentrîndu-și lărgimea în jurul acestei frecvențe. Lărgimea liniei laser apare datorită emisiei spontane care însoțește emisia stimulată. Semilărgimea liniei laser este dată de expresia : $\Delta\omega_L \approx 8\omega_0\hbar(\Delta\omega_N)^2/P_e$, unde $\Delta\omega_N$ este lărgimea naturală, iar P_e puterea de ieșire a radiației laser. Experimental, prin măsurarea fluctuațiilor de scurtă durată a frecvenței bătăilor între două fascicule laser, s-a determinat $\Delta\omega_L \simeq 10^3$ Hz, de 100...1 000 ori mai mică decît cele mai fine lărgimi ale liniilor atomice naturale. Pînă la apariția laserului se considera lărgimea naturală ca limita preciziei frecvenței radiației emise ; explicația depășirii acestei limite naturale este faptul că în dispozitivul laser ansamblul atomilor din cavitatea rezonantă emite o undă electromagnetică de durată mult mai mare decît un singur atom. Lărgimea liniei laser determină precizia de stabilizare a lungimii rezonatorului, deoarece $\Delta\omega/\omega = \Delta l/l$.

4°. *Intensitatea radiației laser.* Datorită directivității fasciculului laser, toată energia emisă este concentrată într-un fascicul de secțiune foarte mică și unghi solid foarte mic. De asemenea, frecvența de emisie fiind foarte bine definită, densitatea de energie spectrală este extrem de ridicată în comparație cu oricare altă sursă de lumină.

5°. *Impulsuri ultrascurte.* Dispozitivele laser care funcționează în regim de sincronizare a modurilor pot să producă impulsuri de durată de ordinul $10^{-12}...10^{-13}$ secunde.

Tipurile de surse laser se disting după mediul activ utilizat:

1°. *Laseri cu mediul activ solid dielectric*, cel mai utilizat mediu activ fiind ioni dispersați într-o concentrație redusă, fie într-o rețea cristalină pură, fie în sticlă sau plastic. Din această categorie, mai reprezentativi sînt următorii laseri:

— laserul cu cristal de rubin-corindon Al_2O_3 impurificat cu ioni trivalenți de crom Cr^{3+} în concentrație de 0,05% în cazul rubinului roz, sau 0,5% în cazul rubinului roșu. Radiația laser emisă de rubinul roz are lungimea de undă $\lambda = 694{,}3$ nm; rubinul roșu emite radiații laser $\lambda_1 = 700{,}9$ nm și $\lambda_2 = 704{,}1$ nm. În figura 12.44 este reprezentată schematic construcția primului laser cu cristal de rubin;

— laserul cu sticlă dopată cu neodim; $\lambda = 1{,}06$ μm;

— laserul cu granați (YAG) dopați cu neodim: $\lambda = 1{,}06$ μm.

Laserii cu mediul activ solid dielectric au următoarele caracteristici generale:

— inversia populației nivelelor energetice se realizează prin pompaj optic: absorbția de către ionul dopat a unei părți din energia luminii necoerente emise de obicei de o sursă flash;

— randament scăzut: 0,1—2%, deoarece nu toată energia luminoasă a tubului de pompaj este absorbită de ionii activi și mediului;

— mediul activ se încălzește în cazul pompajului cu energie mare; în aceste cazuri laserul funcționează în regim pulsat. Tehnica de declanșare, bazată pe variația rapidă a factorului de calitate a rezonatorului optic în timpul pompajului, permite obținerea de pulsuri de durată $10^{-8}...10^{-11}$ secunde. Tehnica sincronizării modurilor a permis reducerea duratei pulsurilor la $10^{-12}...10^{-3}$ s. Funcționarea în regim continuu a laserilor cu solide nu este posibilă decît pentru medii active cu dimensiuni reduse care facilitează răcirea.

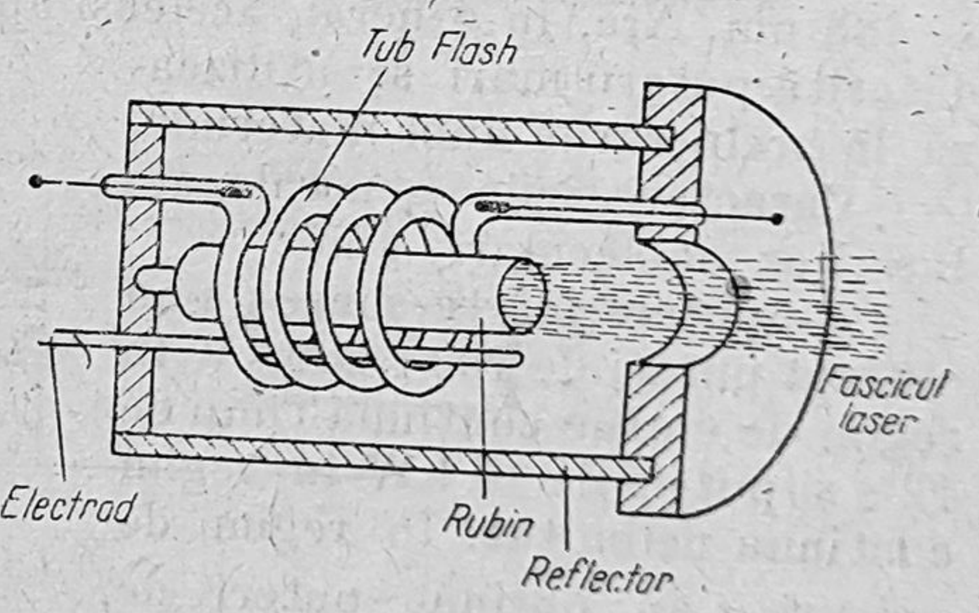


Fig. 12.44

Cele mai importante aplicații tehnice ale laserilor cu solide sînt: telemetria terestră, ghidaje optice, măsurarea distanțelor pînă la sateliți, microsudură, holografia ultrarapidă, medicină.

2°. *Laseri cu gaz*, care pot fi de trei feluri: cu gaz atomic, cu gaz ionic, cu gaz molecular. Caracteristicile generale ale laserilor cu gaz atomic și ionic sînt:

— funcționează mai ales în regim continuu;

— pot fi reglați astfel ca să lucreze monomod, lărgimea liniei laser $\leqslant 10^3$ Hz, iar lungimea de coerență pînă la $10^5 \ldots 10^6$ m ;

— divergența fasciculului laser este sub 3′ ;

— randamentul are valoarea de 1 ...7 % ;

— puterile obținute în regim continuu sînt 0,1 ... 0,5 W pentru laserul cu He—Ne și pînă la 1 000 W pentru laserul cu argon ionizat.

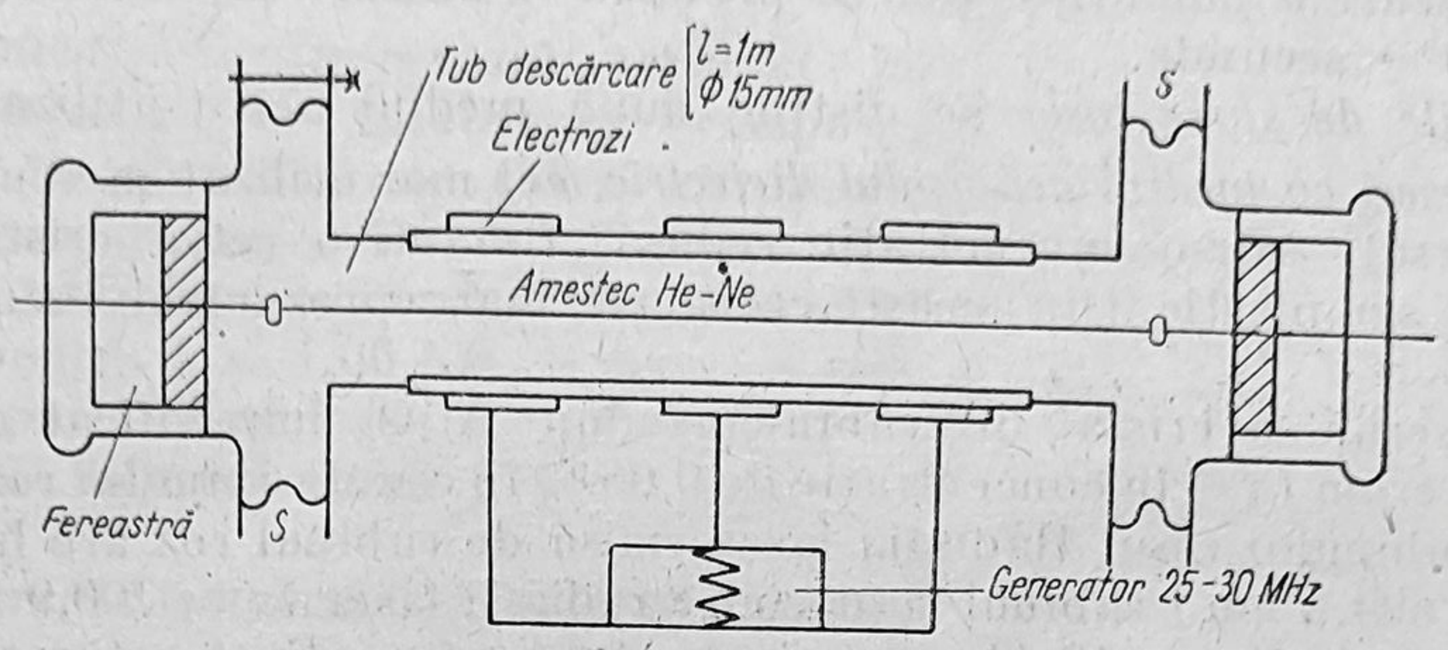


Fig. 12.45

Cei mai reprezentativi laseri cu gaz atomic și ionic sînt :

— laserul atomic cu He—Ne care emite radiații cu lungimile de undă $\lambda_1 = 632{,}8$ nm, $\lambda_2 = 1\,153$ nm și $\lambda_3 = 3\,390$ nm. Primul laser de acest tip, construit în 1960, este reprezentat schematic în figura 12.45. Aplicațiile tehnice cele mai importante ale laserului cu He—Ne sînt : telecomunicații cu laser, interferometrie cu laser, etaloane de lungime și timp, holografie, girometrie, alinieri și reglaje optice, centrarea sistemelor optice, prelucrarea optică a informației ;

— laserul cu argon ionizat emite radiații cu lungimea de undă $\lambda = 488$ nm. Are, în general, aceleași aplicații ca și laserul cu He—Ne, în plus datorită puterii mari se utilizează la prelucrările unor materiale.

Caracteristicile generale ale laserilor moleculari sînt :

— putere foarte mare ; s-au obținut puteri de 100 ÷ 200 kW în regim de emisie continuă timp de 12 s și puteri de 10 kW în regim continuu nelimitat. În regim de pulsuri s-au obținut puteri de vîrf $10^{11} \ldots 10^{13}$ W ;

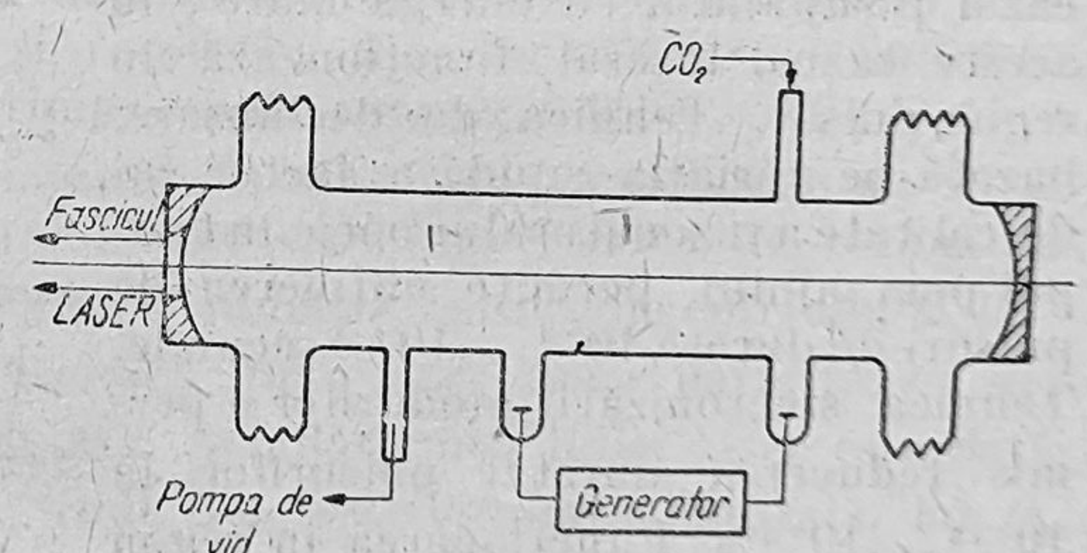


Fig. 12.46

— randament bun (teoretic 40—45 %, experimental 10—35 %), deoarece nivelele vibraționale metastabile moleculare au o viață medie mai lungi decît cele atomice ;

— nu prezintă limitare importantă prin saturație, ceea ce permite creșterea puterii o dată cu creșterea dimensiunilor.

Laserul molecular cel mai utilizat este cel cu mediu activ CO_2 (fig. 12.46), care emite radiații cu $\lambda = 10{,}59$ μm. Laserul cu CO_2 poate funcționa în regim continuu, furnizînd o putere de pînă la 30 W, sau în regim de pulsuri, atingînd o putere de vîrf de 1 kW, durata pulsurilor fiind de 150 μs.

Aplicațiile mai importante ale laserului molecular cu CO_2 sînt : producerea de plasmă, fuziunea materialelor refractare, prelucrarea metalelor, sudură.

3°. *Laseri cu mediu activ lichid.* Lichidele, ca și gazele, înlătură cerințele ce se pun formării cristalelor și, în plus față de gaze, permit realizarea unei concentrații exacte de particule active într-un volum dat, Există două feluri de laseri cu mediu activ lichid :

— care înlocuiesc laserii cu mediu activ solid (de exemplu, laseri cu chelați de lantanide, laserul cu Nd^{3+} dizolvat în oxiclorură de *Se*) ;

— laseri acordabili cu mediu activ soluții de coloranți (rodamină, acridină, fluoresceină).

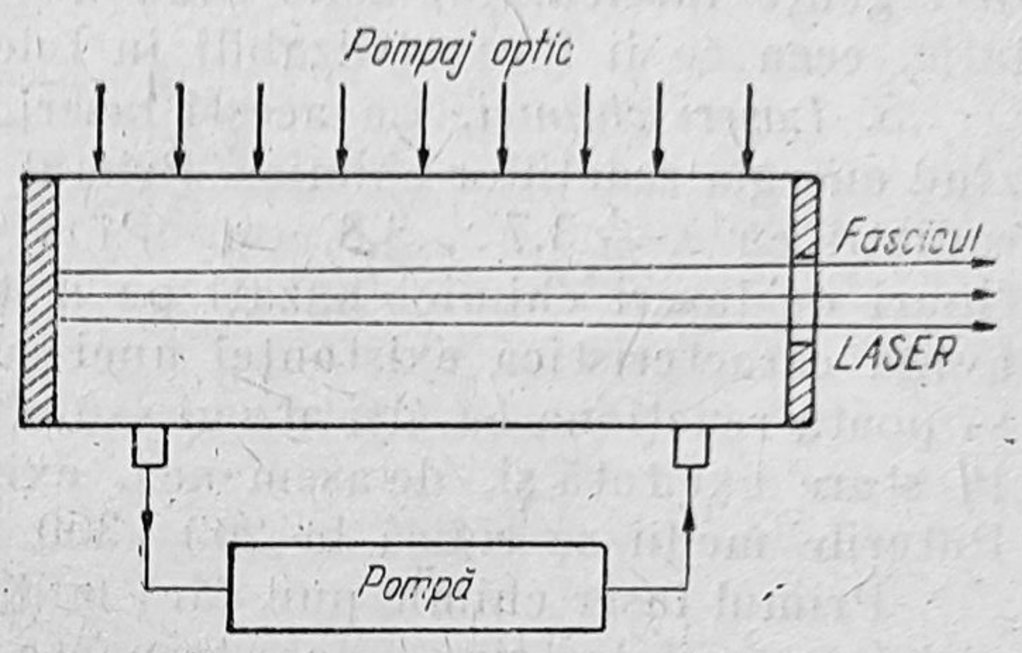


Fig. 12.47

Construcția unui dispozitiv laser cu mediu activ lichid este prezentată în figura 12.47 : în cavitatea rezonantă lichidul se află în continuă mișcare, asigurată de o pompă : la capetele cavității se află cele două oglinzi, dintre care una cu reflexie parțială pentru a permite ieșirea radiației laser ; excitarea mediului activ se face prin pompaj optic.

Caracteristicile generale ale laserilor cu mediu activ lichid sînt : frecvența de lucru poate fi variată pe domenii $\Delta d = 60 \ldots 100$ nm ; radiațiile emise au lungimi de undă $\lambda \in [154 \text{ nm} ; 300 \ \mu\text{m}]$; puterea de ieșire este de 200—600 kW la funcționarea în regim de pulsuri, durata medie a unui puls fiind $\simeq 10^{-8}$ s ; lărgimea liniei emise este $\Delta\lambda \simeq 0{,}1 \ldots 1$ nm pentru laserii cu chelați de lantanide și sub 0,1 nm pentru laserii cu soluții de coloranți.

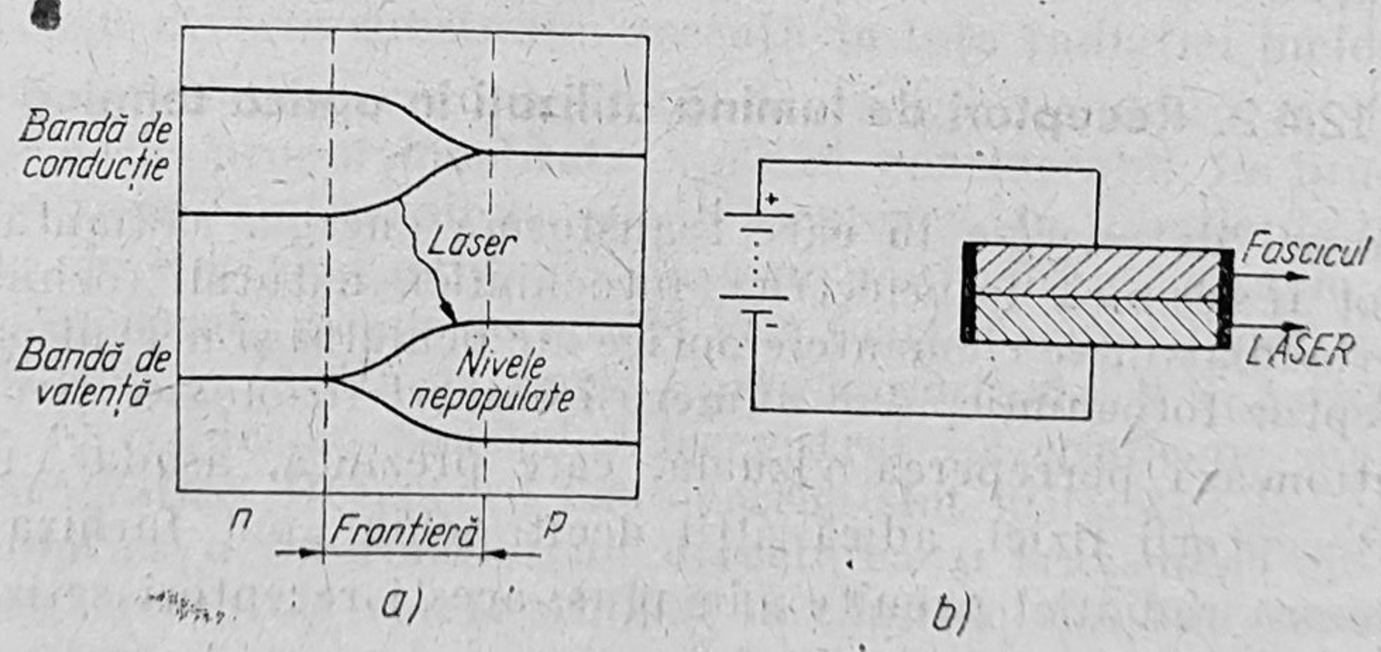


Fig. 12.48

4°. *Laseri cu semiconductori.* Funcționarea acestor laseri se bazează pe realizarea inversiei populației între banda de conducție a zonei *n* și banda de valență a zonei *p*, sub acțiunea unui curent foarte intens aplicat unei joncțiuni *p—n* (fig. 12.48, *a*).

Cel mai utilizat laser cu semiconductori este cel cu GaAs, care emite radiații cu $\lambda_1 = 842$ nm și $\lambda_2 = 904$ nm. În figura 12.48, *b* este reprezentant schematic primul laser cu arseniură de galiu, care are componenta principală

un cristal semiconductor cu joncțiunea $p-n$ de dimensiuni 1,4 × 0,6 mm, iar suprafețele laterale polisate pentru reflexia fasciculului laser. Joncțiunii $p-n$ i se aplică un curent continuu de 190 mA.

Caracteristicile generale ale laserilor cu semiconductori sînt : randament foarte mare, pînă la 90%; lărgimea liniilor emise este de 1—10 nm, deci radiația nu prezintă coerență ; puterea maximă este de 100...600 W în regim pulsat, durata unui puls fiind de ordinul 10^{-7} s ; directivitatea este redusă, divergența fasciculului emis fiind de 10...30° ; posibilitate mare de modulație, ceea ce îi face utilizabili în telecomunicații.

5. *Laseri chimici*. La acești laseri, inversia populației se realizează utilizînd energia reacțiilor chimice. Primul laser chimic cu media activ HCl emite radiații cu $\lambda = 3{,}7...3{,}8$ μm. Pînă în prezent s-au construit mai multe tipuri de laseri chimici bazați pe izotopii hidrogenului și pe halogeni, toți avînd caracteristica existenței unei surse de atomi sau radicali liberi, care să poată reacționa cu alți atomi sau alte molecule, pentru a forma un reactiv în stare excitată și, de asemenea, existența unor reacții exoterme în lanț. Puterile medii se ridică la 200—300 W.

Primul laser chimic pur, fără mijloace externe de obținere a fotolizei sau a descărcării electrice, folosește pentru amorsare reacția $F + NO = NOF + F$, după care se succed reacțiile $F + D_2 \rightarrow DF + D$; $D + F_2 \rightarrow DF + F$. DF excitat vibrațional transferă energia moleculelor de CO_2, efectul laser avînd loc pentru $\lambda = 10{,}6$ μm, puterea emisă în regim continuu fiind de 440 W.

Cele mai importante aplicații ale laserilor în optica tehnică sînt : în domeniile holografiei și opticii granulare, care s-au dezvoltat în urma apariției laserilor, în interferometrie, microscopie, fotografie, optică integrată, în metrologie, aparatura biomedicală ș.a. În privința tehnologiilor neconvenționale, laserii vor asigura înlocuirea prelucrării cu fascicule de electroni, sudarea materialelor metalice și ceramice, depunerea de materiale rezistente la uzură pe suprafețe finisate, asamblarea cu mare precizie a unor repere și subansambluri.

12.4.2. Receptori de lumină utilizați în optica tehnică

După forma de energie în care transformă energia radiantă incidentă, receptorii pot fi termici, fotoelectrici, fotochimici, naturali (ochiul). Retina, organul intermediar între elementele optice ale ochiului și nervul optic este de fapt un receptor fotochimic, dar numeroși factori fiziologici și chiar psihologici condiționează perceperea vizuală, care prezintă, așadar, un caracter subiectiv. Receptorii fizici, adică alții decît ochiul, pot furniza informații obiective asupra radiației primite ; în plus, acești receptori sesizează și radiații invizibile (ultraviolete sau infraroșii).

Receptori termici sînt termocuplurile și termometrele cu rezistență, caracterizate printr-o capacitate calorică foarte mică, înnegrite, astfel încît să absoarbă cît mai bine radiația incidentă. Receptorii termici se încălzesc pînă ce căldura pe care o transferă spre exterior prin convecție sau conducție compensează exact căldura absorbită ; dacă au un grad ridicat de înnegrire, ei nu sînt selectivi, adică încălzirea lor și apoi răspunsul, pentru o putere dată, nu depind de lungimea de undă a luminii incidente. Deci, receptorii termici

permit evaluarea fluxului de energie (de exemplu, pentru determinarea sensibilității spectrale a altor receptori care sînt selectivi). Receptorii termici sînt foarte utilizați în domeniul radiațiilor infraroșii.

Reluarea experienței lui Newton privind descompunerea luminii complexe în radiațiile componente (fig. 12.49). Cu ajutorul unei oglinzi concave O_1 se concentrează lumina soarelui sau a unui arc electric pe fanta F, căreia oglinda concavă O_2 îi formează imaginea albă în F'. Prisma P interpusă între oglinda O_2

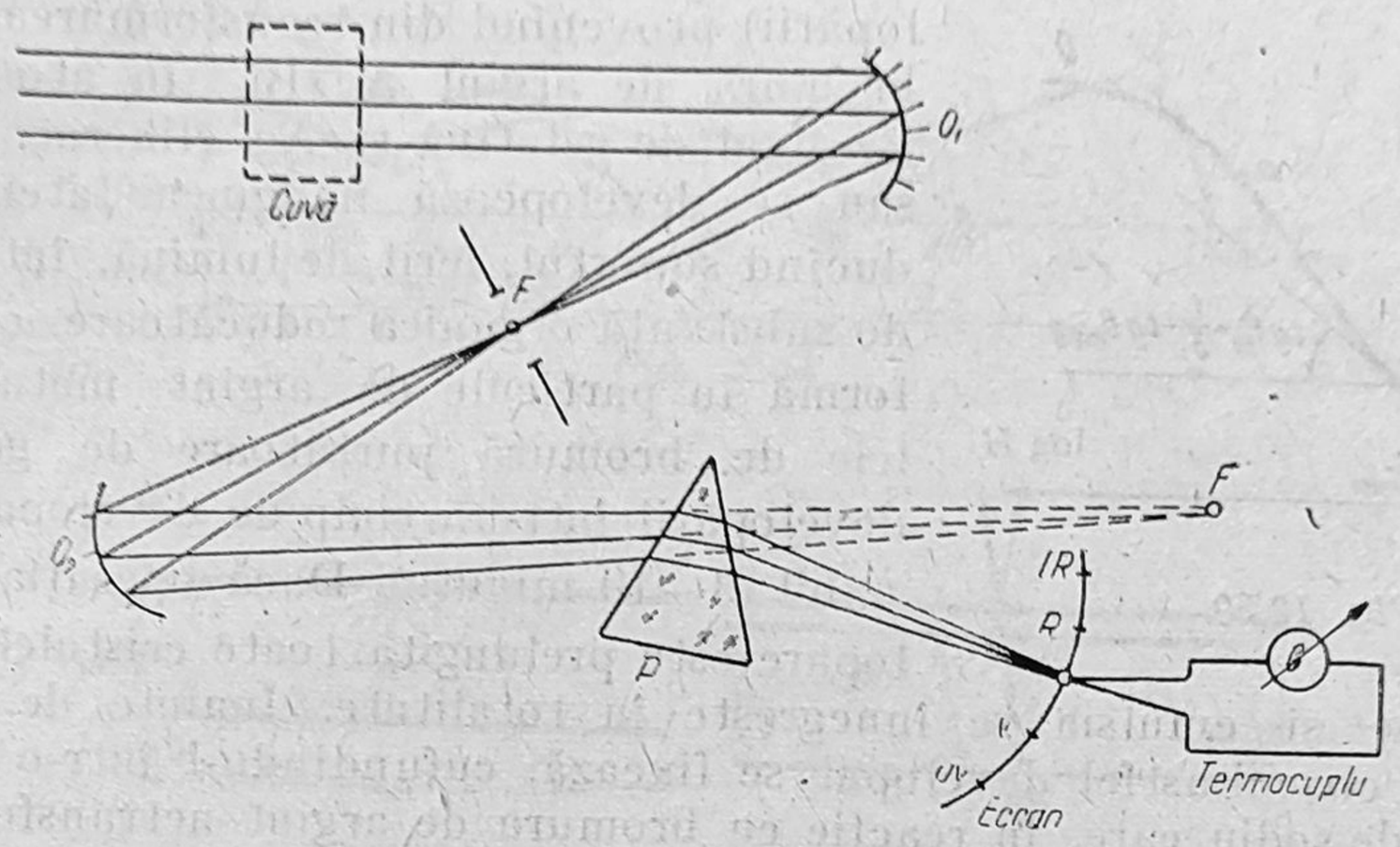


Fig. 12.49

și F (baza prismei fiind paralelă cu fanta) deviază și dispersează lumina, putînd observa pe un ecran plasat convenabil spectrul vizibil de la roșu la violet. Introducînd un termocuplu în locul ecranului se observă deviații ale acului galvanometrului atît în regiunea vizibilă, cît și dincolo de roșu, adică în infraroșu. Se poate determina absorbția radiațiilor infraroșii produsă de o cuvă plină cu apă sau diverse substanțe, așezată în fața radiației incidente.

Receptorii fotoelectrici traduc fluxul de energie radiantă în flux de electroni. Factorul de proporționalitate variază considerabil în funcție de natura și starea suprafeței sensibile și, de asemenea, în funcție de lungimea de undă. Fluxul de electroni emiși dă naștere unui curent electric ce poate fi amplificat și măsurat : acești receptori sînt foarte larg utilizați în fotometrie și spectrofotometrie. O altă aplicație foarte importantă și de largă răspîndire o constituie reproducerea sunetului înregistrat fotografic pe marginea peliculei cinematografice. Receptorii fotoelectrici sînt utilizați, de asemenea, în prelucrarea optică a informației, în detectarea și transmisia în lumină invizibilă. Acești receptori vor fi studiați la capitolul privind aplicațiile fenomenului fotoelectric.

În aceeași experiență, reprezentată în figura 12.49, în locul termocuplului se introduce un fotoelement, pentru a compara sensibilitățile celor doi receptori. De exemplu, o fotocelulă cu potasiu nu este sensibilă în zona roșu și infraroșu, dar este mult mai sensibilă decît termocuplul în zona violet și ultraviolet.

Receptorii fotochimici cei mai utilizați sînt emulsiile fotografice. Acestea sînt depuse pe suporturi de sticlă (plăci), de acetat de celuloză (pelicule, filme) sau de hîrtie (probe, fotografii). Emulsia fotografică cea mai comună

este constituită dintr-o suspensie de cristale de bromură de argint într-un gel de gelatină specială, depusă într-un strat de grosime cuprinsă între 10—30 μm. Numărul cristalelor este de ordinul $10^9/cm^2$, dimensiunea lor medie variind între 0,1 și 1,5 μm (imaginea unui punct este, însă, mult mai mare). Expunerea stratului fotosensibil la acțiunea luminii într-un timp scurt necesar efectuării unui clișeu, denumit timp de expunere, nu produce modificări vizibile stratului; în acest stadiu imaginea se află în stare latentă: este formată din foarte mici cantități de argint (germenii developării) provenind din transformarea ionilor de bromură de argint Ag^+Br^- în atomi neutri: Br fixat de gelatină și Ag eliberat. Se relevă sau se developează imaginea latentă, introducînd suportul, ferit de lumină, într-o soluție de substanță organică reducătoare care transformă în particule de argint metalic cristalele de bromură purtătoare de germeni ai developării într-un timp de developare convenabil (3—10 minute). Dacă operația de developare este prelungită, toate cristalele de AgBr sînt reduse și emulsia se înnegrește în totalitate. Înainte de a expune la lumină, clișeul astfel developat se fixează, cufundîndu-l într-o soluție de hiposulfit de sodiu care, în reacție cu bromura de argint netransformată, dă un hiposulfit de argint și de sodiu solubil; acesta se înlătură prin spălare, după care clișeul se usucă, constituind ceea ce se numește negativul imaginii, deoarece este mai negru acolo unde imaginea era mai luminoasă și reciproc. Negativul servește pentru a trage apoi probe sau copii pozitive pe plăci, hîrtie sensibilă sau peliculă, în contact direct sau prin intermediul unui aparat de mărit, care proiectează cu o mărire oarecare negativul pe suportul copiei pozitive făcînd să fie traversat de lumină. După o nouă developare și apoi fixare se obține proba definitivă, pozitivă, care reprezintă reproducerea imaginii inițiale.

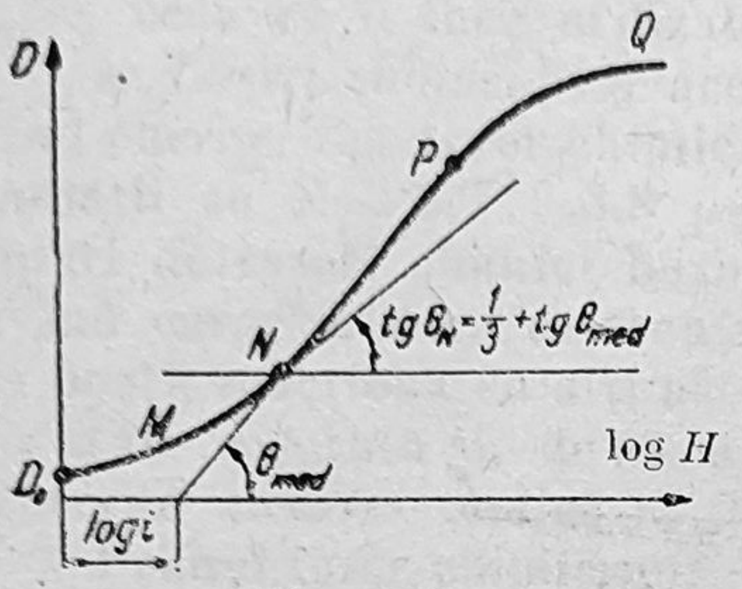


Fig. 12.50

Caracteristica cea mai importantă a emulsiei fotografice este curba de înnegrire (fig. 12.50), care reprezintă variația densității de înnegrire D în funcție de expunerea $H = E \cdot t$. Regiunile extreme neliniare MN și PQ corespund respectiv domeniilor de subexpunere și de supraexpunere. Regiunea NP, cvasiliniară, reprezintă regiunea de lucru, unde unor variații dD egale le corespund variații relative dH/H egale. Înnegrirea emulsiei D_0, în lipsa oricărei expuneri, se numește voal fotografic și se notează cu $D_0 = \log 1/\tau_0$. Pentru $D = 0$ expunerea $H = i$ reprezintă inerția emulsiei, iar $1/i$ rapiditatea ei. Panta $tg\,\theta = \gamma$ se numește factor de contrast și depinde de natura emulsiei, a revelatorului și crește cu durata developării. Aceste legi de variație, studiate de Hurter și Driffield, sînt foarte utilizate în tehnicile fotografice și cinematografice; mai recent ele sînt extinse și în holografie. Pentru o expunere dată $H = Et_{exp} = \text{const.}$, unde E este iluminarea și t_{exp} timpul de expunere, densitatea de înnegrire D depinde de lungimea de undă a radiației. În figura 12.51 sînt reprezentate curbe de sensibilitate spectrală ale diferitelor emulsii fotografice: *1* — emulsie ordinară; *2* — emulsie pancromatică; *3*, *4* — emulsii pentru infraroșu.

Limita de rezoluție a receptorului fotochimic. Dimensiunile cristalelor de AgBr determină în principal dimensiunea imaginii unui punct, dar această dimensiune este cu mult mai mare decît cea a particulelor de argint, aceasta datorîndu-se :

— pe de o parte, fenomenului de difuzie a luminii produs în volumul stratului de emulsie (fig. 12.52, *a*) ;

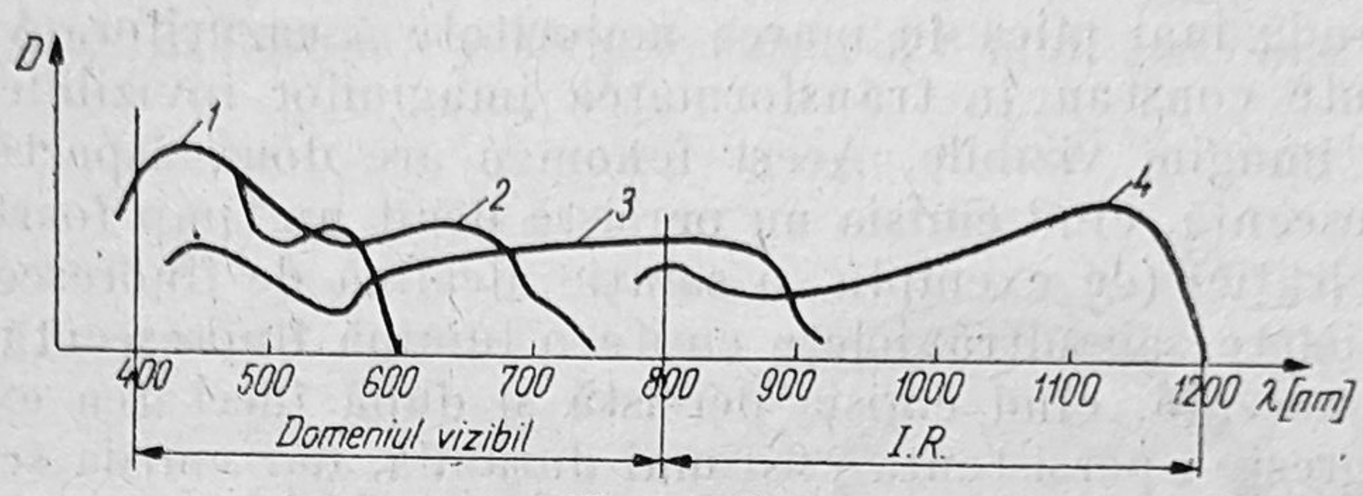


Fig. 12.51

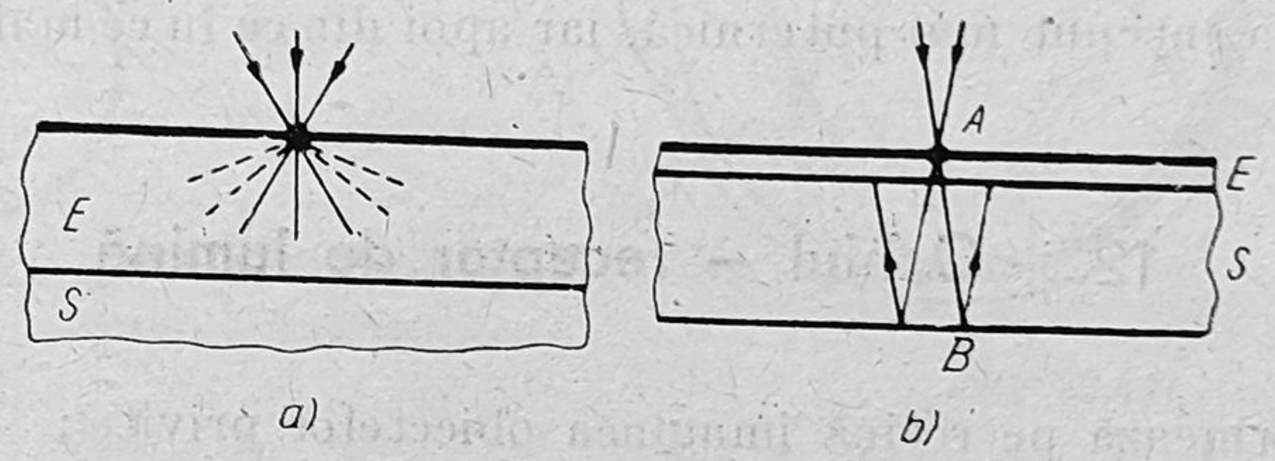


Fig. 12.52

— pe de altă parte, faptului că lumina reflectată pe fața posterioară a suportului *S* acționează din nou asupra emulsiei, creînd ceea ce se numește *halo* (imagini parazite ale punctului *A*), figura 12.52, *b*. Efectul acesta se evită acoperind suportul cu un strat posterior antireflex și absorbant (strat antihalo) ; acest strat se dizolvă la developare.

Fiecare emulsie prezintă un prag de sensibilitate — cea mai mică expunere care produce o înnegrire. Sensibilitatea unei soluții se măsoară printr-un raport $S=C/H$, unde C reprezintă un coeficient de proporționalitate, iar H expunerea necesară pentru a creea emulsiei un efect fotografic numit criteriu de sensibilitate. Există în principal trei sisteme de stabilire a sensibilității (tabelul 12.4). N reprezintă punctul de pe curba caracteristică a emulsiei în care panta $\operatorname{tg}\theta_N = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\theta_{mediu}$, iar H_N expunerea minimă pentru a se obține un clișeu care să permită un tiraj excelent.

Tabelul 12.4

Sistemul de stabilire a sensibilității	*C*	*H*
ASA	1	H_N*
DIN	1	$H(D_0+0{,}1)$
GOST	1	$H(D_0+0{,}2)$

Cu toate precauțiile, o imagine optică punctuală perfectă produce pe emulsia developată o imagine fotografică al cărei diametru este rar mai mic decît 10 μm (în mod curent atinge 30 μm și numai pentru emulsii speciale acest diametru este de ordinul 1 μm). Acest diametru (granulația clișeului) determină o limită de rezoluție care este mult superioară celei ce se datorează

difracției (de exemplu : pentru $\lambda = 0{,}5\ \mu m$ și $\sin \sigma' = 0{,}1$, limita de rezoluție dată de difracție este $a' = \frac{1{,}2\,\lambda}{\sin \sigma'} = 6\ \mu m$) sau chiar aberațiilor sistemului optic.

Alți receptori fizici sînt anumite substanțe, numite fotoluminiscente, care sub acțiunea unei radiații excitatoare convenabile emit radiații diferite, de lungime de undă mai mică în marea majoritate a cazurilor. Aplicațiile cele mai importante constau în transformarea imaginilor invizibile (în domeniul infraroșu) în imagini vizibile. Acest fenomen are două aspecte :

— fluorescență, cînd emisia nu persistă decît un timp foarte scurt după încetarea excitației (de exemplu, o soluție alcalină de fluoresceină luminată cu radiații violete sau ultraviolete emite o lumină fluorescentă verde) ;

— fosforescență, cînd emisia persistă și după încetarea excitației, descrescînd progresiv ; persistența este mai durabilă, dar emisia scade în intensitate cu cît temperatura este mai coborîtă. De exemplu, un ecran de sulfură de zinc expus la lumină un timp suficient prezintă, timp de mai multe ore, o fosforescență la început mai puternică, iar apoi din ce în ce mai puțin vizibilă.

12.5. Ochiul — receptor de lumină

Ochiul formează pe retină imaginea obiectelor privite ; este receptorul optic cel mai utilizat și, în același timp, cel mai complex. Cunoașterea caracteristicilor ochiului este importantă nu numai pentru corectarea eventualelor defecte optice, dar și pentru alegerea cea mai bună a caracteristicilor aparatelor optice care i se asociază. Caracteristicile ochiului variază de la un om la altul și în funcție de circumstanțe (adaptarea la caracteristicile luminii, la distanță, oboseală etc.) ; aceasta a condus la definirea în cadrul opticii tehnice, prin convenție rezultată în urma studiilor statistice, a observatorului normal mediu. Ipotezele făcute în legătură cu acest observator sînt :

— observatorul este plasat în condiții de vedere diurnă, regiunile din spațiu pe care poate să le observe (se spune despre aceste regiuni că sînt situate în cîmpul său vizual) avînd luminanța de ordinul $\simeq 5$ nit sau mai mari, fără a depăși valoarea care poate produce orbirea ;

— pupila ochiului este complet deschisă ;

— ochiul normal în stare „neacomodată“ observă net obiectele situate la infinit.

12.5.1. Descrierea succintă a ochiului

Forma ochiului este aproximativ sferică, de rază $\simeq 12$ mm, prezentînd în partea dinainte o calotă transparentă mai bombată, de rază $\simeq 8$ mm. Ochiul nu prezintă o simetrie de revoluție riguroasă, totuși se consideră o axă geometrică Δ, care unește centrul de curbură al calotei transparente cu cel al corpului ochiului. Lungimea axei geometrice $\Delta \simeq 25$ mm (fig. 12.53).

Cavitatea, în jur de 7 cm^3, limitată în exterior, de sclerotică (S), dură, albă și corneea transparentă (Cl) este umplută de substanțe transparente ;

ea este împărțită în două compartimente inegale de o lentilă biconvexă numită cristalin (*Cr*), centrată pe axa geometrică a ochiului și legată de învelișul ochiului prin un inel muscular. În figura 12.54 este reprezentată schematic o secțiune orizontală prin ochiul drept. În fața cristalinului se află o diafragmă *D* (*iris*) a cărei mărime poate fi variată, prin intermediul unor mușchi acționați de reflexe inconștiente, avînd diametrul deschiderii circulare cuprinse între 2 mm, în lumină foarte puternică, și 8 mm, sau chiar și mai mult,

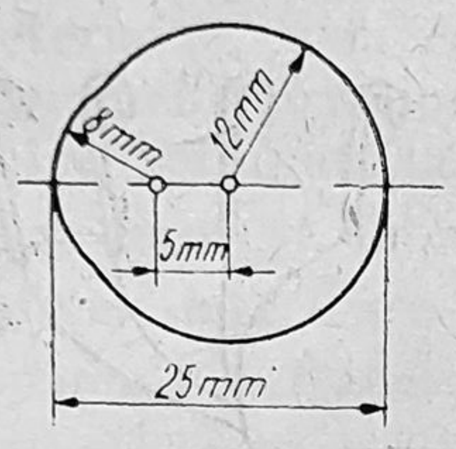


Fig. 12.53

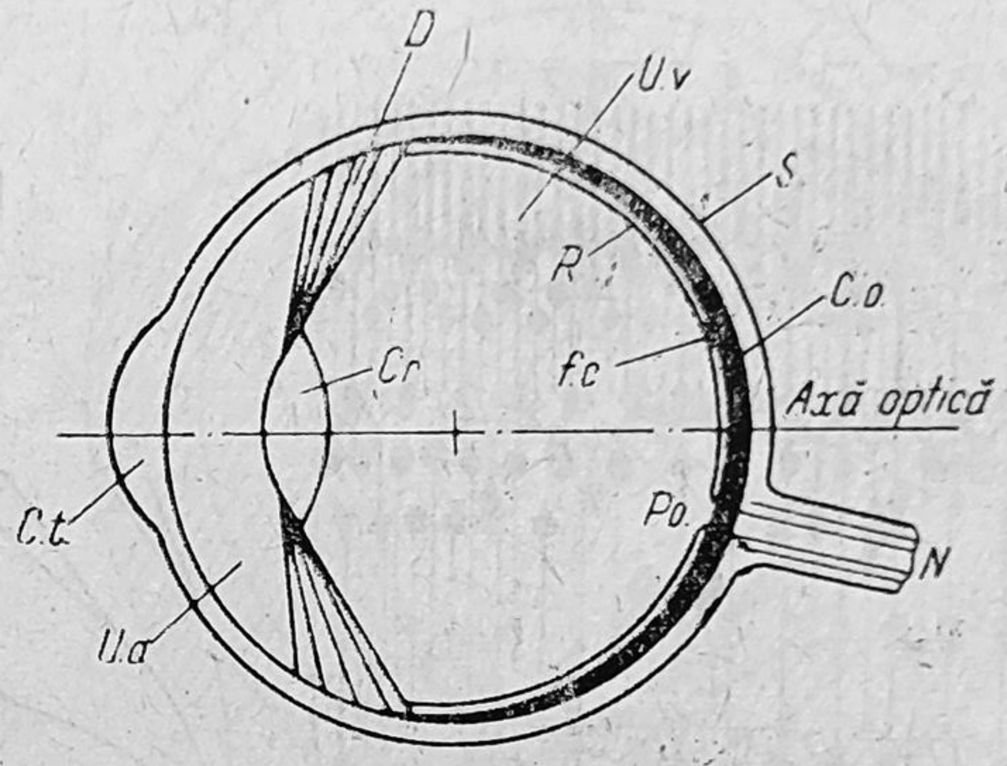


Fig. 12.54

în obscuritate. Irisul este colorat (albastru, verde, galben, brun), dar deschiderea circulară (pupila) pare neagră, deoarece reprezintă dechiderea unui corp negru. Partea cavității aflate înaintea cristalinului este umplută de un lichid *Ua* (umoarea apoasă), iar partea din spate de o substanță gelatinoasă *Uv* (umoarea vitroasă), ambele avînd indicele refracției apropiat de cel al apei. În tabelul 12.5 sînt date cîteva caracteristici ale elementelor optice ce compun ochiul.

Tabelul 12.5

Elemente optice	Grosimea în lungul axei geometrice	Indicele de refracție
Corneea transparentă	2 mm	1,377
Umoarea apoasă	4 mm	1,336
Cristalinul	4 mm	1,36 – 1,42
Umoarea vitroasă	16 mm	1,336
Axa geometrică Δ	25 mm	–

Cristalinul este biconvex, avînd raza dioptrului anterior $R_1 = 10$ mm și raza dioptrului posterior $R_2 = 6$ mm ; substanța transparentă a cristalinului nu este omogenă, fiind formată dintr-o serie de straturi ale căror indici de refracție cresc de la exterior (1,36) către miez (1,42) ; această conformație corectează excesul de convergență către margini ale lentilelor sferice (se va arăta la capitolul de aberații). Sclerotica este căptușită în interior, în partea posterioară, de o membrană neagră (*Co*), bogată în vase sanguine, iar aceasta, la rîndul ei, de un „ecran" *R*, transparent și subțire (0,5 mm), numit retină.

Retina reprezintă o „prelungire“ a nervului optic *N* care pătrunde la ochi prin sclerotică, mai aproape de nas decît axa geometrică a ochiului. Elementele retiniene care percep lumina sînt *conurile* și *bastonașele*, denumite așa după forma lor. În figura 12.55 este reprezentată schematic o secțiune prin retină. Conurile sînt sensibile la lumină intensă și la culori (vederea diurnă sau fotopică) ; sînt legate cîte 2—3 la o fibră nervoasă (fig. 12.56, *a*). Bastonașele sînt sensibile la lumină mai slabă (vederea nocturnă sau scotopică) dar nu

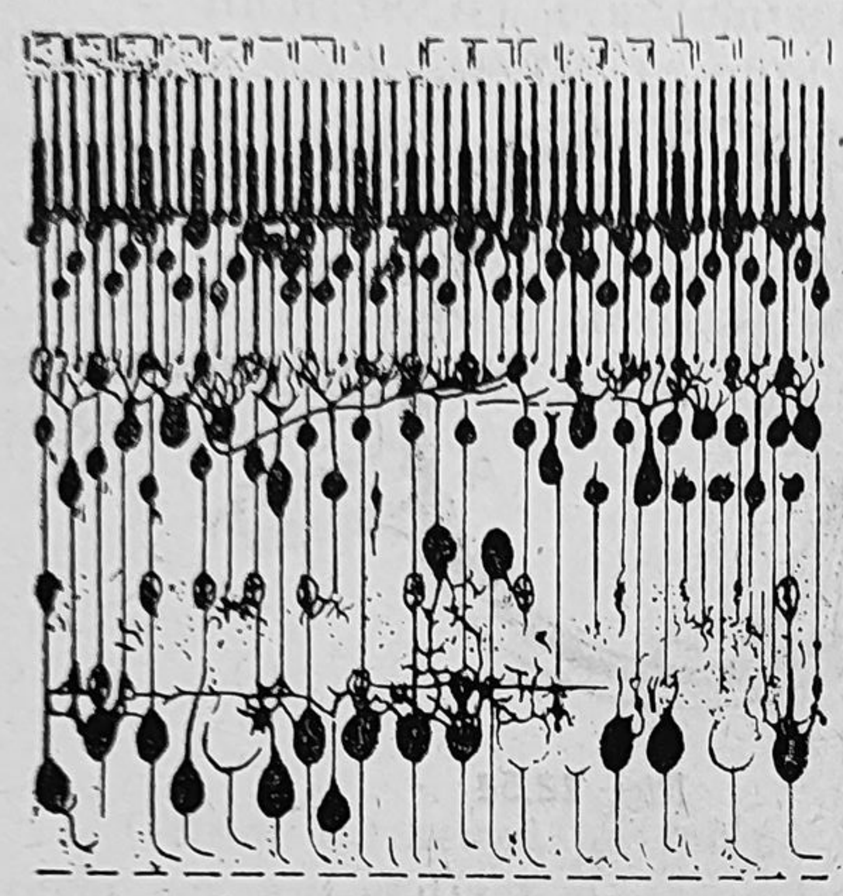


Fig. 12.55

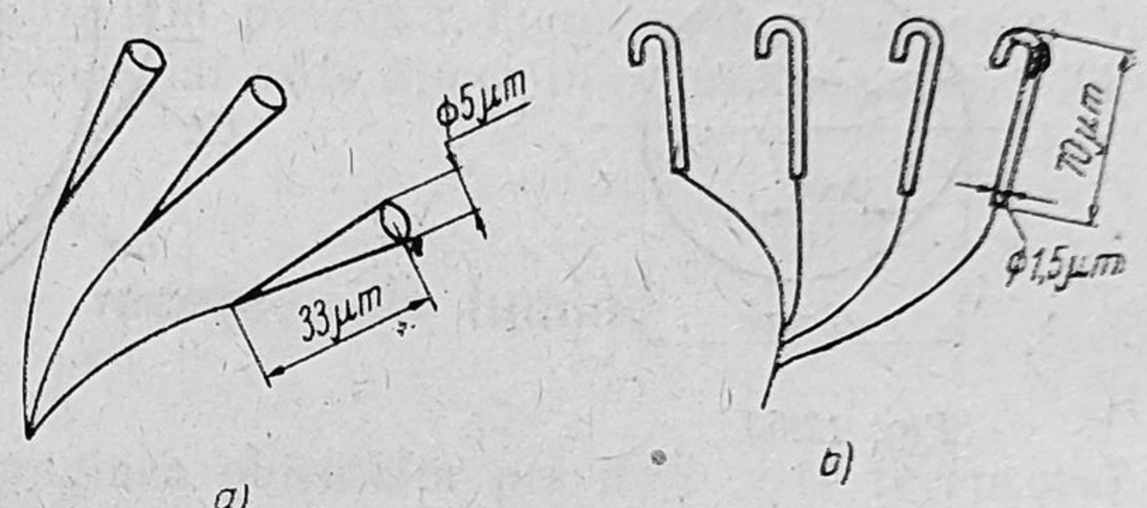


Fig. 12.56

sesizează culorile ; sînt legate cîte 200—300 la o fibră nervoasă (fig. 12.56, *b*). Distribuția conurilor și bastonașelor nu este uniformă pe suprafața retinei : în foveea centralis sînt concentrate numai conuri (aproximativ 4 000), iar în pata galbenă sînt 13 000 ; în total sînt 7 milioane de conuri ; în zona extraaxială a retinei, denumită ora serata, se îndesesc bastonașele (în total 75 milioane), așa explicîndu-se deschiderea mai mare a pupilei ochiului în cazul vederii nocturne. Pe retină, în vecinătatea axei geometrice, de partea temporală a capului, se găsește o depresiune (∅ 0,3 mm) numită *foveea centralis*, partea retinei care percepe cel mai bine detaliile, înconjurată de pata galbenă (∅ 1,5 mm) ; cîmpul ocular al vederii directe (pentru care imaginea se situează în foveea centralis) este foarte mic $\simeq 45'$. În locul unde filamentele nervoase intră în ochi nu există terminații nervoase pe retină, imaginile neproducînd nici o impresie iluminoasă ; această mică regiune se numește pata oarbă și este plasată de partea opusă petei galbene, față de axa geometrică a ochiului, adică către nas.

Globul ocular se găsește într-o cavitate osoasă, de pereții căreia este prins prin mușchi, care au rolul de a orienta ochiul, care se poate roti în jurul centrului său geometric cu peste 30° (prin efort, această rotație depășește 40°). Cîmpul binocular comun reprezintă „intersecția“ cîmpurilor celor doi ochi mobili, adică regiunea din spațiu văzută simultan de ambii ochi (fig. 12.57).

12.5.2. Formarea imaginilor în ochiul emetrop, neacomodat. Ochiul redus

Se poate asimila ochiul cu un sistem optic centrat căruia i se aplică regulile aproximării lui Gauss (optica de ordinul întîi), (fig. 12.58). În absența acomodării, imaginea unui punct — obiect de la infinit se formează, pentru un ochi normal (emetrop), pe retină. Convergența ochiului este $\varphi = n'/f' \simeq 60$ dpt. Ținînd seama de indicii de refracție extremi ($n = 1$, pentru aer și $n' = 1{,}336$, pentru umoarea vitroasă) și de relația $\bar{f}/f' = -n/n'$, se determină distanțele focale ale ochiului $f' = 0{,}023$ m și $\bar{f} = -0{,}017$ m. Se determină, prin calcul, pozițiile punctelor principale H și H' care sînt distanțate la cîteva zecimi de mm și în vecinătatea suprafeței interioare a corneei transparente. Punctele nodale sînt practic confundate în N, denumit centru optic al ochiului, situat foarte aproape de marginea din interior a cristalinului.

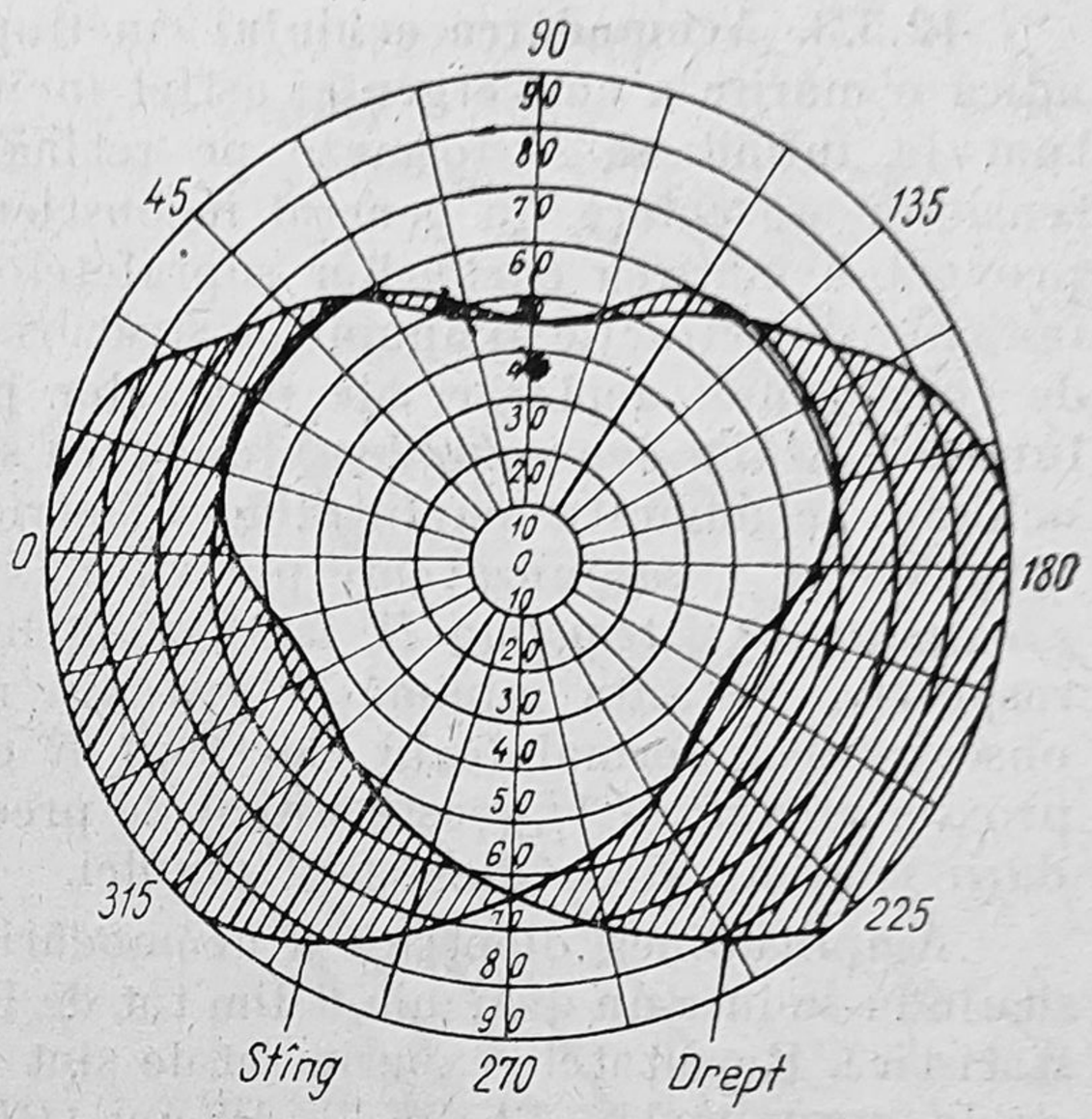


Fig. 12.57

Centrul optic se află la distanța $NO = 5$ mm față de centrul geometric. Axa care unește centrul optic al ochiului cu foveea centralis $Nf.c.$ se numește axă vizuală și formează un unghi $\sigma_v \simeq 5°$ (poate varia între 4° și 8°, chiar pentru ochi emetrop) cu axa geometrică, corespunzînd la o distanță măsurată pe retină $F'f.c. = 1{,}5$ mm.

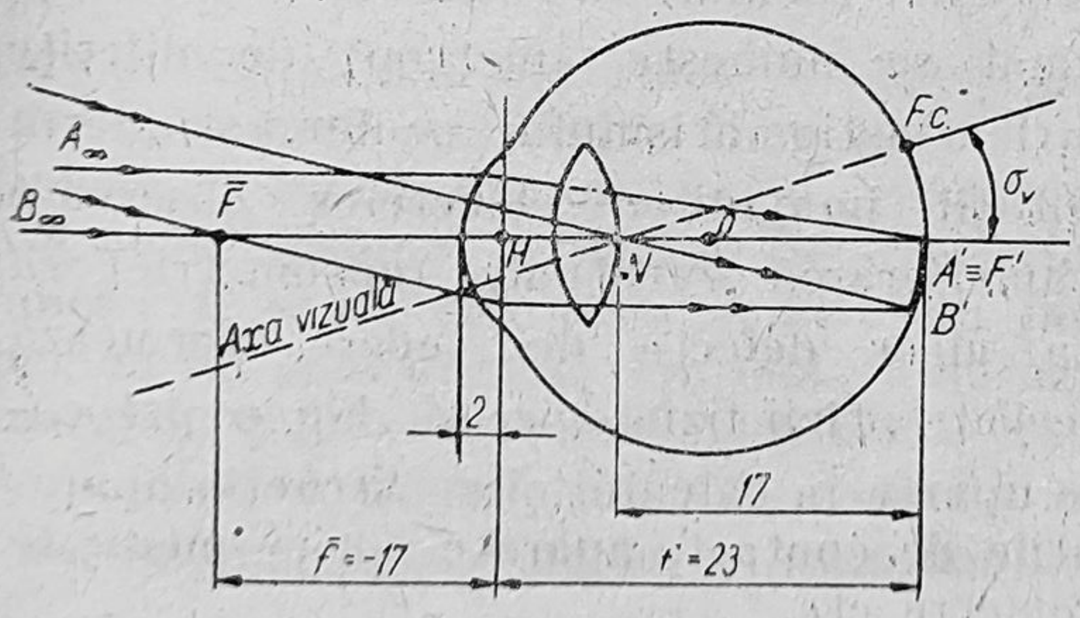


Fig. 12.58

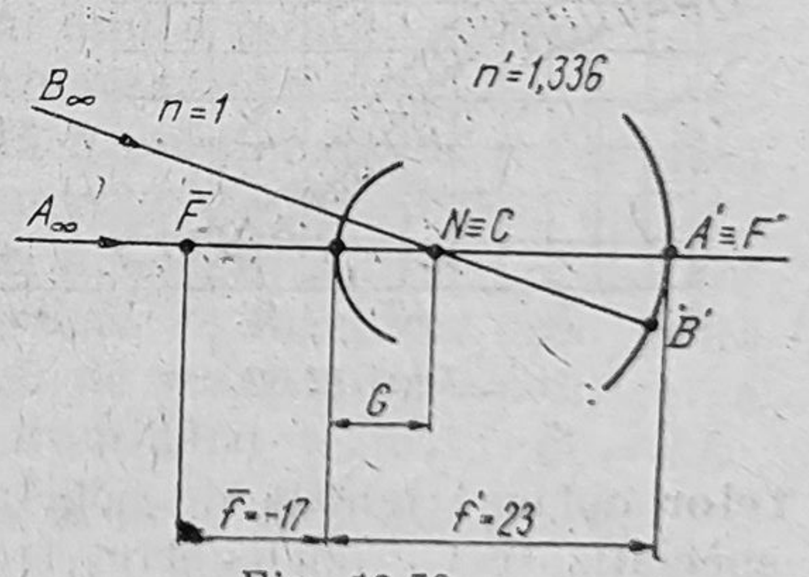


Fig. 12.59

Deoarece planele principale sînt practic confundate, ochiul echivalează, nu prin mersul riguros al razelor, ci prin formarea imaginilor conform regulilor opticii de ordinul întîi, cu un dioptru sferic cu vîrful în H și centrul de curbură în N, separînd mediile transparente de indici de refracție $n = 1$ și $n' = 1{,}335$, de focare $\bar{F}$ și F'. Acest dioptru (fig. 12.59) se numește ochiul redus (propus de Gullstrand și Listing). Raza de curbură a acestui dioptru este $r = (n' - n)/\varphi \simeq 0{,}006$ m. Nu trebuie, însă, uitat că ochiul are un

cîmp unghiular $2\tilde{\sigma}'$ destul de mare ($2\,\mathrm{tg}\,\tilde{\sigma}'$ poate depăși 0,4), astfel încît asimilarea cu un sistem optic centrat în aproximarea lui Gauss este valabilă numai pentru înclinări foarte mici ale razelor incidente.

Imaginea care se formează pe retină este răsturnată față de obiect, dar este percepută ca dreaptă, deoarece ideea obiectului se asociază imaginii reale, printr-un mecanism cerebral.

12.5.3. Acomodarea ochiului emetrop reprezintă o modificare a ochiului, adică o mărire a convergenței astfel încît imaginea A' a unui punct A nesituat la infinit să se formeze pe retină. Această acomodare se datorează tensiunii musculare, în general inconștientă, acționînd asupra cristalinului și provocînd mărirea curburilor suprafețelor sale (mai ales cea anterioară) și a indicilor de refracție ai anumitor straturi. Acomodarea nu este însoțită decît de foarte mici deplasări ale punctelor principale (0,1 . . .0,2 mm în sensul luminii), ochiul conservîndu-și lungimea sa totală. Creșterea maximă a puterii ochiului se numește amplitudine dioptrică a acomodării $\mathcal{A}$. Pozițiile punctului obiect corespunzătoare puterii maxime și minime a ochiului se numesc *proximum* P și *remotum* R, iar distanțele de la P și R la ochi sînt numite, respectiv, distanța minimă și distanța maximă a vederii distincte. Pentru observatorul normal (ochi emetrop) R este la infinit, iar distanța pînă la proximum $HP = 1/\mathcal{A}$ este dificil de precizat, depinzînd de oboseala acomodării maxime și de diametrul pupilei.

Amplitudinea dioptrică a acomodării ochiului emetrop scade cu vîrsta, situîndu-se într-un domeniu delimitat de Duane în urma efectuării unor studii statistice. Rezultatele experimentale sînt reprezentate în figura 12.60. Astfel, de la aproximativ 12 dpt la 10 ani ($PH \simeq 8$ cm) scade la 5 dpt la 40 ani ($PH \simeq 20$ cm) și la 1 dpt către 60 ani ($PH \simeq 1$ m). Această micșorare a lui $\mathcal{A}$ se numește presbitism și atrage, uneori, o ușoară retragere a punctului R, care este neglijată.

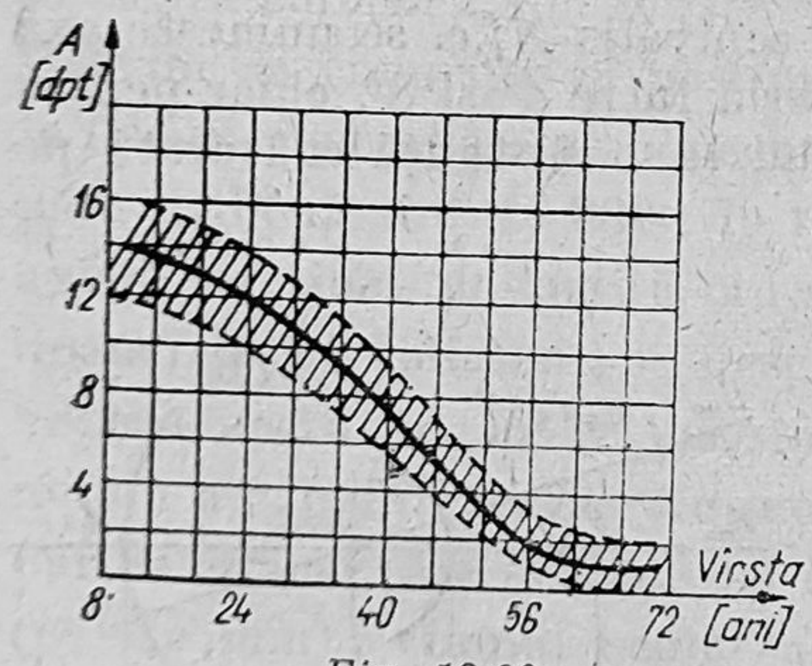


Fig. 12.60

Studierea și corectarea presbitismului, ametropiei (ochiul care nu este emetrop, normal, se numește ametrop) de diferite tipuri, a astigmatismului ocular, studierea clarității imaginilor obiectelor observate și ameliorarea eventuală (optometrie) ca și a altor defecte de vedere, formează obiectul opticii fiziologice și dau o preocupare aparte în calculul și construcția aparatelor optice: lentile de ochelari, lentile de contact, aparate optice medicale specializate — optometre, frontifocometre etc.

12.5.4. Deschideri pupilare. Efectul Stiles-Crawford

Pupila ochiului delimitează deschiderea fasciculului luminos util, avînd un rol important în vedere. Imaginile diafragmei de deschidere, iris, față de mediile aflate înaintea sa și, respectiv după ea, constituie pupila de intrare P_i și pupila de ieșire P_e (fig. 12.61). Pozițiile pupilelor față de diafragma de des-

chidere D sînt $P_iD \simeq 0{,}5$ mm, $DP_e \simeq 0{,}1$ mm, iar diametrele lor se află în rapoartele : $2\rho_0/2\rho_D \simeq 1{,}13$, $2\rho_e/2\rho_D \simeq 1{,}04$.

Acomodarea este însoțită de o micșorare apreciabilă a pupilei, de ordinul 5% pe dioptrie; pe de altă parte diametrul pupilei scade mult la creșterea luminanței (fig. 12.62). Cînd luminanța variază brusc, variația lui $2\rho_0$ nu este așa rapidă ; ea este complet atinsă după cîteva secunde pentru adap-

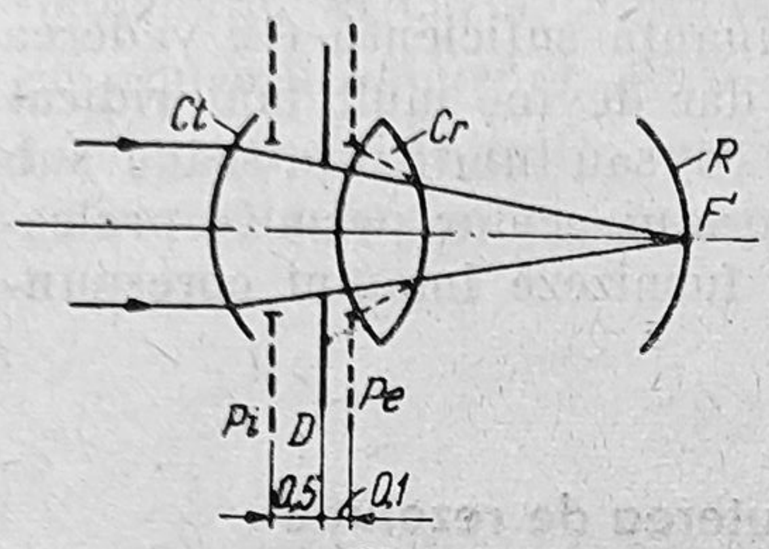


Fig. 12.61

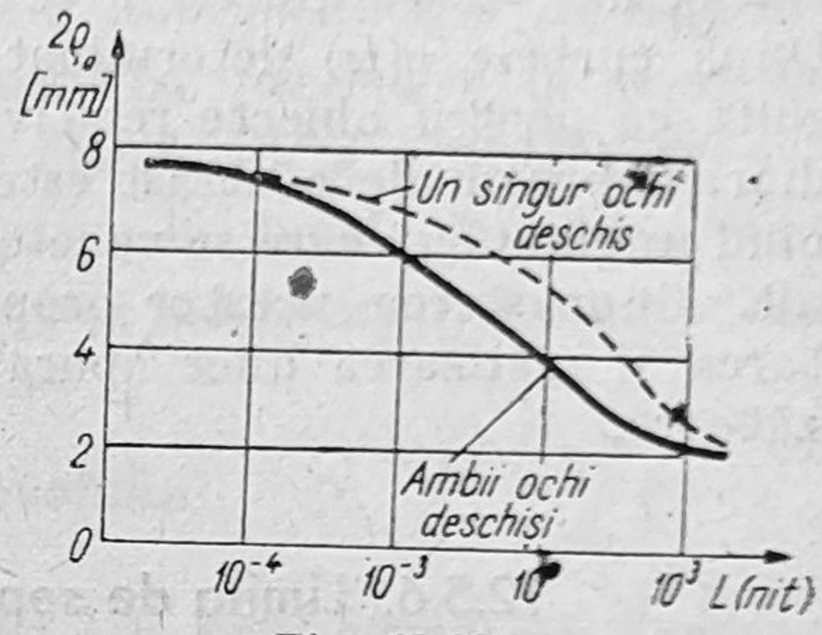


Fig. 12.62

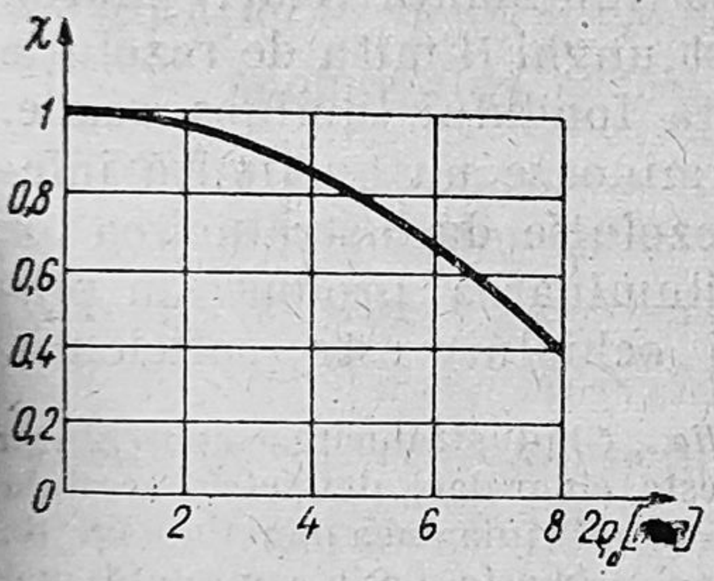


Fig. 12.63.

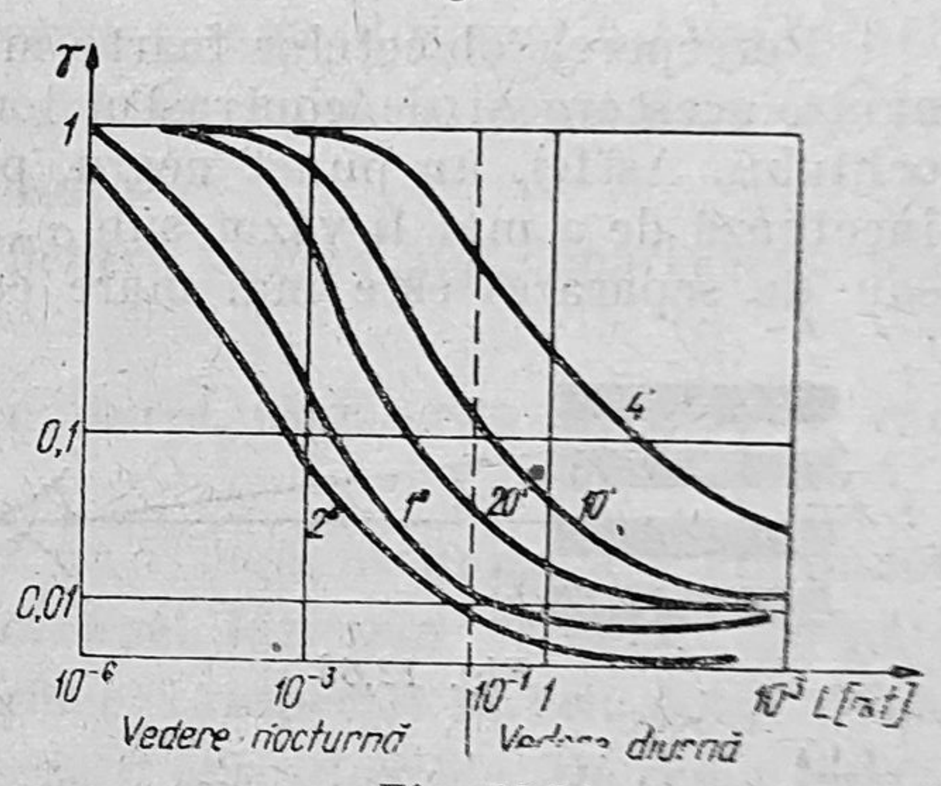


Fig. 12.64

tare la lumină mai puternică și, uneori, după mai multe minute pentru adaptare la lumină mai slabă. Pare normal ca iluminarea retinei să fie proporțională cu luminanța obiectului și suprafața utilă a pupilei ochiului (de fapt așa vom considera la studiul caracteristicilor generale ale aparatelor optice), adică : $E = kL \cdot \pi\rho_0^2$, unde k este un factor de proporționalitate constant pentru un ochi anumit. De fapt, iluminarea produsă de razele ce trec pe la marginea pupilei este mai mică decît cea produsă de reazele din vecinătatea axei (efectul Stiles-Crawford). Rezultă relația iluminării retinei : $E = kL \cdot \pi\rho_0^2 \cdot \varkappa$, unde $\varkappa$ este un factor care depinde de ρ_0 și de L (fig. 12.63).

12.5.5. Perceperea contrastelor

Obiectele care nu sînt punctiforme, sau liniare, sînt vizibile mai ales datorită diferenței luminanței L față de cea a fondului L_0 (se va studia separat diferența de culoare). Contrastul este definit prin formula

$$\gamma = \frac{L - L_0}{L_m} \qquad (12.64)$$

unde L_m este luminanța cea mai mare dintre L și L_0:
- pentru $L < L_0$ (fond mai luminos): $-1 < \gamma < 0$;
- pentru $L > L_0$ (fond mai întunecat): $0 < \gamma < 1$.

Perceperea obiectelor nu este posibilă decît dacă contrastul depășește o valoare minimă, care depinde în principal de luminanță. Acest prag de contrast nu este influențat de dimensiunea obiectului (cînd acesta este relativ mare), dar crește din ce în ce cînd unghiul sub care se vede obiectul scade. După curbele $\gamma(L)$ determinate experimental de Blackwell (fig. 12.64), rezultă că pentru obiecte relativ întinse și o luminanță suficientă (în vederea diurnă) pragul de contrast este de ordinul 1%, dar devine mult mai ridicat cînd unghiul sub care se vede obiectul scade sub 10′ sau luminanța scade sub nit. Cunoașterea acestor proprietăți ale receptorului ocular permite proiectarea și realizarea unor aparate optice care să furnizeze imagini corespunzătoare.

12.5.6. **Limita de separare spațială. Puterea de rezoluție**

Perceperea obiectelor foarte mici depinde de forma obiectelor, de luminanța acestora și de contrastul lor cu fondul, ca și de deschiderea pupilei ochiului. Astfel, un punct negru, pe fond luminos (luminanța relativ mare), încetează de a mai fi văzut sub $\sigma_{min} = 0{,}5'$; acest unghi (limita de rezoluție sau de separare) este mai mare cu cît luminanța fondului luminos scade. Punctele luminoase nu au limită inferioară de rezoluție dacă strălucirea lor aparentă (iluminarea produsă în planul pupilei ochiului) este suficientă.

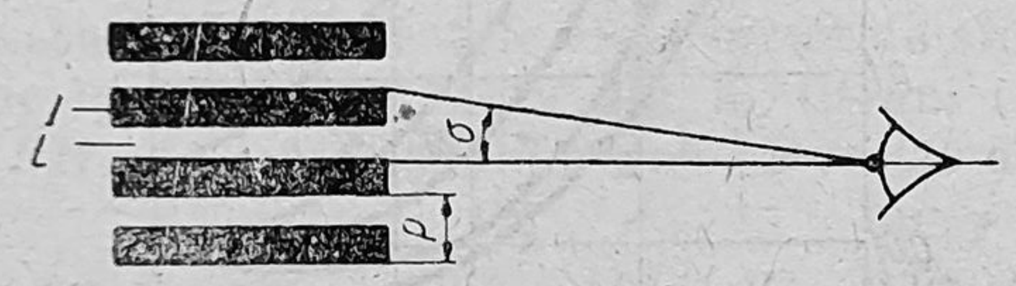


Fig. 12.65

Observație. Cînd strălucirea aparentă a unui punct crește, chiar dacă diametrul acestuia este foarte mic ($\sigma \to 0$), imaginea punctului crește, deoarece retina primește pe o suprafață mai mare o iluminare perceptibilă, deci punctul pare a fi mai mare. Așa se explică denumirile stelelor vizibile cu ochiul liber, de străluciri descrescătoare: de mărimea întîi, a doua, ..., a șasea.

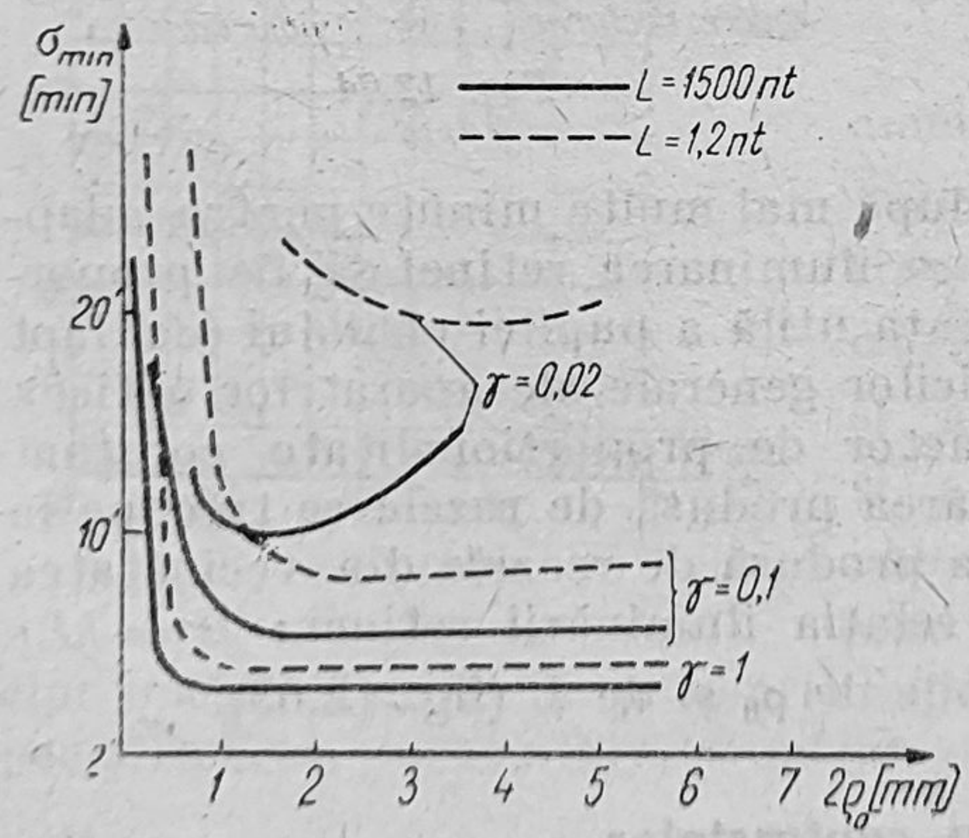


Fig. 12.66

Studiile făcute asupra limitei de rezoluție a ochiului nu conduc la o concluzie unică datorită condițiilor foarte diferite ale vederii obiectelor de forme diferite, anumite detalii fiind mai vizibile pe fond negru, iar altele pe fond deschis. Așa se explică apariția în microscopie, alături de observarea în cîmp luminos, observarea în cîmp întunecat. Reprezentative, totuși, pentru estimarea limitei de rezoluție a ochiului sînt curbele stabilite de Arnulf cu ajutorul mirelor de tip Foucault (fig. 12.65), formate din benzi rectilinii paralele de grosimi egale, alternînd în luminanță, caracterizate prin contrastul $\gamma = \frac{L_+ - L_-}{L_+}$ și prin pasul p.

Limita de rezoluţie (sau de separare) reprezintă unghiul minim σ_{min} sub care se disting benzile întunecate şi luminoase. $\sigma_{min} \simeq 2'$ pentru ochiul normal mediu, atunci cînd deschiderea pupilară, luminanţa şi contrastul sînt relativ mari ; limita de rezoluţie poate creşte mult cînd una dintre valorile $2\rho_0$, L sau γ devine foarte mică (fig. 12.66). Puterea de rezoluţie (sau separatoare) a ochiului reprezintă inversul limitei de rezoluţie. Puterea de rezoluţie mai mare, în cazul luminanţelor mari, se datorează perceperii în acest caz cu ajutorul conurilor, care sînt legate numai cîte 2—3 la o fibră nervoasă, în timp ce bastonaşele, sensibile la lumină slabă, sînt legate în număr mare 200—300 la o fibră nervoasă, asigurînd o putere de rezoluţie mult mai redusă.

12.5.7. Perceperea reliefului

a) *Perceperea monoculară* a reliefului are loc prin următorii factori :

— orientarea axei ochiului către diverse puncte din spaţiu (astfel încît un obiect de dimensiuni mari apare în proiecţie conică cu centrul în centrul de rotaţie — centrul geometric al ochiului) ;

— acomodarea succesivă a ochiului pentru puncte mai depărtate şi mai apropiate ;

— interpoziţia obiectelor în spaţiu, umbrele, unghiurile sub care se văd obiecte de dimensiuni reale cunoscute.

b) *Perceperea binoculară.* Perceperea unei imagini unice a unui punct obiect A prin ambii ochi este rezultatul unei fuzionări cerebrale posibile atunci cînd ambele imagini ale lui A se formează respectiv pe cele două fovee. Această fuzionare nu intervine în cazul vederii extra-foveale. De remarcat că dedublările, care ar jena mult vederea indirectă, nu sînt percepute în general, deoarece una dintre imagini este neutralizată. Strabismul (orientarea defectuoasă a uneia dintre axele vizuale) este foarte des consecinţa unei vederi diferite a celor doi ochi făcînd imposibilă fuzionarea imaginilor, chiar pentru imaginile foveale.

Efectul stereoscopic : fie două puncte A, B aflate în spaţiu la distanţe diferite faţă de observator. Acomodarea nu poate fi realizată pentru ambele puncte simultan, datorită unei diferenţe de paralaxă stereoscopică. Paralaxa stereoscopică este unghiul α pentru punctul A, sau unghiul β pentru punctul B (fig. 12.67, *a*).

$$\sigma_s - \sigma_d = \beta - \alpha = b \cdot \Delta s / s^2 \qquad (12.65)$$

unde $b \simeq 65$ mm este baza vederii, iar Δs distanţa vederii stereoscopice.

Observaţie : σ_s, σ_d se măsoară în acelaşi sens (de la axele OA către OB pentru ambii ochi). Astfel dacă A şi B se află pe mediatoarea segmentului O_sO_d : $\sigma_s - \sigma_d = 2\sigma_s = \beta = \alpha$, deoarece în acest caz $\sigma_d = -\sigma_s$ (fig. 12.67, *b*).

Diferența de paralaxă stereoscopică $\beta - \alpha$ este interpretată (inconștient) ca diferență de profunzime. Valoarea minimă perceptibilă a diferenței paralaxei stereoscopice (prag de paralaxă stereoscopică) este de ordinul $2'' \ldots 15''$, în funcție de condițiile de observare. Distanța maximă $D = s_{max}$ de la care nu se mai percep profunzimi ale spațiului se numește distanță limită de percepere a reliefului. Pentru o distanță $s < D$, diferența minimă $(\Delta s)_{min}$, care poate fi văzută stereoscopic se numește prag al vederii stereoscopice. $D = s_{max}$ și $(\Delta s)_{min}$ sînt funcție de pragul de paralaxă stereoscopică $(\sigma_s - \sigma_d)_{min} = (\beta - \alpha)_{min} = 2'' \ldots 15''$, cîteva valori fiind indicate în tabelul 12.6.

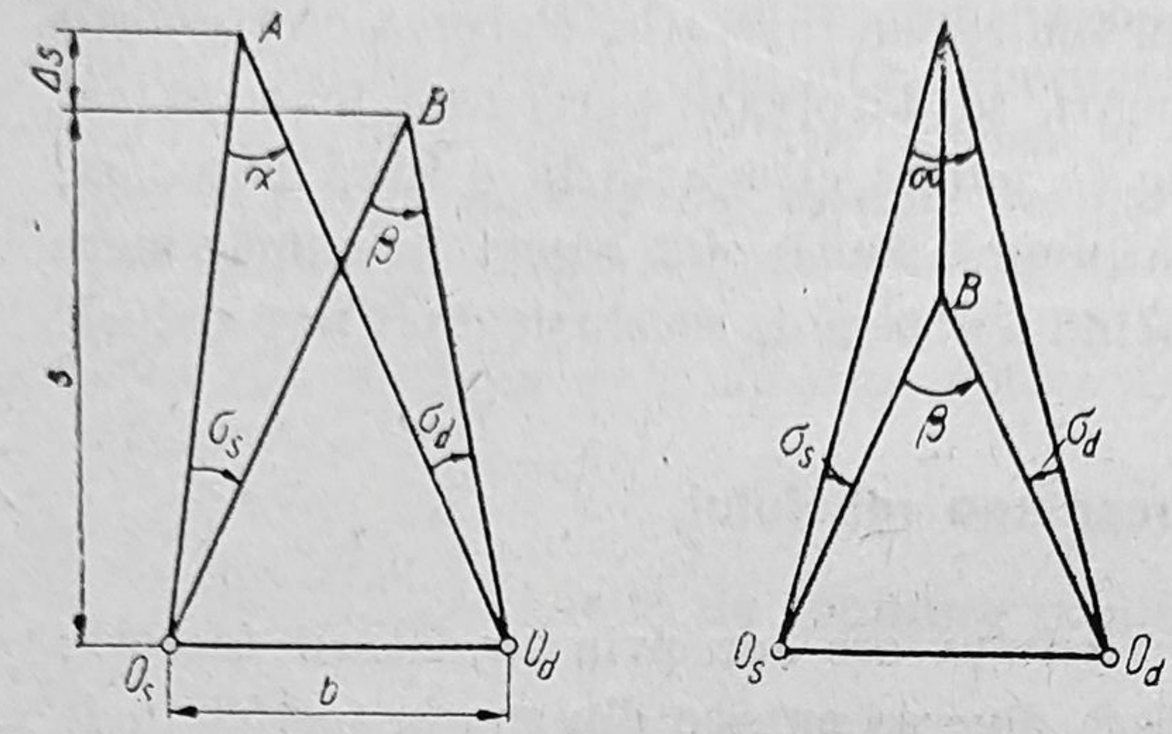


Fig. 12.67

Așadar, în afara fuzionării celor două imagini, în vederea binoculară normală perceperea reliefului se realizează simultan prin diferența de perspectivă între cei doi ochi (paralaxa stereoscopică) — explicația statică a vederii binoculare — și prin variații succesive de convergență — explicația dinamică a vederii binoculare. Vederile steroscopice sînt fotografii ale aceluiași peisaj

Tabelul 12.6

Pragul de paralaxă stereoscopică $(\sigma_s - \sigma_d)_{min}$	Distanța limită de percepere a reliefului D	Pragul vederii stereoscopice $(\Delta s)_{min}$ pentru $s = 100$ m
5″	2 700 m	3,75 m
10″	1 350 m	7,5 m
15″	900 m	12,25 m

luate cu două obiective identice cu axele paralele, depărtate unul de celălalt, ca și axele celor doi ochi, la $b \simeq 65$ mm. Privind simultan cu ochiul stîng vederea luată de obiectivul din stînga și cu ochiul drept vederea luată de obiectivul din dreapta se produce fuzionarea și impresia de relief. Dacă se fotografiază un peisaj din două puncte foarte depărtate se obține, privind cele două fotografii printr-un aparat binocular stereoscopic, o imagine unică cu un relief foarte exagerat. Dacă aparatul este dotat cu reticule speciale este posibilă măsurarea coordonatelor spațiale ale punctelor observate. Pe acest principiu se bazează un procedeu topografic rapid și precis, foarte răspîndit în prezent : fotogrammetria. În acest caz fotografiile pot fi luate dintr-un avion care zboară la o altitudine constantă, la un interval spațial calculat în funcție de altitudine și de deschiderea relativă a obiectivului foto, astfel încît fotografiile să se suprapună parțial (aparatul se poate regla automat, comandat de altimetrul avionului).

12.5.8. Perceperea variațiilor de lumină

Perceperea luminii nu se stabilizează și nu încetează instantaneu cu cauza care o produce. Fie un semnal luminos constant $L = L_0$, care apare brusc la momentul t_0 și dispare după mai multe secunde, la momentul t_f (fig. 12.68, *a*). Perceperea începe la momentul t_3 posterior lui t_0, atinge va-

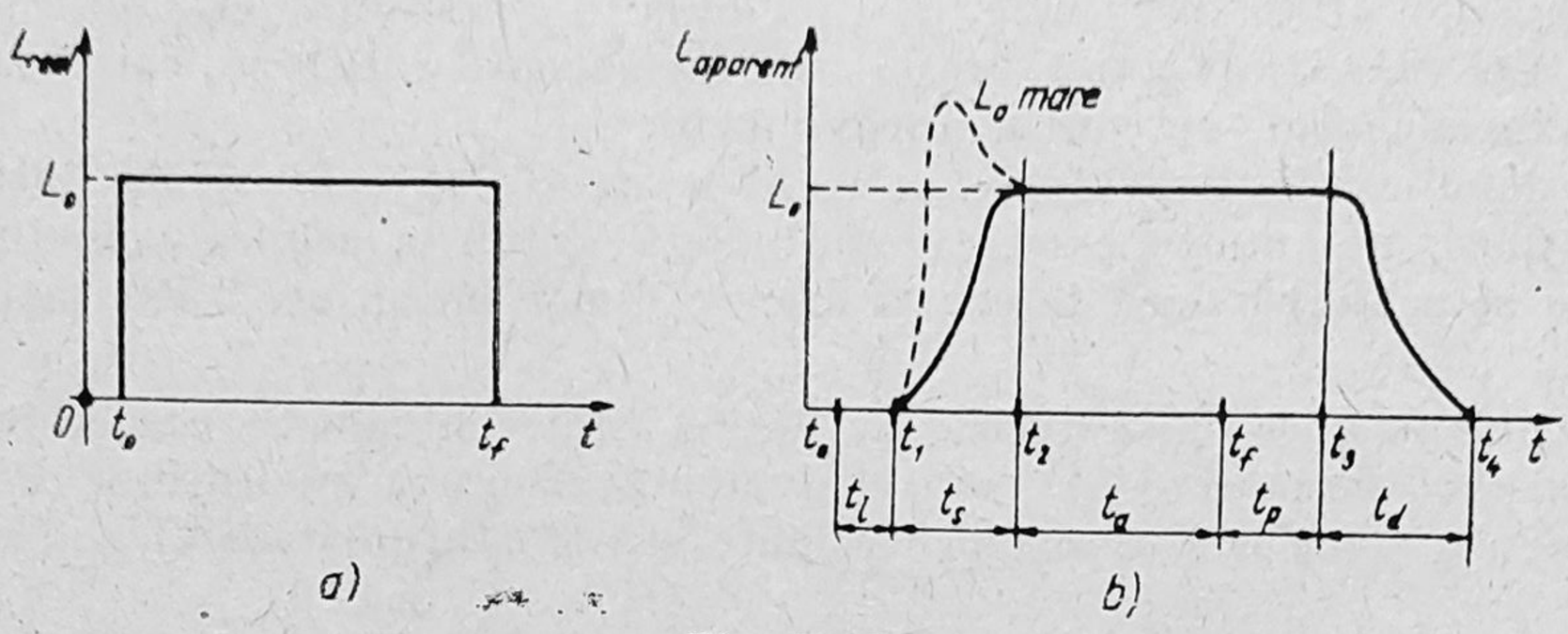


Fig. 12.68

loarea de regim la momentul t_2, după ce, uneori, l-a depășit (cînd L_0 este foarte mare), nu începe a diminua decît în momentul t_3 posterior lui t_f și nu dispare decît în momentul t_4 (fig. 12.68, *b*).

Intervalele de timp distincte ale perceperii sînt :

$t_1 - t_0 = t_l \simeq 0{,}1$ s	faza latentă,
$t_2 - t_1 = t_s$	fază de stabilire,
$t_f - t_2 = t_a$	faza de adaptare,
$t_3 - t_f = t_p \simeq 0{,}15$ s	faza de persistență,
$t_4 - t_3 = t_d \simeq 0{,}2$ s	faza de dispariție.

Persistența impresiilor luminoase permite utilizarea surselor alimentate în curent alternativ, aplicațiile cele mai importante fiind în stroboscopie și în cinematografie. O iluminare intermitentă de o frecvență superioară frecvenței critice $\nu > \nu_c$, care este de ordinul zeci de Hz (40—50 Hz, în funcție de culoare, de luminanță și de legea de variație a acesteia) și avînd întreruperi suficient de scurte, dă aceeași impresie ca și o iluminare continuă, valoarea luminanței medii fiind dată de formula mediei (legea lui Talbot)

$$L_m = \nu \int_0^T L(t)\, dt \qquad (12.66)$$

unde $L = L(t)$ reprezintă legea de variație periodică a luminanței, iar $T = 1/\nu$ perioada variației luminanței. Ochiul realizează deci, o integrală exactă a senzațiilor luminoase. Pentru frecvențe mai mici decît frecvența critică $\nu < \nu_c$ apare fenomenul de pîlpîire a luminii.

12.6. Colorimetrie

Cataloagele (sau atlasuri) de culori, stabilite de firmele producătoare de materii colorante pentru a desemna culorile, au un caracter empiric, chiar dacă se face apel la numeroase calificative calitative (bleu pastel, albastru de Pru-

sia etc.) și nu prezintă garanții în ceea ce privește stabilitatea în timp. Pentru a reproduce cu precizie culoarea unui corp sau a unei radiații s-a adoptat caracterizarea cantitativă (numerică) a culorii, pe baza unor convenții făcute în urma studierii perceperii vizuale : studiul culorilor din punctul de vedere calitativ și cantitativ face obiectul colorimetriei.

Colorimetrie vizuală. Cauza fizică a unei senzații vizuale se numește excitație ; dacă două excitații produc senzații identice, atît în luminozitate în fotometrie), cît și în culoare, ele sînt numite echivalente cromatic sau metamere. Colorimetria vizuală are la bază următoarele ipoteze, care sînt verificate experimental, cel puțin aproximativ :

— două excitații echivalente cu o a treia sînt echivalente între ele ;

— dacă mai multe excitații acționează simultan asupra ochiului, senzația nu se schimbă dacă înlocuim oricare dintre ele printr-o excitație echivalentă ;

— prin urmare, dacă excitațiile A și A' sînt echivalente, respectiv, cu B și B', atunci suma $A + A'$ este echivalentă cu suma excitațiilor $B + B'$; de asemenea, dacă A și B sînt echivalente, nA și nB (n oarecare) sînt echivalente.

Aceste ipoteze, numite și principiile colorimetrice, sînt cunoscute sub numele de *legile lui Grassmann.* În colorimetrie (ca și în fotometrie) a fost definit un *observator normal mediu :* media acelor observatori care realizează aceleași echilibruri fotometrice pentru excitații egale. Există o proporție mare de observatori (8% de sex masculin și 5% de sex feminin) care se depărtează mult de la această medie ; această anomalie a ochiului se numește daltonism.

Studiul culorilor radiațiilor luminoase. Radiațiile luminoase monocromatice au culori *pure* (culori spectrale) cărora li se dau nume în funcție de lungimea de undă, dar ele nu pot fi fixate cu precizie (decît dacă se indică spectrul substanței în care se regisește radiația respectivă, ca în tabelul 12.7).

Tabelul 12.7

Culoarea radiației monocromatice	Lungimea de undă aproximativă [nm]	Culoarea complementară
Violet extrem	400	
Violet mediu	420	Verde galben
Vilet albastru	440	
Albastru mediu	470	Galben
Albastru verde	500	
Verde mediu	530	Purpuriu
Verde galben	560	
Galben mediu	580	Albastru
Galben portocaliu	590	
Portocaliu mediu	600	Albastru-verzui
Portocaliu roșu	610	
Roșu mediu	650	Albastru-verde
Roșu extrem	780	

Radiațiile luminoase complexe, cu care se lucrează în mod curent se desemnează de obicei prin același nume ca și culoarea radiației monocromatice cu care se aseamănă, în afara radiațiilor albe (mai mult sau mai puțin asemă-

nătoare cu cea a Soarelui) și a radiațiilor purpurii (amestecuri de radiații roșii și violete sau albastre). De exemplu, există filtre care nu lasă să treacă lumina galbenă, ci numai radiații roșii și verzi, dar al căror amestec dă senzația de galben.

Se consideră lumină albă orice lumină analogă luminii zilei ; această definiție acceptă compoziții spectrale foarte diferite (de la cea a surselor cu filament de tungsten la cea a cerului albastru). Încă nu a fost desemnată o lumină

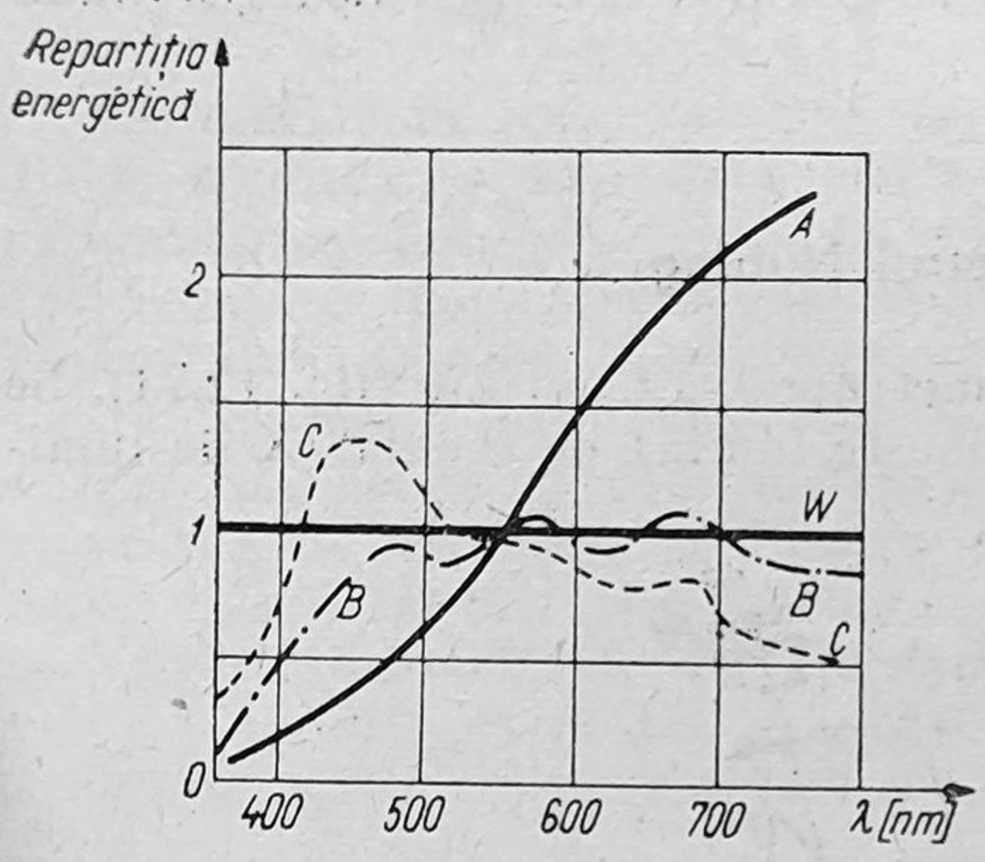


Fig. 12.69

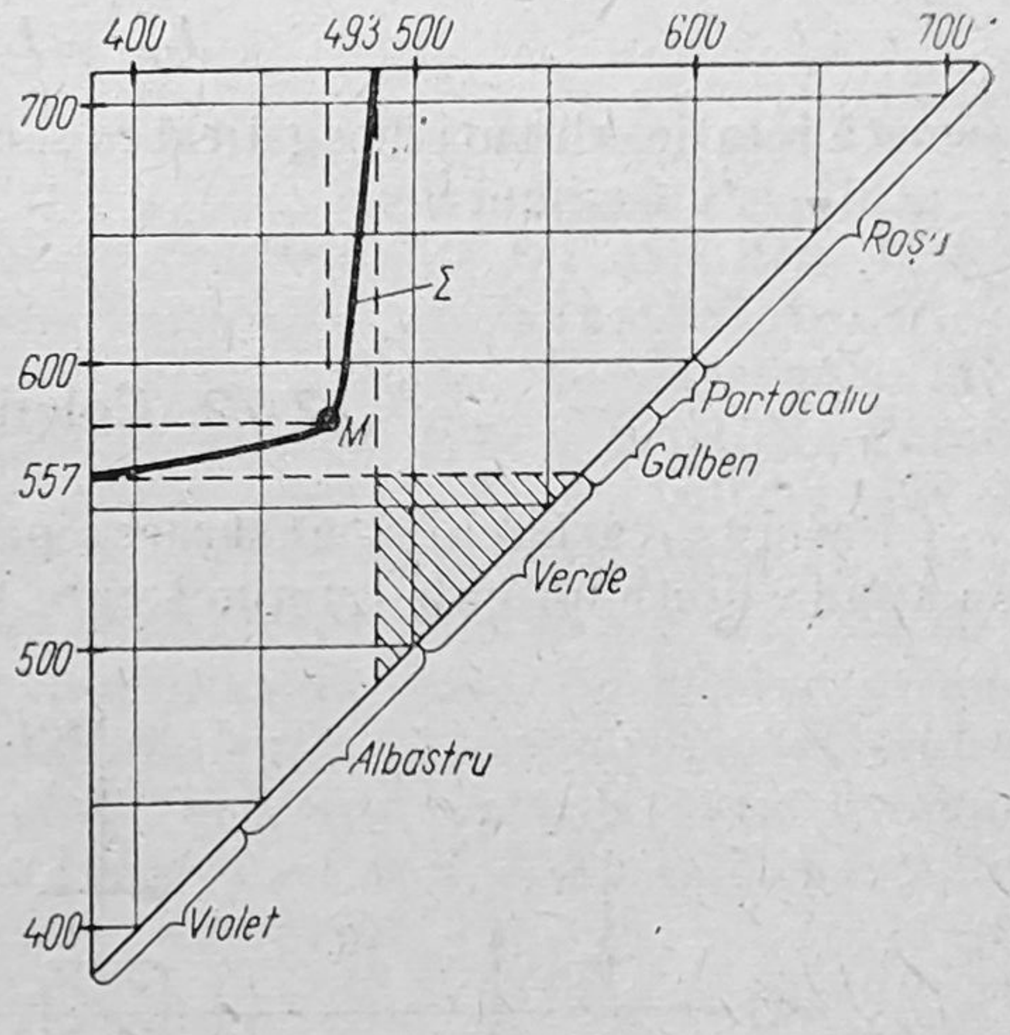


Fig. 12.70

albă etalon, în vederea iluminării unui eșantion pentru a-i determina culoarea. CIE (Commission Internationale de l'Eclairage) a recomandat, în acest sens, trei surse A, B, C : Etalonul A (numit și lumină albă de noapte) este constituit dintr-o sursă cu filament de tungsten în atmosferă gazoasă și are temperatura de culoare 2 850 K ; Etaloanele B și C au asociate aceleiași surse, filtre de tipul Davis-Gibson cu soluții conținînd sulfați de cupru și de cobalt ; temperaturile lor de culoare sînt, respectiv, $T_B = 4\,870$ K și $T_C = 6\,770$ K. În convențiile referitoare la sisteme de referință se utilizează lumina albă teoretică W, cu spectru de egală energie, la care repartiția energetică este constantă în funcție de lungimea de undă în domeniul vizibil (fig. 12.69) ; temperatura de culoare $T_W \simeq 5\,470$ K, apare, pentru un ochi normal, ușor purpurie.

Două radiații monocromatice se numesc de culori complementare dacă acționînd simultan și în proporție convenabilă asupra ochiului normal mediu produc impresia unei lumini albe. Corespondența între culorile complementare nu poate fi stabilită riguros decît dacă se fixează lumina albă de referință. Curba $\sum$ indică lungimile de undă ale radiațiilor monocromatice complementare în raport cu lumina albă C (fig. 12.70). De exemplu, pentru un punct $M \in \sum$, radiațiile complementare au lungimile de undă 470 nm și 575 nm.

Observație. Radiațiile de culoare verde cu $\lambda \in [493, 557]$ nm au radiații complementare purpurii.

12.6.1. **Legea fundamentală a colorimetriei**

S-a dovedit experimental că suprapunînd un fascicul de lumină albă W de luminanță L_W și un fascicul monocromatic de lungime de undă λ_d și de luminanță L_d se poate realiza un fascicul echivalent cromatic cu un fascicul colorat oarecare (cu excepția culorilor purpurii) de luminanță L ; pentru a realiza acest lucru este necesară alegerea corespunzătoare a parametrilor λ_d, L_d și L_W, suma acestor luminanțe fiind egală cu L

$$L_d + L_W = L \; ; \tag{12.67}$$

această relație, alături de egalitatea senzației de culoare, constituie legea fundamentală a colorimetriei.

12.6.2. **Colorimetrul Nutting**

Permite varierea și măsurarea parametrilor λ_d, L_d și L_W (fig. 12.71). Se compune dintr-un cub Lummer care primește lumina de studiat X de luminanță L, de pe o parte, iar pe de altă parte lumina albă W reflectată de fața AB a unei prisme P amestecată cu lumina monocromatică (λ_d) a sursei S' ; λ_d se poate varia prin rotirea prismei dispersoare P, iar luminanțele L_W și L_d pot fi variate prin reducerea fluxurilor luminoase cu ajutorul unor dispozitive (polarizor și analizor rotite între ele). λ_d este numită lungime de undă dominantă a radiației studiate X ; dacă această radiație este complexă, λ_d indică care dintre radiațiile monocromatice se apropie cel mai mult de culoarea X, dar lungimea de undă λ_d nu corespunde maximului curbei de repartiție spectrală a radiației X. Lungimea de undă dominantă indică ceea ce se numește în mod curent *tenta* culorii.

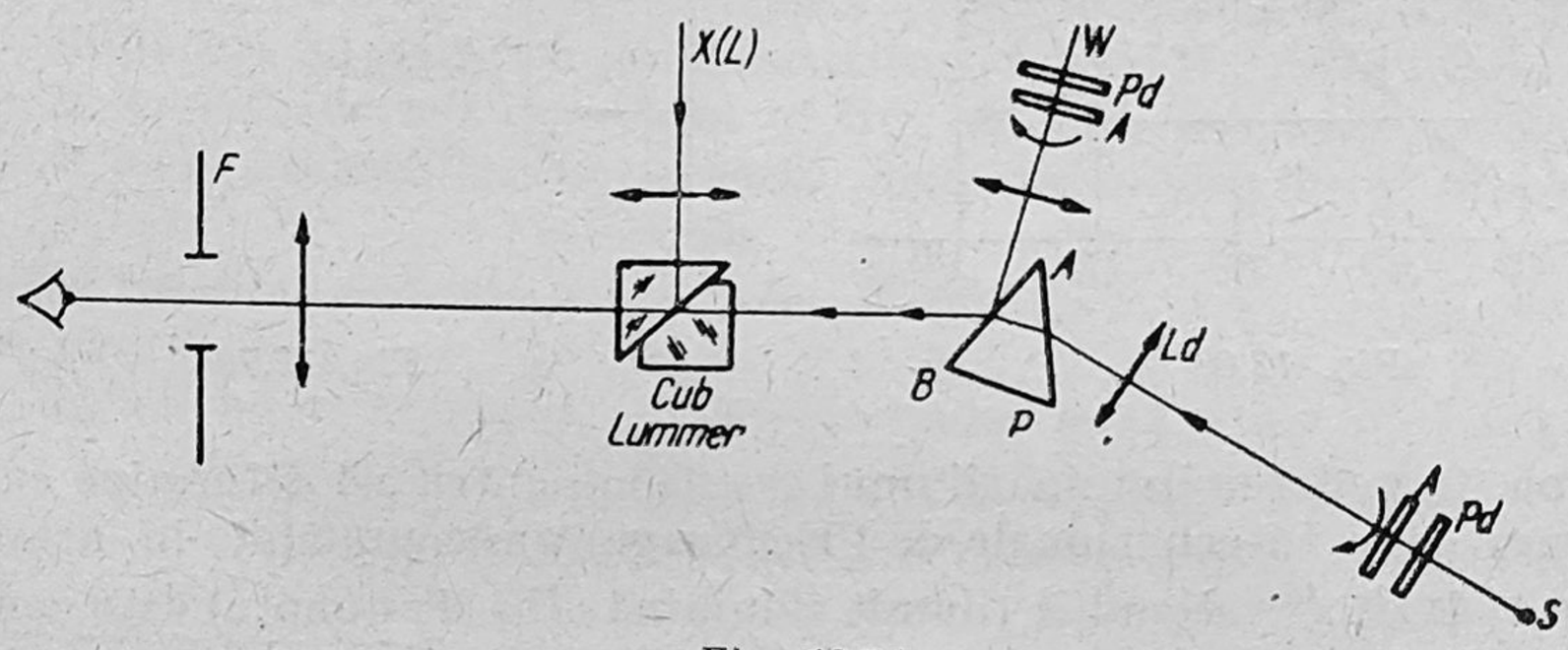


Fig. 12.71

Raportul

$$p = \frac{L_d}{L} = 1 - \frac{L_W}{L} \tag{12.68}$$

este numit factor de puritate a radiației considerate ; $p = 1$ pentru o radiație monocromatică (spectrală), culoarea acesteia fiind numită saturată ($L_d = L$; $L_W = 0$). Cu cît crește proporția de lumină albă p scade, iar culoarea devine din ce în ce mai spălată de alb.

O radiație purpurie nu are lungime de undă dominantă, dar se poate determina lungimea de undă complementară λ_c, ca și luminanța L_c a radiației complementare care, suprapusă luminanței L_p a radiației purpurii, dă luminanța L_W de lumină albă W. Ecuația colorimetrică corespondentă este

$$L_c + L_p = L_W \tag{12.69}$$

iar factorul de puritate este definit de relația

$$p' \doteq \frac{L_p - L_W}{L_p} = 1 - -L_W/L_p < 0 \tag{12.70}$$

Ansamblul de trei numere λ_d (sau λ_c), p, L caracterizează complet o radiație studiată ; primele două sînt numite coeficienți de cromaticitate. Însă, determinarea acestor coeficienți are un grad ridicat de incertitudine, astfel încît se face apel la *metoda sintezei tricromatice*: trei radiații de culori numite fundamentale, alese arbitrar, dar astfel încît nici una dintre ele să nu fie obținută prin amestecul celorlalte, pot realiza un amestec echivalent fotometric și colorimetric cu o radiație luminoasă X de culoare oarecare și de luminanță L. Pentru a compara rezultatele diferitelor măsurători colorimetrice, C.I.E. a ales convențional (pe baza lucrărilor lui Guild și Wright) un sistem de referință numit RGB, utilizînd ca radiații fundamentale : $\lambda_R = 700$ nm (roșu), $\lambda_G = 546$ nm (verde), $\lambda_B = 436$ nm (albastru). În acest caz, ecuația fundamentală a colorimetriei devine

$$L = L_R + L_G + L_B \tag{12.71}$$

unde una sau două dintre luminanțele L_R, L_G, L_B pot fi nule.

Observație : L_R, L_G sau $L_B < 0$, dacă intră în amestec cu radiația studiată pentru a da o culoare echivalentă cu un amestec convenabil a celorlalte două culori fundamentale.

12.6.3. Colorimetrul tricromatic Donaldson (fig. 12.72)

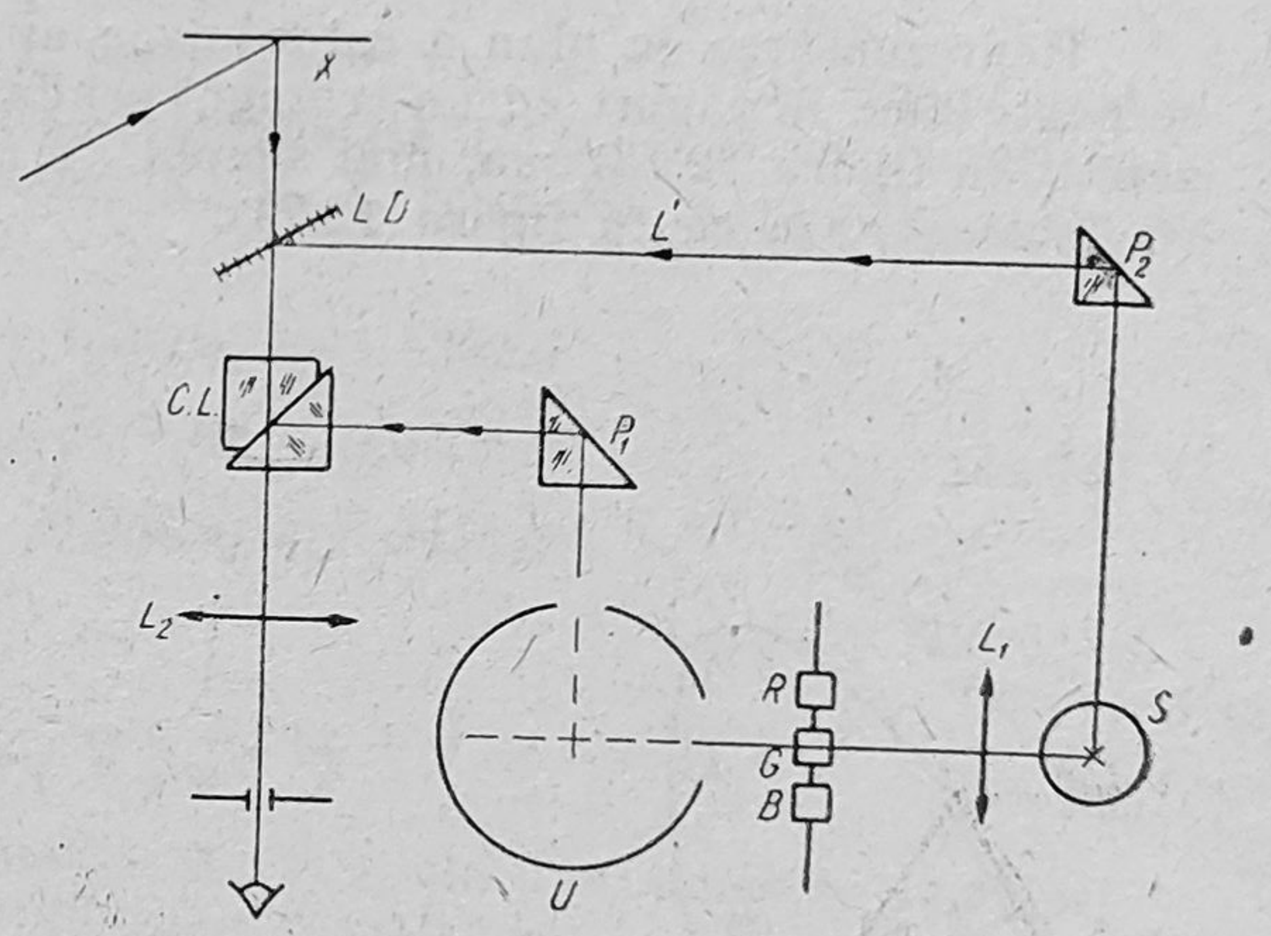


Fig. 12.72

Utilizează cele trei radiații fundamentale provenind de la aceeași sursă S și trecînd prin filtrele colorate R, G, B, fiecare avînd diametrul util reglat de o diafragmă tip iris, luminanțele L_R, L_G, L_B variind proporțional cu deschiderile acestor diafragme și putînd fi determinate în urma etalonării aparatului. Amestecul celor trei radiații fundamentale de luminanțe reglate convenabil este realizat de sfera integratoare Ulbricht (U), iar apoi, prin intermediul

cubului Lummer (*C.L.*), comparat cu radiația de studiat *X*. Uneori este comod de a „desatura" fasciculul *X*, amestecîndu-l cu un fascicul de luminanță *L'*, obținut prin amestecul

$$L' = L'_R + L'_G + L'_B \tag{12.72}$$

de compoziție L'_R, L'_G, L'_B cunoscută. Se obține așadar, un fascicul rezultant

$$L + L' = (L_R + L'_R) + (L_G + L'_G) + (L_B + L'_B). \tag{12.73}$$

Sumele din paranteze pot fi determinate cu ajutorul colorimetrului, și scăzînd din fiecare L'_R, L'_G, L'_B se obțin L_R, L_G, L_B. În sistemul de referință *RGB* vom numi componente tricomatice ale radiației studiate

$$R = L_R,\ G = L_G/4{,}591,\ B = L_B/0{,}0601 \tag{12.74}$$

unde divizorii lui L_G și L_B au fost astfel aleși încît pentru un observator normal un amestec de radiații fundamentale în care $R = G = B$ este echivalent cu lumina albă *W*. Aceasta înseamnă că o astfel de lumină se obține prin amestecul $L_R = 1$ cd/m², $L_G = 4{,}591$ cd/m², $L_B = 0{,}0601$ cd/m².

Observație. Radiațiile albastre au o influență foarte puternică asupra culorilor amestecurilor. În virtutea principiilor colorimetrice, enunțate la începutul paragrafului 12.6, componentele tricromatice ale unui amestec de culori sînt egale cu sumele componentelor tricromatice ale culorilor respective. Rapoartele

$$r = \frac{R}{R+G+B};\quad g = \frac{G}{R+G+B};\quad b = \frac{B}{R+G+B} \tag{12.75}$$

sînt coeficienții tricromatici. Cunoașterea a doi coeficienți permite determinarea celui de-al treilea, deoarece $r + g + b = 1$, (12.76), iar pentru a caracteriza complet o radiație studiată mai trebuie indicată și luminanța totală *L*.

12.6.4. Reprezentarea în plan a culorilor

Reprezentarea în plan a culorilor cu ajutorul coeficienților tricromatici se poate face în raport cu un triunghi echilateral (triunghiul culorilor reprezentat în figura 12.73) sau, mai simplu, în raport cu două axe rectangulare (de obicei, *r*, *g*, ca în figura 12.74).

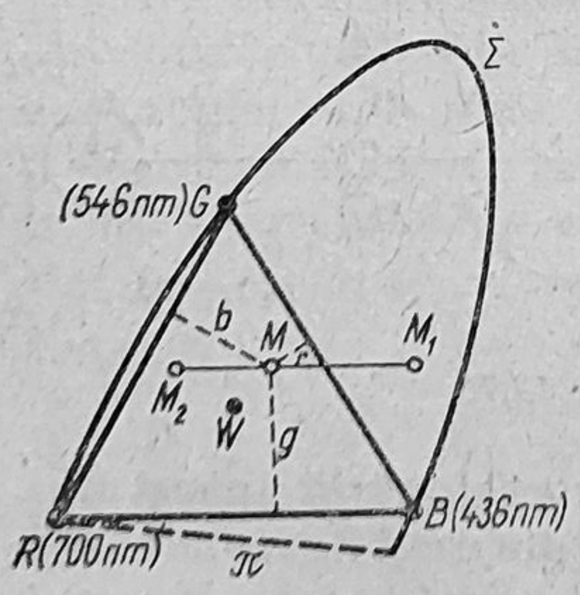


Fig. 12.73

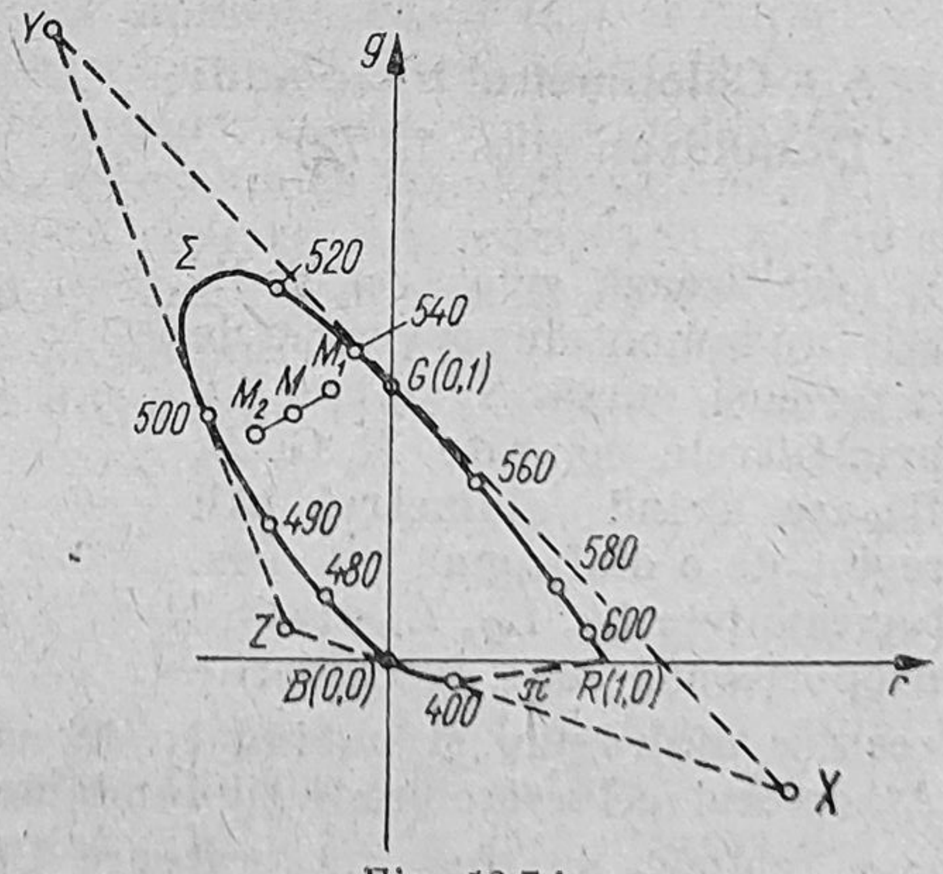


Fig. 12.74

a) *Triunghiul culorilor*, echilateral, de înălțime egală cu unitatea, are în vîrfuri reprezentate culorile fundamentale R, G, B. Un punct M din plan reprezintă o culoare, coeficienții tricromatici ai culorii fiind reprezentați de distanțele pînă la laturile triunghiului (sînt pozitive dacă traversează interiorul triunghiului ; de exemplu, pentru punctul M_1, $r_1 < 0$, $g_1 > 0$, $b_1 > 0$). În centrul triunghiului culorilor este reprezentată culoarea albă teoretică W, pentru care $r = g = b = 1/3$. Locul geometric al culorilor spectrale (radiațiile monocromatice ale spectrului) este numit *locul spectral* (curba Σ), iar locul geometric al culorilor purpurii este reprezentat de dreapta π, care unește extremitățile locului spectral Σ.

b) În *reprezentarea rectangulară* (r, g) culorile fundamentale se află în vîrfurile unui triunghi dreptunghic isoscel de catete egale cu unitatea, r fiind măsurat pe abscisă, iar g pe ordonată ($b = 1 - r - g$). Lumina albă W este reprezentată în centrul de greutate al triunghiului $r_W = g_W = 1/3$. Locul spectral Σ are extremitățile în R (1, 0) cu $\lambda_R = 700$ nm și în vecinătatea lui B(0, 0) în cadranul IV, pentru $\lambda_B = 400$ nm. Dreapta π, care unește extremitățile locului spectral, reprezintă locul culorilor purpurii. Locul geometric al punctelor pentru care luminanța este nulă se poate determina analitic astfel

$$\begin{aligned} L = 0 &\rightarrow L_R + L_G + L_B = 0 \\ r &+ 4{,}5909g + 0{,}06012b = 0 \\ r &+ g + b = 1. \end{aligned} \tag{12.77}$$

Se elimină b și rezultă ecuația locului geometric de întuneric, în coordonate (r, g)

$$0{,}9399r + 4{,}5309g + 0{,}06012 = 0 \tag{12.78}$$

reprezentată în planul (r, g) prin dreapta XZ, numită *alychna*.

c) *Sistemul colorimetric* X, Y, Z, propus de C.I.E. (1931), cel mai utilizat în prezent, înlocuiește componentele tricromatice R, G, B și coeficienții r, g, b cu alte componente și coeficienți X, Y, Z, respectiv x, y, z, care sînt legați între ele cu relațiile

$$\begin{aligned} X &= 2{,}7689R + 1{,}7519G + 1{,}1302B \\ Y &= \quad R + 4{,}5909G + 0{,}06012B \\ Z &= \quad 0{,}0565G + 5{,}5944B \end{aligned} \tag{12.79}$$

iar

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{1}{X + Y + Z}\,; \quad (x + y + z = 1). \tag{12.80}$$

Ca și RGB, componentele cromatice X, Y, Z ale unui amestec de culori sînt egale cu suma componentelor culorilor respective.

Avantajul acestui sistem constă în faptul că pentru toate culorile coeficienții x, y, z sînt pozitivi.

Coeficienții ecuațiilor liniare (12.78) au fost aleși astfel încît să se satisfacă următoarele condiții :

a) x, y, z pozitivi pentru orice culoare ;

b) componenta Y se confundă cu luminanța L a amestecului (deci, reprezintă caracteristica fotometrică a radiației) ;

c) lumina albă W are coordonatele $x = y = z = 1/3$ (asemenea ca în sistemul RGB) ;

d) coeficientul z al radiațiilor monocromatice cuprinse între roșu extrem și verde cu lungimea de undă $\lambda = 625$ nm este practic nul, iar pînă la $\lambda = 545$ nm, $z < 0{,}01$.

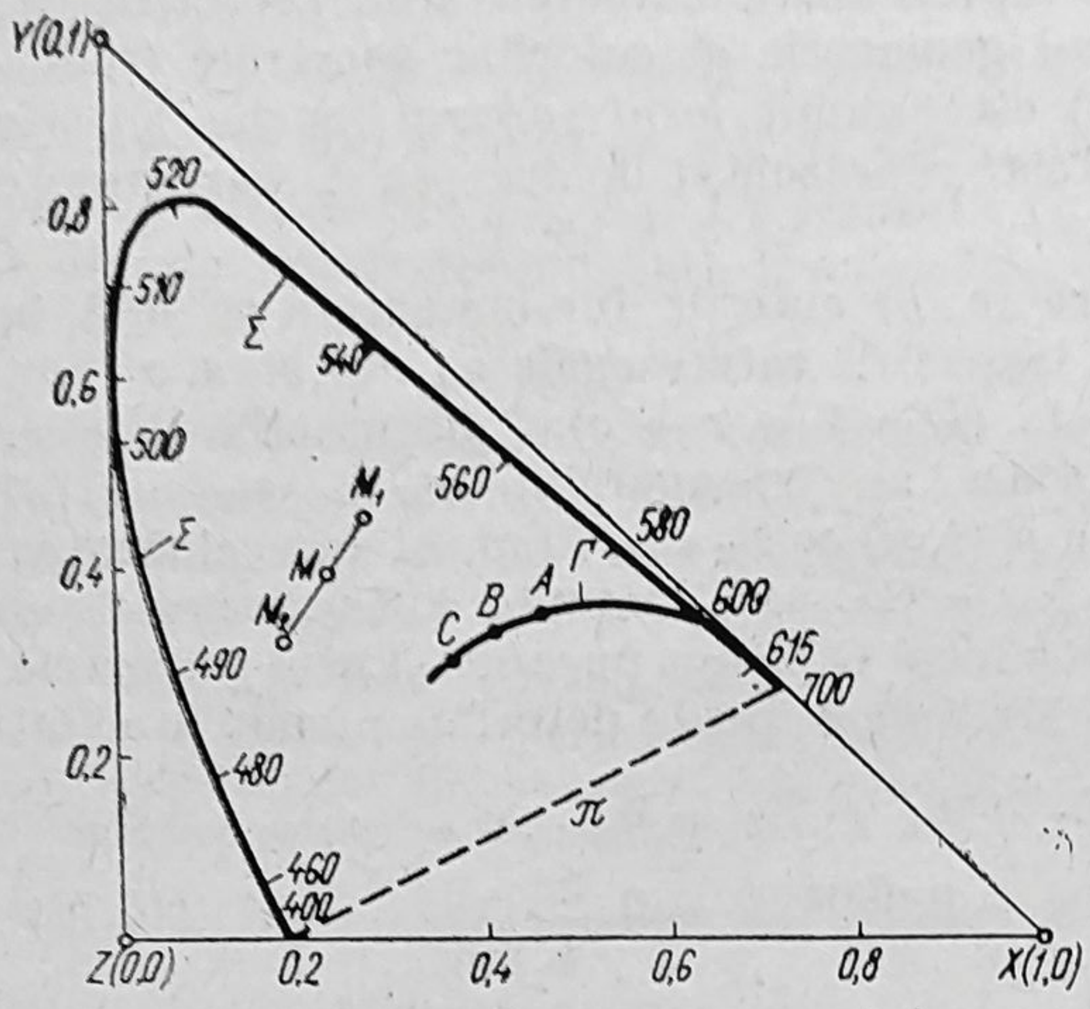


Fig. 12.75

Diagrama (x, y) de reprezentare a culorilor (fig. 12.75) pune în evidență respectarea acestor condiții. Se remarcă și aici locul geometric al punctelor reprezentînd radiațiile monocromatice — locul spectral $\sum$ — și linia care unește extremitățile acestuia — locul culorilor purpurii π. Toate culorile reale sînt reprezentate în regiunea delimitată de $\sum$ și π.

Punctele reprezentînd radiațiile emise de corpul negru la diferite temperaturi formează curba Γ, printre care luminile albe A, B. C. Lumina albă W este reprezentată în centrul de greutate al triunghiului XYZ : $W(1/3, 1/3)$. Locul geometric al punctelor de luminanță nulă se determină mult mai ușor decît în sistemul RGB, deoarece componența Y reprezintă chiar luminanța

$$L = 0 \rightarrow Y = 0 \rightarrow y = 0. \tag{12.81}$$

Deci, locul geometric al punctelor de luminanță nulă (alychna) este reprezentat de cateta ZX.

12.6.5. **Proprietăți ale diagramei culorilor**

1°. Fie o culoare reprezentată printr-un punct M oarecare pe una din diagramele arătate (fig. 12.75) și care poate fi obținută prin amestecul a două culori, reprezentate prin M_1 și M_2, segmentul $\overline{M_1M_2}$ trecînd prin M. Relația între componentele cromatice ale celor trei culori „coliniare“ se obține determinînd poziția lui M între M_1 și M_2 printr-o regulă comparabilă cu cea a compunerii forțelor paralele în mecanică ; astfel, în diagrama (x, y) a culorilor

$$\frac{\overline{M_1M_2}}{X + Y + Z} = \frac{\overline{M_2M}}{X_1 + Y_1 + Z_1} = \frac{\overline{MM_1}}{X_2 + Y_2 + Z_2}. \tag{12.82}$$

2°. Punctele reprezentative a două culori complementare în raport cu lumina albă W (poate fi aleasă și o altă lumină convențională) se găsesc pe o dreaptă trecînd prin W, de o parte și de alta a punctului (fig. 12.76).

3°. O semidreaptă WM taie (dincolo de M) locul spectral în D, care corespunde lungimii de undă dominante λ_d a culorii M (și a tuturor culorilor reprezentate pe segmentul WD).

4°. O semidreaptă WN taie (dincolo de W) locul spectral în K corespunzînd lungimii de undă complementare λ_c a culorii N (și a tuturor culorilor purpurii mai mult sau mai puțin spălate de alb, reprezentate pe segmentul WP ; $P \in \pi$, locul culorilor purpurii).

5°. Puritatea se determină pe baza relației (12.68), cu ajutorul coordonatelor y ($Y = L$) și y_d

$$p = \frac{y_d}{y} \cdot \frac{y - 1/3}{y_d - 1/3}. \qquad (12.83)$$

6°. În cazul unei culori purpurii se utilizează relația analogă (12.70) și coordonatele y și y_p ale punctelor N, respectiv P

$$p' = \frac{y_p}{y} \cdot \frac{y - 1/3}{y_p - 1/3}. \qquad (12.84)$$

7°. Diagrama (x, y) poate fi completată cu dreptele de egală lungime de undă dominantă, care trec prin W și curbele de egală puritate p sau p'. Un astfel de grafic permite, prin interpolare, determinarea rapidă a coeficienților λ_d (sau λ_c), p (sau p') a unei culori, cunoscînd coordonatele (x, y) sau invers.

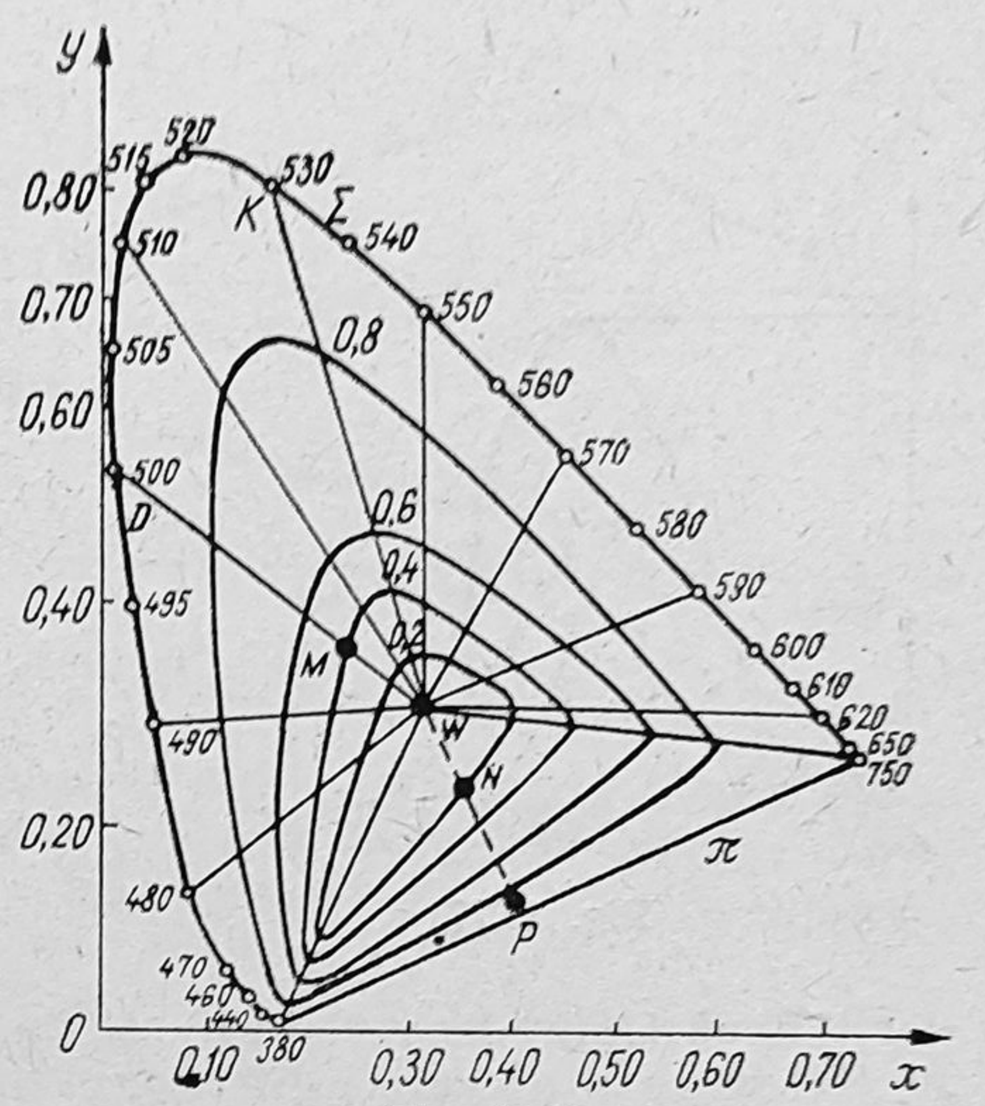


Fig. 12.76

12.6.6. Perceperea culorilor

Vederea nocturnă (scotopică) nu sesizează decît caracteristica fotometrică a luminii : fluxul sau luminanța ; se spune despre vederea nocturnă că este univariantă. Vederea diurnă (fotopică, cum i se mai spune) sesizează atît luminanța radiației cît și culoarea, aceasta fiind caracterizată, așa cum s-a arătat, de două componente (a treia deducîndu-se) ; de aici rezultă trivarianța vederii diurne. Multe ipoteze au fost emise pentru a explica trivarianța vederii. Cea mai acceptabilă (Young, 1801) presupune în sistemul vizual intervenția a trei tipuri de receptori cu sensibilități diferite la radiațiile monocromatice și integrînd efectul lor : se presupune că există trei tipuri de conuri cu pigmenți fotosensibili diferiți, dar pînă în prezent nu au putut fi izolați cu certitudine.

Contribuția celor trei pigmenți la vizibilitatea luminoasă relativă este diferită în ceea ce privește radiația fundamentală albastră B, din sistemul RGB (fig. 12.77). Studierea anomaliilor percepției culorilor a permis depis-

tarea (marea majoritate a observatorilor fac apel la trei culori fundamentale pentru a distinge o culoare, acești observatori sînt numiți tricromați și verifică teoria lui Young asupra existentei celor trei tipuri de receptori) a unor observatori care, pentru a repera o culoare, fac apel la numai două culori fundamentale (aceștia sînt daltoniști sau dicromați, neavînd în teoria lui Young

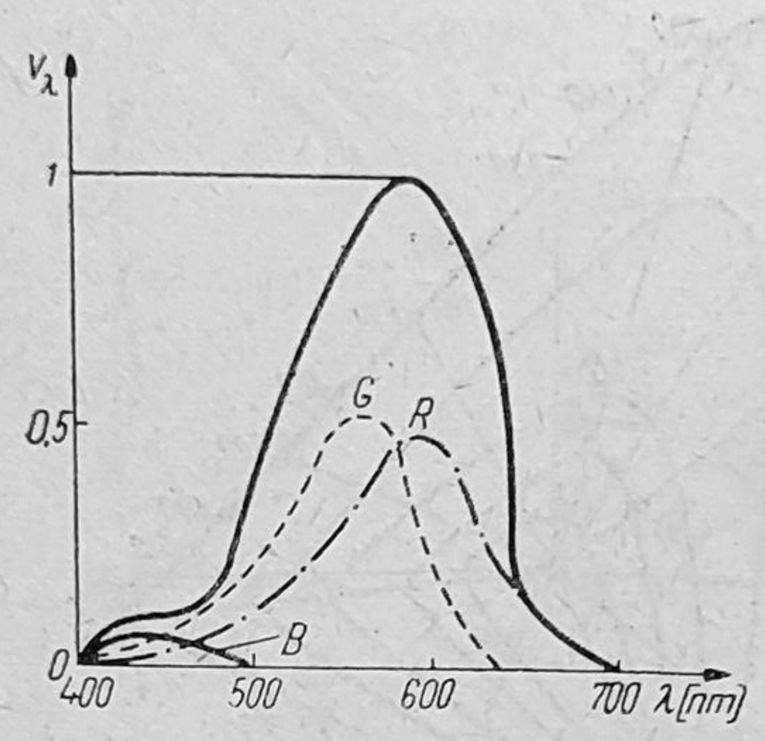


Fig. 12.77

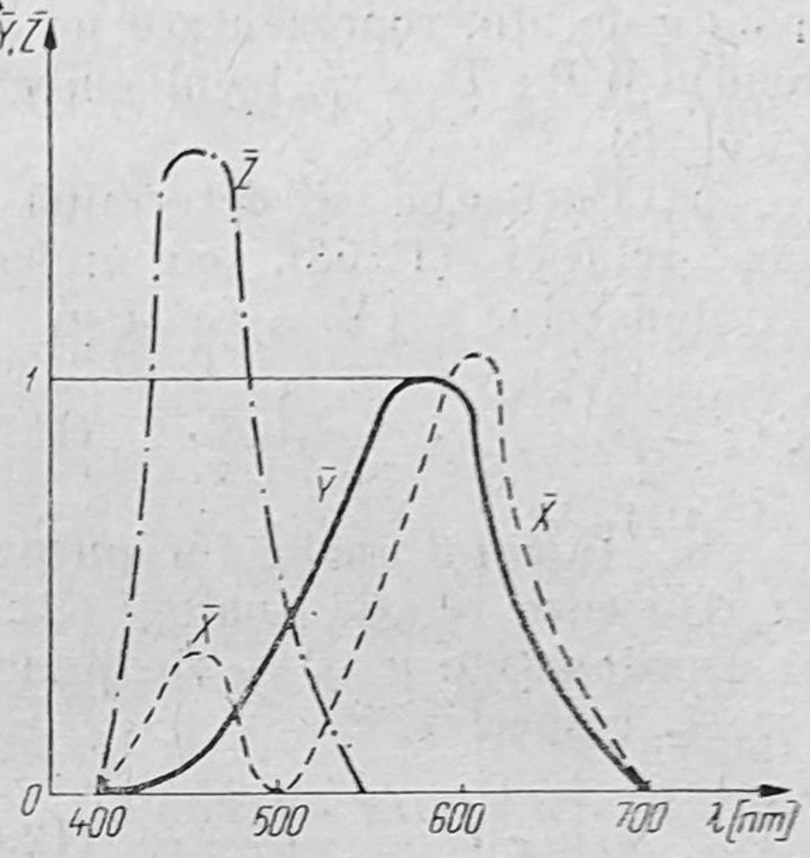


Fig. 12.78

decît două tipuri de receptori) și, în mod excepțional, observatori care nu percep senzații de culori diferite, ci numai senzații mai mult sau mai puțin luminoase (aceștia sînt numiți monocromați sau acromați). Rezultatele acestor studii cu caracter fiziologic resping teoria idealistă care susține că la baza perceperii culorii stă ideea și nu senzația materială, teorie care profită de nedescoperirea pînă în prezent a celor trei tipuri de receptori.

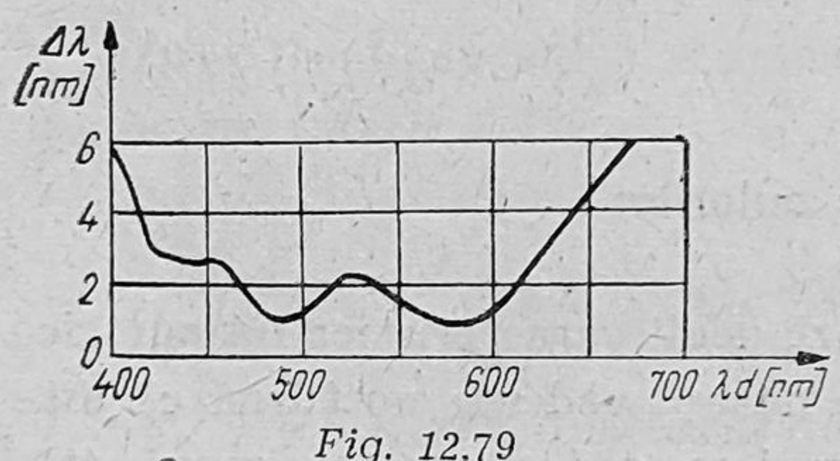


Fig. 12.79

C.I.E. a definit aptitudinile colorimetrice ale ochiului normal în sistemul XYZ trasînd curbele $\bar{X}(\lambda)$, $\bar{Y}(\lambda)$, $\bar{Z}(\lambda)$, numite curbele coeficienților distribuției spectrului de egală energie pentru observatorul normal mediu, pentru λ variind din 10 în 10 nm (fig. 12.78).

Observație. Cum $\bar{Y} = L$, curba $\bar{Y}(\lambda)$ reprezintă chiar curba distribuției eficacității luminoase a ochiului normal mediu.

Pragul diferențial de tentă $\Delta\lambda_d$ constituie cea mai mică variație de la lungimea de undă dominantă a unei culori saturate, perceptibilă de către ochiul normal mediu ; $\Delta\lambda_d$ variază în limitele spectrului vizibil mai ales către capete (în roșu și violet), așa cum este arătat în figura 12.79. De reținut că un ochi normal poate distinge printre culorile spectrale între 130—150 de tente diferite, la care se adaugă în jur de 20 culori purpurii „pure" (amestecuri de violet 400 nm cu roșu 700 nm, situate pe linia π în diagrama culorilor. Pentru culori nesaturate sensibilitatea la variații ale lungimii de undă dominante descrește rapid pe măsură ce culorile sînt mai spălate de alb.

Pragul diferențial de puritate Δp : cea mai mică variație a factorului de puritate, perceptibilă de ochiul normal mediu ; în vecinătatea albului acest prag variază atingînd un maxim cam în mijlocul domeniului vizibil (fig. 12.80, a), iar în vecinătatea saturației pragul $\Delta p \simeq$ const. $\simeq 0{,}02$ (fig. 12.80, b). Ținînd seama de rezultatele experimentale privind pragurile $\Delta\lambda_d$ și Δp se admite că există zeci de mii de senzații luminoase diferite.

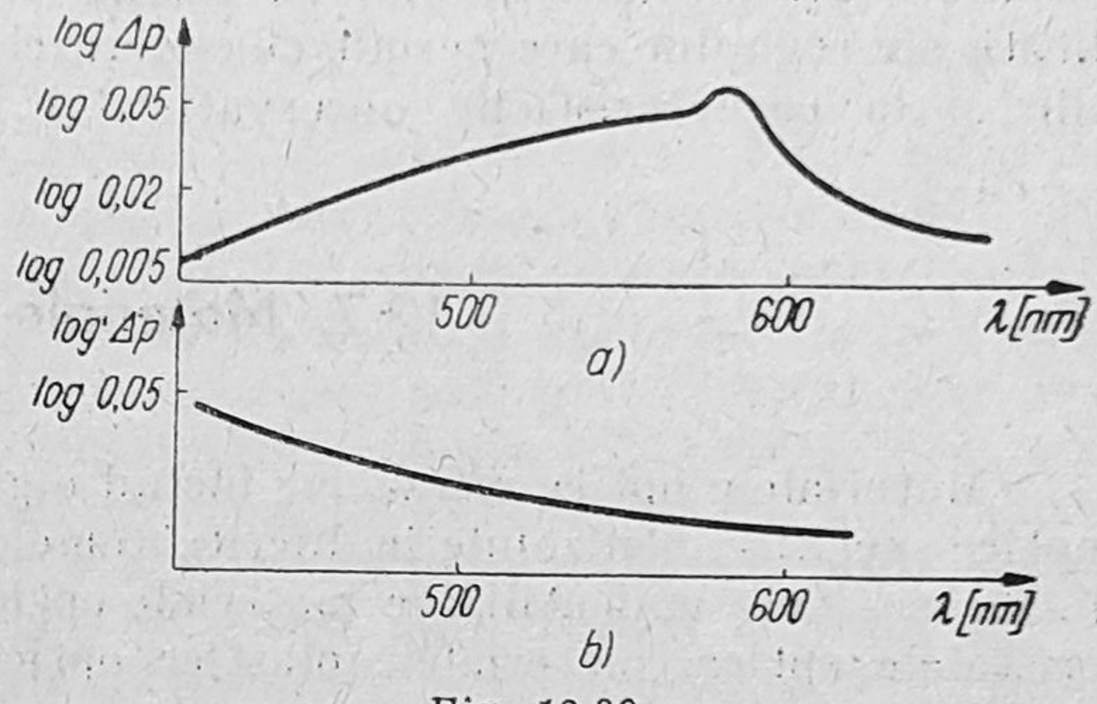


Fig. 12.80

Toleranțele admise în reproducerea culorilor. Ținînd seama de pragurile diferențiale de puritate și de tentă, ca și de proprietatea privind amestecul culorilor, reprezentate prin trei puncte coliniare în diagrama (x, y), au fost trasate în diferite regiuni din diagrama culorilor 25 de locuri geometrice (elipsele lui McAdam), fiecare reprezentînd culorile „egal depărtate" (aflate la limita perceperii diferențiate) față de culoarea reprezentată prin centrul elipsei. În figura 12.81 se remarcă inegalitatea evidentă a elipselor (pentru claritatea desenului, au fost reprezentate la o scară mărită 10 : 1), foarte explica-

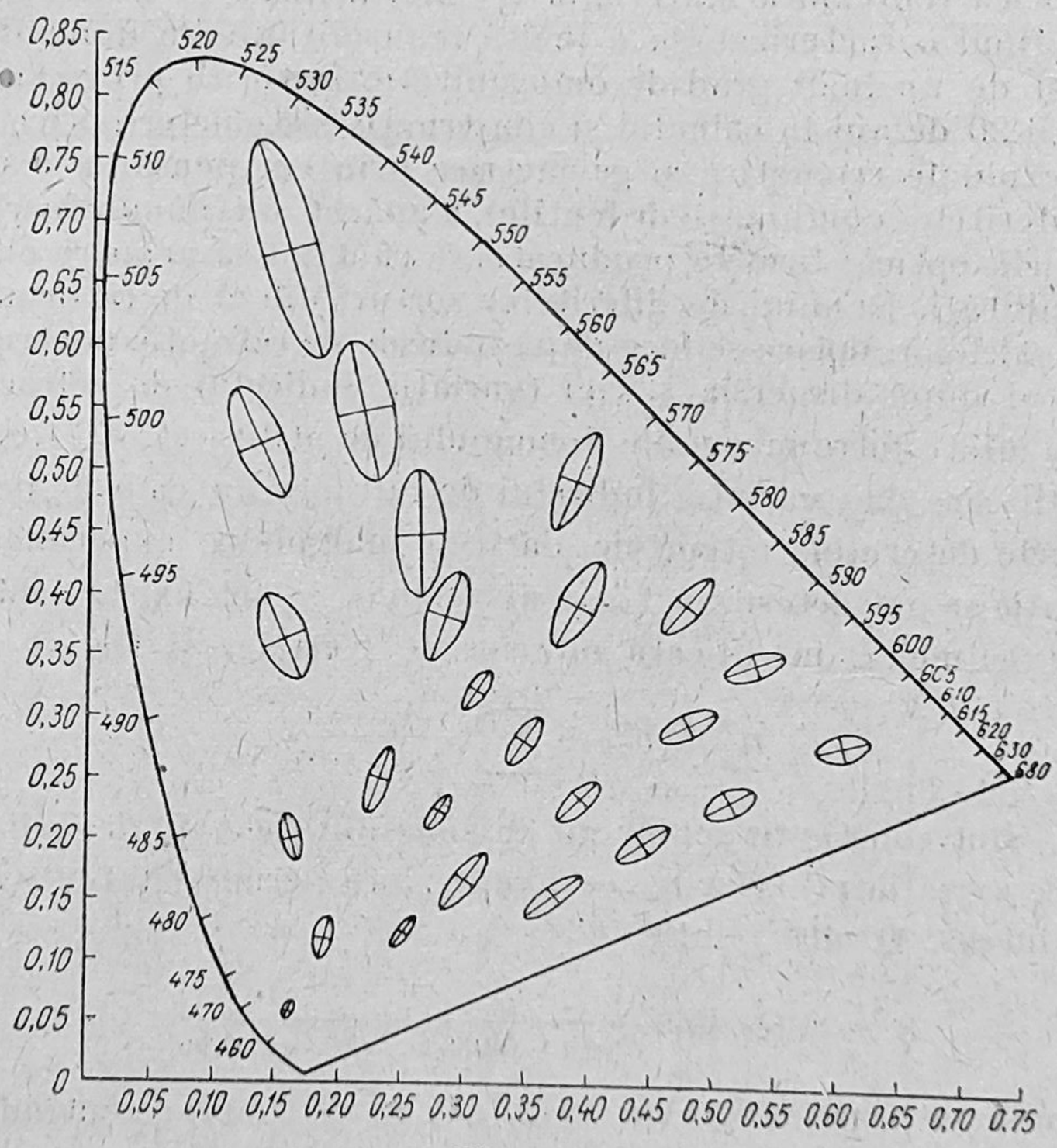


Fig. 12.81

bilă datorită variaţiilor $\Delta\lambda_a(\lambda_d)$; $\Delta_p(\lambda)$. Cunoașterea acestor elipse este foarte importantă pentru alegerea toleranțelor de reproducere și de control a culorilor în cinematografie, în industria coloranților și în general în colorimetrie.

Colorimetria, care este în mare parte convențională, face parte din știința numită *coloristică*, aceasta înglobînd toate aspectele — fizice, fiziologice și psihologice — ale culorii. În colorimetrie mai sînt probleme care își așteaptă rezolvarea (aprofundarea), mai cu seamă cele referitoare la limitele de validitate ale regulilor care permit considerarea culorilor ca fiind mărimi măsurabile și la caracteristicile observatorului normal mediu.

12.7. **Materiale optice**

Materialele optice refractive includ o gamă largă de solide, cu proprietăți optice specifice, utilizabile în diferite domenii ale spectrului vizibil, ultraviolet, infraroșu. Cele mai utilizate materiale optice sînt, în principal, sticla optică, cristalele optice, materialele plastice optice, sticla de cuarț.

12.7.1. **Sticla optică**

Sticla optică reprezintă materialul cel mai utilizat în confecționarea pieselor optice, fiind caracterizat de o înaltă transmitanță în domeniul spectral de utilizare și de un înalt grad de omogenitate. Datorită progresului înregistrat în ultimii 20 de ani în calculul și construcția sistemelor optice (reducerea aberațiilor reziduale cromatice și geometrice prin compensarea dispersiilor și aberațiilor diferitelor combinații de lentile), a apărut un număr foarte mare de sorturi de sticlă optică, firmele producătoare căutînd să acopere cît mai bine gama de necesități. Denumirile diferitelor sorturi diferă de la firmă la firmă. Clasificarea sticlelor optice se face după indicele de refracție pentru o radiație de referință și după dispersia sticlei (variația indicelui de refracție pentru două radiații aflate între marginile domeniului de utilizare). Au fost elaborate diferite relații care dau variația indicelui de refracție în cadrul spectrului vizibil $n(\lambda)$ unele determinate teoretic, dar cele mai multe experimental ; cu o astfel de relație se pot determina toate dispersiile. Astfel, există ecuația de dispersie a lui Sellmeier, modificată ulterior de Ketteler și Helmholtz

$$n^2 = n_\infty^2 + \sum \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \tag{12.85}$$

unde a_i și λ_i sînt constante depinzînd de zona din spectrul de radiații în care se urmărește variația $n(\lambda)$, iar $n_\infty = \varepsilon$ reprezintă permitivitatea statică a mediului considerat. O altă relație

$$n = A + B\lambda^2 + \frac{C}{\lambda^2 - 0{,}035} + \frac{D}{(\lambda^2 - 0{,}035)^2} \tag{12.86}$$

a fost propusă de Hertzberger în 1942, A, B, C, D reprezentînd constante care depind de sortul sticlei.

Relaţia Hartman

$$n = n_0 + \frac{C}{\lambda - \Lambda}.$$

unde n_0, C şi Λ reprezintă constante determinabile pentru fiecare sort de sticlă.

Relaţia Cauchy, modificată în urma ultimelor studii teoretice şi experimentale,

$$n^2 = A_0 + A_1\lambda^2 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_3}{\lambda^4} + \ldots \qquad (12.88)$$

unde A_0, A_1, A_2, ... reprezintă constante ce depind de sortul sticlei optice şi de domeniul spectral de utilizare. De altfel, fiecare firmă producătoare de sticlă optică indică o astfel de formulă în catalogul său, totuşi, oricare dintre aceste formule nu descriu decît parţial modul de variaţie al indicelui de refracţie în funcţie de lungimea de undă a radiaţiei, astfel încît preferăm tabelele numerice, certificate de firma producătoare, care conţin toate datele necesare alegerii corespunzătoare a sortului de sticlă optică. Pentru că cele mai multe aparate optice lucrează în domeniul vizual, radiaţia de referinţă este apropiată radiaţiei de vizibilitate maximă ($\lambda \cong 550$ nm). Există 31 linii spectrale standardizate internaţional (19 în vizibil, trei în ultraviolet şi 9 în infraroşu), utilizate pentru specificarea şi măsurarea indicilor de refracţie, date în tabelul 12.8. De asemenea, există 10 radiaţii laser caracterizate în tabelul 12.9.

Tabelul 12.8

Simbol	Spectrul	Lungimea de undă [nm]	Culoarea
u_2	Hg	312,6	
u_1	Hg	334,1	UV
i	Hg	365,015	
H	He	388,865	Violet
h	Hg	404,656	
g	Hg	435,835	
f	Cd	467,816	
*F	H	486,133	Albastru
*F′	Cd	479,992	
E	Cd	508,582	Verde
*e	Hg	546,074	
*d	He	587,561	
*D	Na	589,284	Galben
*C′	Cd	643,847	
P	He	667,815	
*C	H	656,272	Roşu
r	He	706,519	
A′	K	768,2	
R	Rb	780,023	
P (i_1)	Cs	852,110	
t (i_2)	Hg	1 013,98	
i_3	Hg	1 083,03	
.			IR
.			
.			
i_9	Hg	2 325,4	

Tabelul 12.9

Lungimea de undă [nm]	Element	Culoare
350,7	Kr	UV
356,4	Kr	UV
488,0	Ar	Albastru-verde
520,8	Kr	Verde
530,0	Nd	Verde
568,2	Kr	Galben
632,8	He—Ne	Roșu
641,7	Kr	Roșu
694,3	Kr	Roșu
1 060,0	Nd	IR

Ca radiație de referință pentru specificarea și măsurarea indicelui de refracție (luat în calculele optice pentru sistemele oculare) se folosește în mod curent radiația *d* (în U.S.A. și Canada se utilizează radiația *D*), dar în ultimul timp există preferința pentru radiația *e*, deoarece se măsoară mai ușor și corespunde mai bine sensibilității maxime a ochiului.

În prezent există materiale optice cu indicele de refracție cuprins între 1,365 și 2,075 (sticla Pb—Ti). Se urmărește realizarea unor sorturi de sticlă cu indice de refracție cît mai mare, pentru a permite micșorarea curburilor lentilelor și, în același timp, a aberațiilor de sfericitate și astigmatism.

Dispersia (variația indicelui de refracție cu lungimea de undă) se apreciază în funcție de domeniul spectral în care se utilizează sticla optică. Astfel, pentru sticlele utilizate în domeniul vizibil se utilizează dispersia medie:

$$\delta n = n_F - n_C. \tag{12.89}$$

Variațiile indicelui de refracție pentru două radiații învecinate din tabelul radiațiilor standardizate internațional se numesc dispersii parțiale. În calculele optice un interes deosebit prezintă *coeficientul de dispersie*, sau *numărul lui Abbé*

$$\nu_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \text{ sau } \nu_e = \frac{n_e - 1}{n_F - n_C} \tag{12.90}$$

unde $n_d - 1$ sau $n_e - 1$ se numește *refringența sticlei*. S-au obținut sticle optice avînd coeficientul de dispersie între 20,9 și 105 (sorturile curente între 26—82). Inversul coeficientului de dispersie reprezintă puterea dispersivă

$$K_d = 1/\nu_d, \; K_e = 1/\nu_e. \tag{12.91}$$

De asemenea, sînt utilizate în calculele optice, pentru eliminarea aberațiilor cromatice secundare, dispersiile parțiale relative

$$\frac{\Delta n}{n_F - n_C} \tag{12.92}$$

unde Δn reprezintă dispersiile parțiale, corespunzătoare celor 30 de regiuni spectrale dintre radiațiile standardizate.

Planul sticlelor optice (fig. 12.82) reprezintă sistemul de coordonate n_e, ν_e în care sticlele optice se situează în jurul părții mijlocii a diagonalei. Sticlele optice cu $\nu > 50$ se numesc sticle crown (conțin sub 3% PbO), iar cele cu $\nu < 50$ sticle flint (conțin peste 3% PbO).

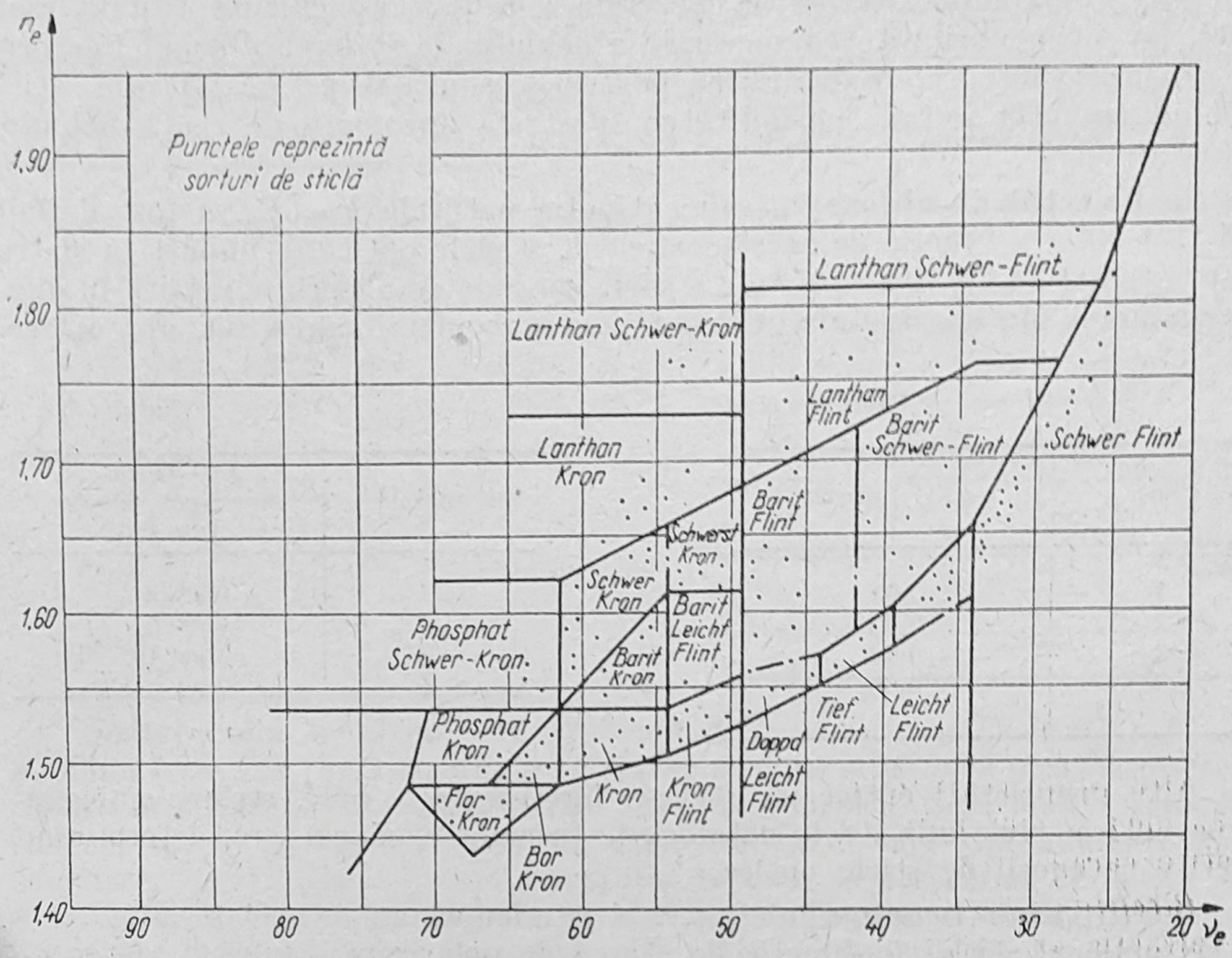


Fig. 12.82

Toleranțele admisibile pentru indicii de refracție ca și pentru coeficient de dispersie împart sticlele optice în patru clase de precizie (tabelul 12.10

Tabelul 12.10

Clasa de precizie	Δn_e	$\Delta \nu_e/\nu_e$
0	$\pm 2 \cdot 10^{-4}$	$\pm 0{,}2\%$
1	$\pm 3 \cdot 10^{-4}$	$\pm 0{,}3\%$
2	$\pm 5 \cdot 10^{-4}$	$\pm 0{,}5\%$
3	$\pm 10 \cdot 10^{-4}$	$\pm 0{,}8\%$

Transmisia fluxului luminos prin sticla optică este caracterizată de factorul de transmisie spectral

$$\mathcal{T}(\lambda) = \frac{(\Phi_{e\lambda})_{\mathcal{T}}}{\Phi_{e\lambda}}$$

unde $(\Phi_{e\lambda})_{\mathcal{T}}$ este fluxul emergent, iar $\Phi_{e\lambda}$ fluxul incident.

Factorul de transmisie spectral scade brusc spre lungimi de undă scurte (în ultravioletul apropiat): muchia de absorbție *UV* este caracterizată de două lungimi de undă la care gradul de transmisie spectral scade sub 50%, respectiv 10%, pentru grosimea sticlei de 10 mm.

Factorul de transmisie integral

$$\mathcal{T}_v = \frac{\int_0^\infty \Phi_{e\lambda} \mathcal{T}(\lambda) V(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty \Phi_{e\lambda} V(\lambda)\, d\lambda}$$

unde $\Phi_{e\lambda}$ reprezintă distribuţia spectrală a radiaţiei incidente (fluxul incident), iar $V(\lambda)$ sensibilitatea spectrală a ochiului în vederea diurnă. Factorul de transmisie integral se determină pentru grosimea sticlei de 100 mm, utilizînd un receptor avînd sensibilitatea spectrală apropiată de cea a ochiului uman.

Coeficientul de absorbţie, sau extincţia naturală $k = E_n$, a fost definit în § 12.1.1d. În funcţie de acest coeficient, sticlele optice se împart în patru clase (tabelul 12.11). Excepţie fac sticlele speciale cu absorbţie mărită în diferite domenii ale spectrului, utilizate pentru confecţionarea filtrelor optice.

Tabelul 12.11

Clasa	k_{max} [mm^{-1}]
1	0,01
2	0,02
3	0,04
4	0,06

Tabelul 12.12

Clasa	Birefrigenţa $\Delta n = \delta/s$ [nm/cm]
1	max 2
2	max 6
3	max 15

Alte proprietăţi optice ale sticlei: birefringenţa, bule, striuri, omogenitatea optică sînt indicate în cataloagele firmelor producătoare, determinînd diferite categorii de sticle optice.

Birefringenţa. În optotehnică acesta este fenomenul de variaţie a indicelui de refracţie al sticlei în funcţie de starea de polarizare a luminii, datorată tensiunilor remanente în urma răcirii. În general, sticla optică este supusă unei răciri lente, birefringenţa nedepăşind 15 nm/cm. În tabelul 12.12 este reprezentată clasificarea sticlelor optice în funcţie de birefringenţă. Birefringenţa se măsoară prin variaţia drumului optic (δ) la parcurgerea unei probe de sticlă în lungime de $s = 10$ mm

$$\Delta n = \delta/s. \tag{12.95}$$

Dacă se urmăreşte obţinerea unei birefringenţe mai pronunţate se supune sticla unei răciri rapide.

Bule şi incluziuni. Datorită compoziţiilor complexe ale sticlelor optice şi tehnologiilor de topire nu poate fi totdeauna evitată apariţia unor bule mici dispersate. Conţinutul de bule şi incluziuni (noduri, pietricele, cristale, asimilate ca bule în criteriile de apreciere) se caracterizează în două moduri:

— prin suprafaţa totală a bulelor cu diametru mediu peste 0,063 mm într-un volum de 100 cm^3 de sticlă; în funcţie de acest indicativ sticlele optice s-au împărţit în nouă grupe (tabelul 12.13).

— prin numărul total de bule cu diametrul 0,0315 mm — 0,1 mm; sticlele optice se împart în clase calitative, ordonate în două rînduri (tabelul 12.14).

La sticlele utilizate în construcţia elementelor optice numărul bulelor nu depăşeşte 25/100 cm^3.

Tabelul 12.13

Grupa	Suprafaţa totală a bulelor [mm²]/100 cm³
00	<0,016
0	0,016—0,032
1	0,032—0,063
2	0,063—0,125
3	0,125—0,25
4	0,25 —0,5
5	0,5 —1
6	1 —2
7	2 —4

Tabelul 12.14

Clasa de bule		Numărul de bule/100 cm³.
rîndul a	rîndul b	
a_0	b_0	<0,4
a_2	b_1	0,4 — 0,63
	b_2	0,63— 1
a_4	b_3	1 — 1,6
	b_4	1,6 — 2,5
a_6	b_5	2,5 — 4
	b_6	4 — 6,3
a_8	b_7	6,3 —10
	b_8	10 —16
a_{10}	b_9	16 —25
	b_{10}	25 —40
a_{12}	b_{11}	>40

Striurile sînt incluziuni transparente diferind prin indicele de refracţie şi avînd forme de corzi sau dungi; striurile se determină prin *meloda umbrelor (optica Schlieren)*, aplicată în diferite direcţii de inspectat. În mod normal sticlele optice nu prezintă striuri, dar sînt situaţii în care sînt admise striuri singulare, fine. După numărul direcţiilor în care se determină striurile, sticlele optice se împart în două clase (tabel 12.15). În general, direcţiile de analizare sînt perpendiculare pe suprafeţele exterioare superioare şi inferioare ale blocului de sticlă.

Tabelul 12.15

Clasa	Numărul de direcţii
1	2 (perpendiculare)
2	1

Tabelul 12.16

Clasa	$(\varphi/\varphi_0)_{max}$
1	1,0 menţinerea figurii de difracţie
2	1,0
3	1,1
4	1,2

Omogenitatea optică reprezintă constanţa indicelui de refracţie în volumul sticlei, proprietate caracteristică a sticlelor optice. Această omogenitate poate fi afectată de birefringenţă (datorată tensiunilor remanente), de bule şi incluziuni, de striuri şi de neomogenităţi structurale. Există două metode de apreciere a omogenităţii:

— determinarea separată a tuturor factorilor responsabili pentru neomogenitatea sticlei: birefrigenţă, bule şi incluziuni, striuri (această metodă se aplică în general la piese optice de dimensiuni mari);

— aprecierea efectului global al neomogenităţii optice; se determină limita de rezoluţie unghiulară φ a unui colimator printr-o probă de sticlă, diferitele clase de sticle optice fiind determinate de raportul $(\varphi/\varphi_0)_{max}$ conform tabelului 12.16, unde φ_0 este limita unghiulară de rezoluţie a colimatorului în aer.

Stabilitatea chimică a sticlei optice indică rezistența acesteia la efectul factorilor mediului pe o suprafață prelucrată optic ; se evaluează stabilitatea chimică la coroziune naturală și stabilitatea la acizi. Stabilitatea chimică diferă mult între sorturile de sticlă existente, datorită compozițiilor chimice diferite ale acestora.

Tabelul 12.17

Clasa de stabilitate	Timpul de coroziune naturală [ore]	Observații
1	peste 20 de ore	fără depuneri datorate coroziunii naturale
2	între 5—20 ore	depunere omogenă datorată coroziunii naturale
3	sub 5 ore	

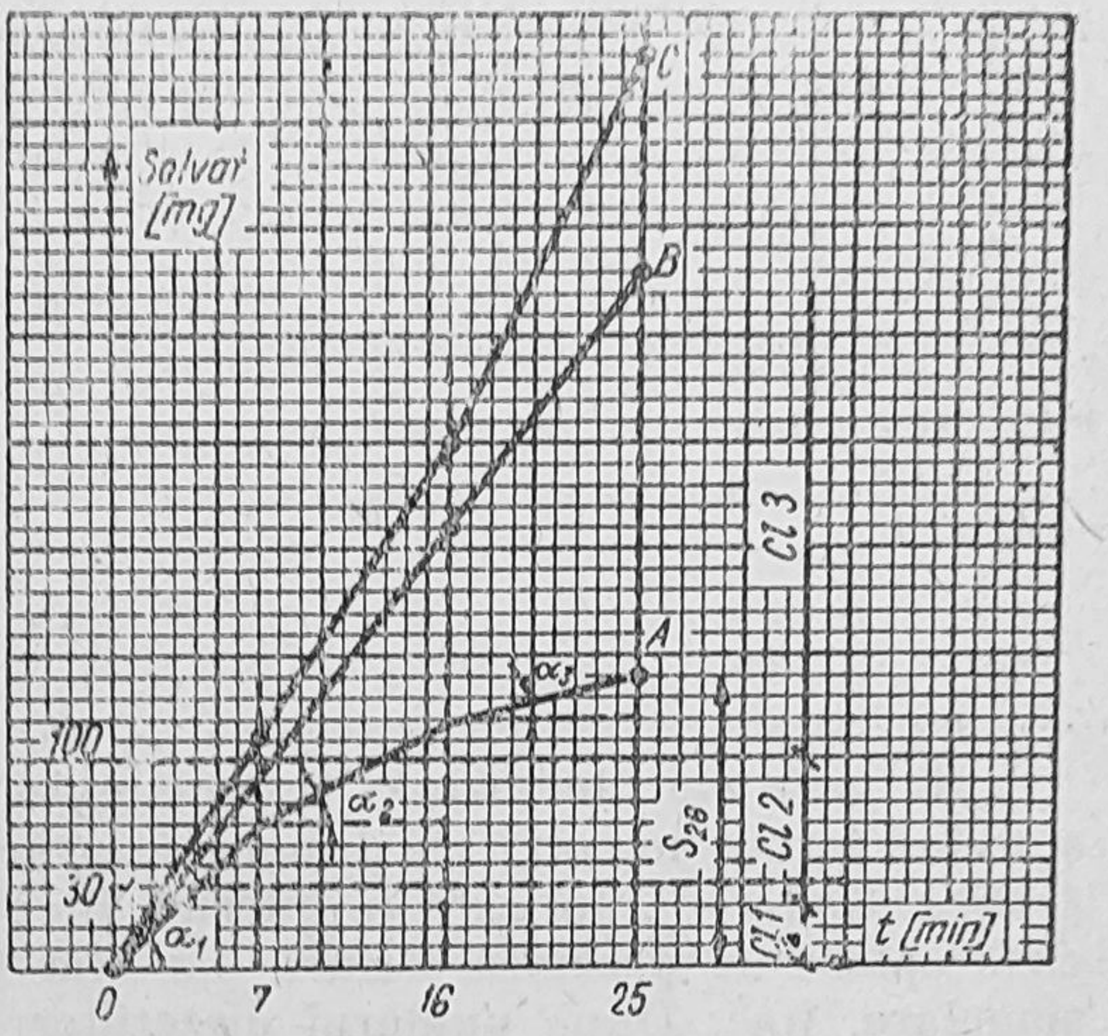


Fig. 12.83

1°. *Stabilitatea la coroziune naturală.* Suprafețele de sticlă proaspăt polisate sînt expuse la coroziune naturală într-o cameră cu climă controlată, la 50°C și umiditate relativă 85%. După timpii de expunere 5 ore și 20 ore se observă începutul procesului de coroziune naturală cu ajutorul unui stereomicroscop cu mărirea obiectivului 25 : 1. Sticlele rezistente nu prezintă modificări ale suprafeței după 20 ore, în schimb sticlele instabile prezintă deja în primele 5 ore o depunere datorată coroziunii naturale.

Clasificarea sticlei optice după stabilitatea la coroziune naturală este dată în tabelul 12.17.

2°. Stabilitatea la acizi se stabilește urmărind atacul în timp cu soluție $0{,}1n$ HNO_3 al suprafeței polisate a sticlei : timp de 25 minute, la 25°C se spală 4 ml sticlă solidă granulară în 25 ml soluție $0{,}1n$ HNO_3 ; la intervalele de 7 min și de două ori la 9 minute se determină cantitățile de oxid ce provin din acid ; se calculează vitezele medii de atac (solvatul/minut în cele trei faze) și solvatul total s_{25} în 25 minute. În figura 12,83 se disting trei situații: viteza de atac scade în decursul celor trei faze (A), rămîne constantă (B) sau crește (C). Exemple de variații procentuale ale vitezei medii de atac între fazele a treia și întîi : $\Delta v = +3\%$ (C) ; $\Delta v = 0\%$ (B) ; $\Delta v = -93\%$ (A). În tabelul 12.18 este dată clasificarea sticlelor optice după stabilitatea la acizi.

Tabelul 12.18

Clasa	Stabilitatea	Solvat [mg/25 min]
1	bună	0— 30
2	medie	30—100
3	slabă	peste 100

Proprietățile termice ale sticlelor optice : coeficientul de dilatație, temperatura de transformare, conductivitatea termică, căldura specifică sînt tolerate între limite admisibile pentru fiecare sort de sticlă în cataloagele firmelor producătoare. Coeficientul de dilatare liniară α [grad^{-1}] depinde de temperatură. Pentru a ține seama de cele mai diferite domenii de temperatură, se dau coeficienții de dilatare pentru temperaturi cuprinse între (-60°C ; 20°C) și (20°C ; 120°C). În unele cataloage se dau coeficienții $\alpha_{20/20}$ și m cu care se pot calcula coeficienții de dilatare pentru temperaturi între -60° ; +400°C

$$\alpha_{20/t} = \alpha_{20/20} + m(t - 20). \tag{12.96}$$

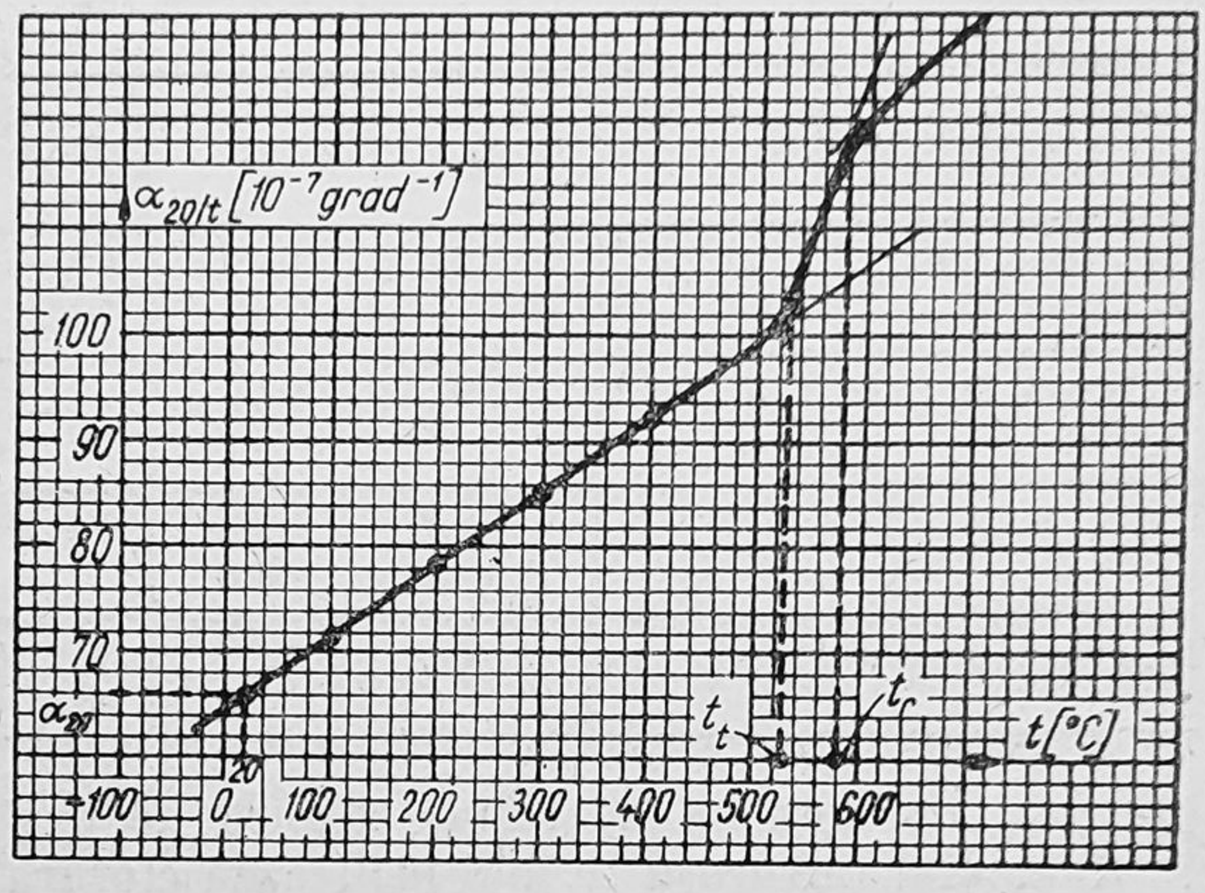


Fig. 12.84

În figura 12.84 se reprezintă variația coeficientului de dilatare termică cu temperatura. Temperatura de transformare t_t la care sticla trece din starea solidă în starea plastică (α crește rapid) și temperatura de revenire t_r la care se frînează creșterea lui α sînt importante pentru detensionarea pieselor optice (încălzirea piesei pînă la o temperatură $t \in (t_t, t_r)$ și răcire lentă).

Conductivitatea termică λ caracterizează capacitatea sticlei de a tansfera căldura, printr-o secțiune de 1 m^2 în timp de 1 oră. Și conductivitatea termică depinde de temperatură : în cataloagele de sticle optice se indică λ la -50°C, 0°C, 20°C și 50°C, prin fluxul de căldură kcal/m^{2}h la variația de 1 grd/m. Ca ordin de mărime : $\lambda \simeq 0{,}6$ kcal$\cdot$h$^{-1}\cdot$m$^{-1}\cdot$grd^{-1}. Căldura masică a sticlelor optice are ordinul de mărime : $c \simeq 920$ J/kg$\cdot$K.

Proprietățile mecanice ale sticlelor optice indicate în cataloage sînt : densitatea masică, coeficientul de tensiune optică, modulul de elasticitate (Young) E, modulul transversal G, coeficientul Poisson μ. Valorile aproximative ale acestor parametri sînt : $\rho = 2{,}5 \div 6$ g/cm^3 ; $E = 5\,500 - 11\,000$ daN/mm^2 ; $G = 2\,000 - 4\,500$ daN/mm^2 ; $\mu = 0{,}2 - 0{,}3$. E și G se determină prin metoda măsurării vitezei undelor ultrasonice longitudinale și transversale, iar μ se calculează cu relația : $E = 2G(1 + \mu)$.

Coeficientul de tensiune optică B face legătura între birefrigență $\Delta n = \delta/s$ și diferența între eforturile unitare principale normale $\sigma_1 - \sigma_2$: $B = \Delta n/(\sigma_1 - \sigma_2)$ [nm$\cdot$cm$^{-1}\cdot$daN$^{-1}\cdot$mm^2]. În general $B > 0$, dar există sorturi de sticlă pentru care B este negativ (de exemplu, СТФ 3 are $B = -1{,}35$).

Pentru radiația $\lambda = 550$ nm, coeficientul de tensiune optică are în general valori cuprinse între 0,8—4 nm$\cdot$cm^{-1}/daN$\cdot$mm^{-2}.

12.7.2. Alte materiale optice

Pentru domeniile ultraviolet și infraroșu se utilizează cristale optice, cele mai frecvent folosite fiind indicate în tabelul 12.19. În plus, în domeniul ultraviolet mai sînt utilizate ca materiale optice sarea gemă, bromura de potasiu, halogenura de taliu, clorura de argint cristalizată ; de asemenea, în domeniul infraroșu se mai utilizează clorura de potasiu, iodura de potasiu, iodura de sodiu. De asemenea, cuarțul poate fi înlocuit cu sticla de cuarț (silicoasă) care nu prezintă birefringență, lucrînd cu succes din ultraviolet de la $\lambda > 200$ nm, pînă în infraroșu $\lambda < 2{,}7$ μm. Caracteristicile optice ale sticlei de cuarț sînt : $n_e = 1{,}46$; $\nu_e = 67{,}8$.

Tabelul 12.19

Cristale optice	n_e	ν_e	Domeniu de utilizare λ	Observații
Fluorina CaF_2	1,435	95,2	UV : 125—200 nm IR : <9 μm	foarte casant
Fluorură de litiu LiF	1,393	98,5	UV : 105—200 nm IR : <6 μm	
Cuarț SiO_2 (e) (o)	1,554 1,545	68,6 69,8	UV	birefringent
Fluorură de bariu BaF	1,46	105	UV : <200 nm IR : <13 μm	

S-au mai făcut încercări de utilizare și a altor materiale optice : cu safir artificial s-a realizat un obiectiv tip Petzval 1 : 1,5 ; cu alaun de potasiu și alaun de amoniu s-au realizat obiective de microscop apocromate.

Materialele plastice transparente sînt utilizate ca înlocuitoare ale sticlelor optice la realizarea unor componente în sistemele de iluminare, lentile Fresnel, în domeniul *U.V.*, datorită absorbției reduse. Cele mai utilizate materiale plastice sînt : plexiglasul, care înlocuiește sticla crown și triolitul, care înlocuiește sticla flint. Proprietățile fizice ale materialelor plastice fac dificilă prelucrarea acestora prin așchiere, dar permit presarea sau turnarea.

13. FORMAREA IMAGINILOR PRIN SISTEME OPTICE. OPTICA GEOMETRICĂ TEHNICĂ

13.1. Noțiunea de rază de lumină. Ecuația eiconalului

Raza de lumină reprezintă un tub de cîmp electromagnetic, în domeniul lungimilor de undă $\lambda = 2\pi v/\omega \simeq 0{,}5$ μm, înfășurător într-un spațiu foarte îngust al vectorului Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Dacă se încearcă separarea prin

diafragmare a unei raze de lumină, se determină o limită sub care nu se poate trece datorită fenomenului de difracție : unghiul de difracție $\varepsilon = \lambda/D$ (unde λ este lungimea de undă, iar D diametrul diafragmei (orificiului)) reprezintă abaterea care „alterează" noțiunea de rază și propagarea rectilinie a luminii în mediu omogen și izotrop. Se observă că unghiul de difracție crește cînd „diametrul" razei scade, dar cum este foarte mic în cazurile obișnuite, noțiunea de rază este justificată, în optica tehnică geometrică, fiind foarte larg aplicată la explicarea formării imaginilor prin aparate optice.

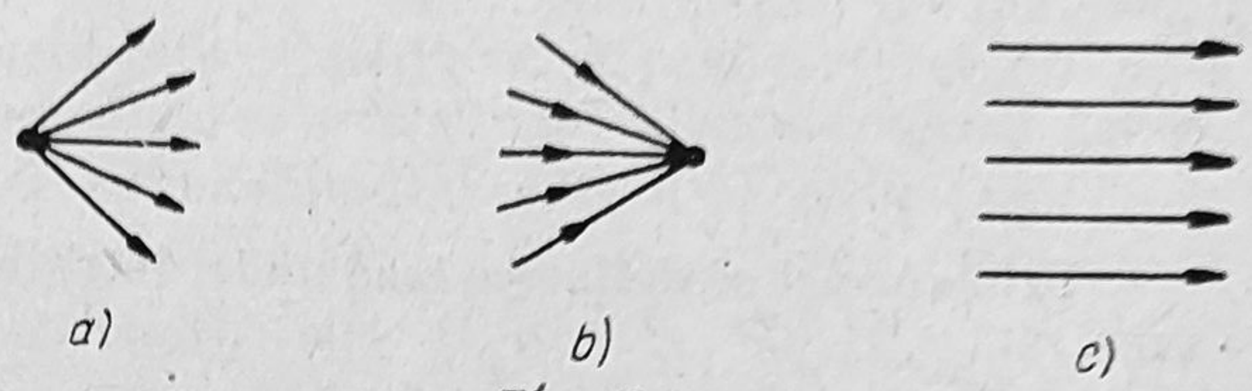


Fig. 13.1

Conceptul idealizat de rază de lumină este riguros realizat cînd $\lambda \to 0$, în acest caz $\varepsilon \to 0$.

Fasciculul de raze reprezintă mulțimea de raze care suferă același fenomen. Fasciculul se numește omocentric (sau izogen, sau conic) cînd toate razele trec printr-un punct — vîrful fasciculului. Se deosebesc (fig. 13.1) :

a) fascicule conice divergente ;

b) fascicule conice convergente ;

c) fascicule conice cilindrice sau telecentrice, la care vîrful fasciculului se află la infinit.

Introducînd în ecuațiile lui Maxwell (Ia), (Ib), (IIa) și (IIb) din § 2.2, scrise pentru mediul ideal, expresiile undelor armonice

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[\mathrm{i}(kl(\mathbf{r}) - \omega t)] ; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \exp[\mathrm{i}(kl(\mathbf{r}) - \omega t)]$$

după simplificarea cu factorul exponențial se obține

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_0 + \mathrm{i}K \nabla l(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0 &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon \mathbf{E}_0 \\ \nabla \mathbf{E}_0 + \mathrm{i}K \mathbf{E}_0 \nabla l(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_0 + \mathrm{i}K \nabla l(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_0 &= \mathrm{i}\omega\mu \mathbf{H}_0 \\ \nabla \mathbf{H}_0 + \mathrm{i}K \nabla l(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

Împărțind prin $\mathrm{i}K$, înlocuind $\frac{1}{K} = \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$ și ținînd seama că λ este foarte mic, termenii $\nabla \times \mathbf{H}_0/K$, $\nabla \mathbf{E}_0/K$, $\nabla \times \mathbf{E}_0/K$, $\nabla \mathbf{H}_0/K$ pot fi neglijați, ceea ce permite scrierea ecuațiilor

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}_0 \times \nabla l(\mathbf{r}) &= \varepsilon c \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{E}_0 \nabla l(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{E}_0 \times \nabla l(\mathbf{r}) &= -\mu c \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_0 \times \nabla l(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

Eliminînd $\mathbf{H}_0$ între prima și a treia ecuație și înlocuind $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$; $\varepsilon\mu c^2 = (c/v)^2 = n^2$ se obține produsul vectorial dublu

$$[\mathbf{E}_0 \times \nabla l(\mathbf{r})] \times \nabla l(\mathbf{r}) = -n^2 \mathbf{E}_0$$

care se mai poate scrie

$$[\mathbf{E}_0 \cdot \nabla l(\mathbf{r})] \cdot \nabla l(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0 [\nabla l(\mathbf{r})]^2 = -n^2 \mathbf{E}_0.$$

Ţinînd seama de prima ecuaţie din (13.2) şi simplificînd cu $\mathbf{E}_0$, se obţine ecuaţia eiconalului

$$[\nabla l(\mathbf{r})]^2 = n^2 \tag{13.3}$$

sau

$$(\partial l/\partial x)^2 + (\partial l/\partial y)^2 + (\partial l/\partial z)^2 = n^2(x, y, z).$$

Prin eiconal se defineşte faza undei într-un anumit punct şi la un anumit moment

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = Kl(\mathbf{r}) - \omega t$$

dar din punctul de vedere al opticii geometrice este mai avantajoasă utilizarea drumului optic $l(\mathbf{r})$ în ecuaţia (13.3) în locul funcţiei $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Suprafeţele $\varphi(\mathbf{r}, t) = \text{const.} \rightarrow l(\mathbf{r}) = \text{const.}$ reprezintă suprafeţe echifaze, iar razele de lumină sînt traiectorii ortogonale la suprafeţele echifaze. Dacă se consideră două puncte de pe aceeaşi rază, situate pe două suprafeţe echifaze vecine (fig. 13.2), atunci variaţia vectorului de poziţie $d\mathbf{r}$ se poate exprima în funcţie de distanţa elementară ds : $d\mathbf{r} = \mathbf{u} \cdot ds$, unde $\mathbf{u}$ este vectorul unitar al tangentei la raza de lumină. Din ecuaţia eiconalului rezultă $|\Delta l| = n$ sau, ţinînd seama de vectorul unitar al razei,

$$\nabla l(\mathbf{r}) = n\mathbf{u} \tag{13.4}$$

ceea ce reprezintă ecuaţia razei de lumină.

Drumul optic elementar se obţine făcînd derivata în raport cu distanţa parcursă pe raza de lumină : $dl/ds = \nabla l(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}/ds = n\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = n$, adică

$$dl(\mathbf{r}) = n\, ds. \tag{13.5}$$

Considerînd două puncte P_1 şi P_2 pe aceeaşi rază de lumină, drumul optic între P_1 şi P_2 este

$$(P_1P_2) = \int_{P_1}^{P_2} n\, ds = l(\mathbf{r}_{P_2}) - l(\mathbf{r}_{P_1}), \tag{13.6}$$

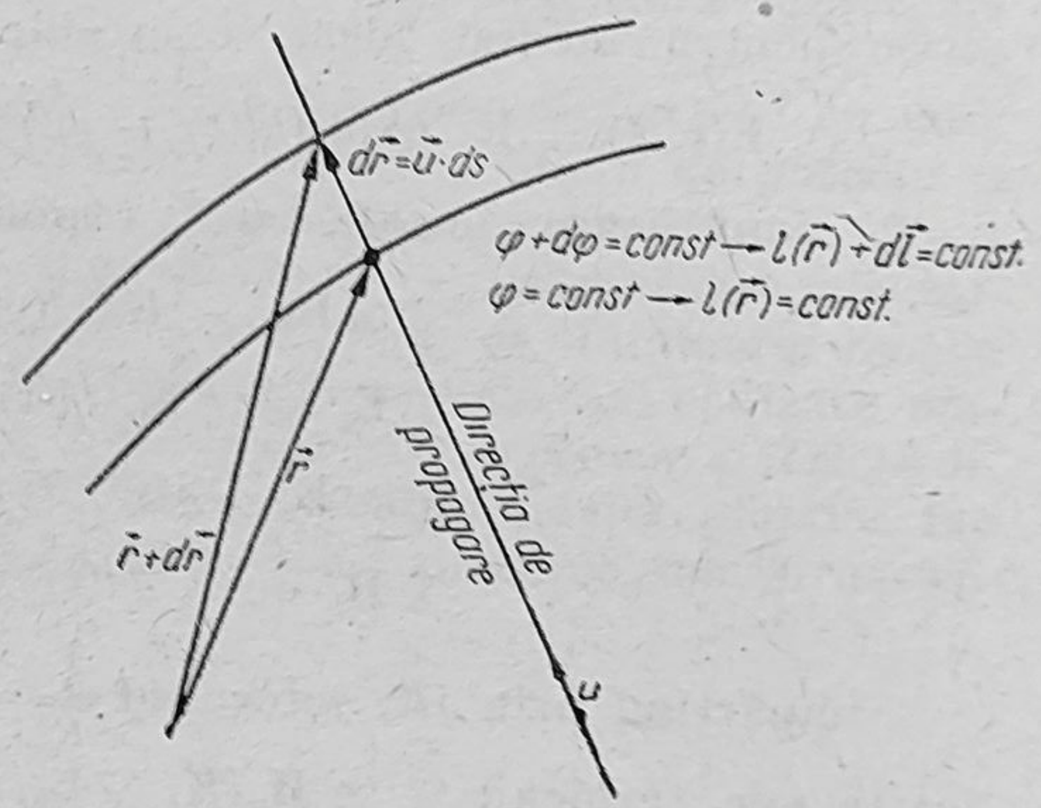


Fig. 13.2

În expresia drumului optic elementar, înlocuind indicele de refracţie $n = c/v$, rezultă

$$dl = (c/v)ds = c\, dt \tag{13.7}$$

iar drumul optic între două puncte pe aceeaşi rază este

$$(P_1P_2) = c \int_{P_1}^{P_2} dt \tag{13.8}$$

adică drumul optic este egal cu drumul pe care lumina l-ar parcurge în vid în timpul necesar propagării de la P_1 la P_2.

13.2. Teorema lui Fermat

În cadrul opticii geometrice poate fi considerat ca postulat fundamental principiul formulat de Fermat, potrivit căruia drumul optic pe care îl parcurge o rază între două puncte este minim (sau timpul necesar luminii pentru a se propaga între două puncte este minim); acest principiu poate fi verificat experimental, din el deducîndu-se celelalte principii ale opticii geometrice: propagarea rectilinie a luminii, reversibilitatea drumului razelor de lumină, precum și legile refracției și reflexiei. Cum acest principiu poate fi dedus din ecuația eiconalului, el devine o simplă teoremă.

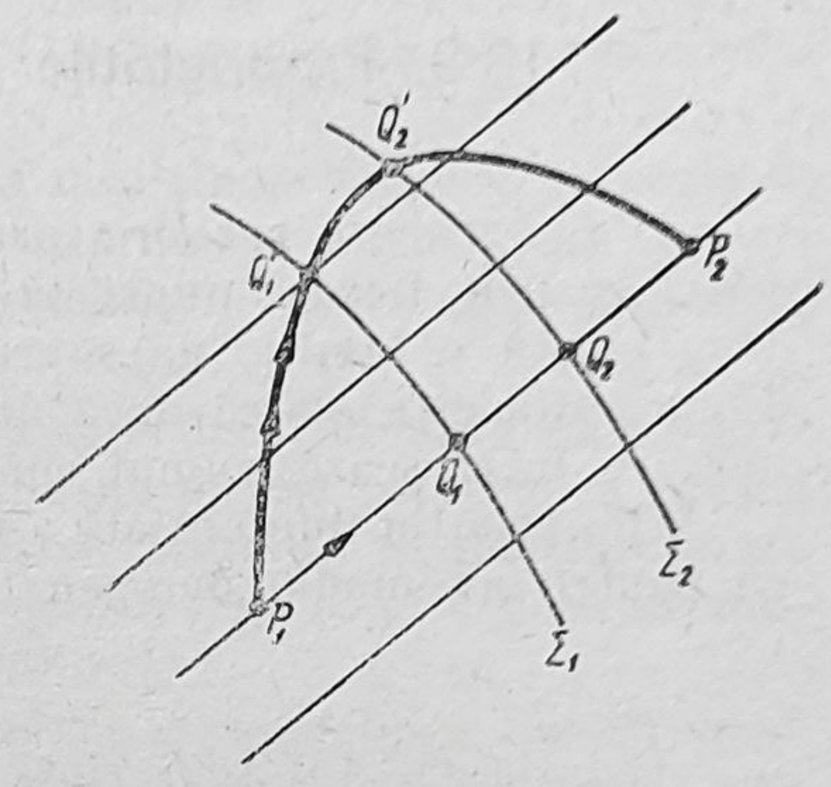


Fig. 13.3

Comparăm drumul optic între două puncte de-a lungul unei raze ($P_1Q_1Q_2P_2$) și de-a lungul unei curbe oarecare ($P_1Q_1'Q_2'P_2$), conform reprezentării din figura 13.3. Aplicînd rotorul ecuației (13.4) rezultă ecuația vectorială a razei

$$\nabla \times (n\mathbf{u}) = 0. \qquad (13.9)$$

Calculînd fluxul acestui rotor printr-o suprafață S mărginită de o curbă Γ și ținînd seama de relația lui Stokes, rezultă

$$\int_{S(\Gamma)} \nabla \times (n\mathbf{u})\, d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} = 0, \qquad (13.10)$$

ceea ce implică faptul că $\int_{P_1}^{P_2} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r}$ nu depinde de drumul de integrare. Fie un fascicul de raze care trec prin suprafețele echifaze Σ_1, Σ_2 care corespund unei diferențe de drum optic dl. Aplicînd relația (13.9) pentru curba închisă $(Q_1Q_2Q_2'Q_1'Q_1)$ găsim

$$\int_{Q_1}^{Q_2} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} + \int_{Q_2}^{Q_2'} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} - \int_{Q_1'}^{Q_2'} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} + \int_{Q_1'}^{Q_1} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} = 0.$$

Ținînd seama că de-a lungul suprafețelor echifaze $\mathbf{u} \perp d\mathbf{r}$ sau $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 0$, obținem

$$\int_{Q_1}^{Q_2} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} = \int_{Q_1'}^{Q_2'} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r}. \qquad (13.11)$$

Cum în lungul razei $n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} = n\, ds$ și, conform definiției produsului scalar, $n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \leqslant n\, dr = n\, ds$, rezultă

$$\int_{Q_1}^{Q_2} n\, ds = \int_{Q_1'}^{Q_2'} n\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \leqslant \int_{Q_1'}^{Q_2'} n\, ds,$$

ceea ce poate fi extins la întregul interval P_1P_2

$$\int_{(P_1Q_1Q_2P_2)} n\,\mathrm{d}s \leqslant \int_{(P_1Q_1'Q_2'P_2)} n\,\mathrm{d}s\,; \tag{13.12}$$

așadar, drumul optic este mai lung pe orice altă curbă decît pe curba parcursă de lumină (teorema lui Fermat).

13.3. Proprietățile generale ale razelor de lumină

a) *Congruența razelor*: proprietatea de a umple o porțiune din spațiu astfel ca prin fiecare punct să treacă cîte o rază. Congruența este normală dacă există o familie de suprafețe care intersectează normal fiecare rază. Congruența este oblică dacă nu există proprietatea enunțată. În optica geometrică interesează numai congruența normală.

Din ecuația diferențială a razei de lumină scrisă sub forma (13.9) rezultă că pentru un mediu omogen $n = \text{const}$.

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0. \tag{13.13}$$

Relația (13.13) reprezintă condiția necesară și suficientă ca să existe congruența normală. În acest caz razele sînt traiectorii rectilinii (lumina se propagă în linie dreaptă).

b) *Proprietăți focale.* Fie o suprafață echifază $l(\mathbf{r}) = \text{const.}$, pe care alegem un sistem de axe curbilinii (v, w), ca în figura 13.4. Prin $Q(v, w)$ trece raza de congruență C, iar prin $Q_1(v + \mathrm{d}v, w + \mathrm{d}w)$ trece raza foarte apropiată C_1. Între aceste două raze există puncte focare, dacă distanța între raze devine oricît de mică, astfel încît

$$\mathbf{r}(v, w, s) = \mathbf{r}(v + \mathrm{d}v, w + \mathrm{d}w, s + \mathrm{d}s).$$

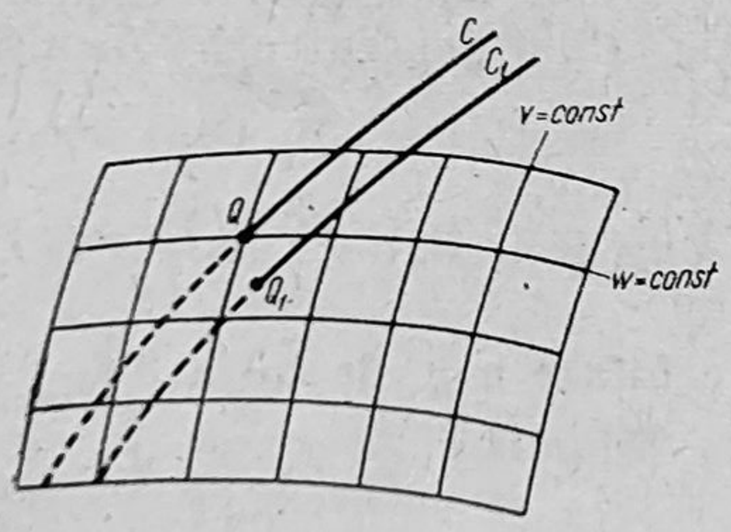


Fig. 13.4

Dezvoltînd în serie Taylor în jurul punctului (v, w, s) rezultă ecuația de determinare a punctelor focare

$$\mathbf{r}_v' \cdot \mathrm{d}v + \mathbf{r}_w' \cdot \mathrm{d}w + \mathbf{r}_s' \cdot \mathrm{d}s = 0 \tag{13.14}$$

unde $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}s = \mathbf{u}$.

Ecuația (13.14) poate fi pusă și sub forma produsului vectorial mixt

$$(\mathbf{r}_v', \mathbf{r}_w', \mathbf{u}) = 0. \tag{13.15}$$

care reprezintă condiția de coplanaritate a vectorilor $\mathbf{r}_v', \mathbf{r}_w', \mathbf{u}$.

Dacă $\mathbf{r}(s)$ este un polinom de gradul m, ecuația spațială (13.15) dă un număr de $3m - 1$ soluții (focare).

Particularizare. Cînd curbele de congruență sînt drepte ($m = 1$), numărul de focare este 2; așadar, pe fiecare rază dintr-o congruență normală rectilinie există două focare. Pentru toate valorile posibile (v, w) focarele descriu o suprafață focală (caustică). Orice plan tangent la suprafața focală constituie plan focal.

13.4. Limitele de valabilitate ale opticii geometrice. Principiile opticii geometrice

a) Consideraţiile anterioare s-au referit numai la radiaţiile monocromatice produse de un oscilator armonic sau de un „set" de astfel de oscilatori cu aceeaşi frecvenţă şi fază iniţială. Însă, orice sursă are dimensiuni, fiind formată dintr-o mulţime de oscilatori care emit într-un domeniu de frecvenţe.

b) Ecuaţia eiconalului (13.3) s-a obţinut neglijînd termenii $\nabla \times \mathbf{H}_0/K$, $\nabla \mathbf{E}_0/K$, $\nabla \times \mathbf{E}_0/K$, $\nabla \mathbf{H}_0/K$ din ecuaţiile (13.2), deoarece s-a considerat $\lambda \simeq 0$.

Neglijările respective sînt justificate dacă mai ţinem seama că mărimile variaţiilor lui $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ sînt mici în raport cu valorile lor medii. Însă, aceste condiţii pentru justificarea aproximărilor sînt violate la limita umbrei, pentru că în aceste zone înguste intensitatea variază rapid.

De asemenea, în vecinătatea punctelor în care densitatea de intensitate luminoasă prezintă maxime ascuţite (focare) nu ne putem aştepta ca optica geometrică să descrie în mod corect comportarea cîmpului. O abordare mult mai eficace a distribuţiei de intensitate în asemenea regiuni este dată de metodele bazate pe considerarea difracţiei luminii.

In final trebuie subliniat faptul că simplitatea modelului opticii geometrice provine din faptul că în general cîmpul se comportă local ca o undă plană. La lungimi de undă corespunzătoare domeniului optic regiunile pentru care acest model geometric simplu nu este adecvat sînt mai degrabă excepţii decît fac parte din regulă ; de fapt, pentru majoritatea problemelor optice, optica geometrică furnizează cel puţin un punct de plecare pentru investigaţii mai rafinate.

La baza opticii geometrice se află următoarele principii :

Principiul propagării rectilinii a luminii : într-un mediu omogen lumina se propagă în linie dreaptă pînă la întîlnirea unui obstacol sau a unui alt mediu.

Principiul independenţei propagării razelor de lumină : razele de lumină necoerentă care trec printr-un punct, întretăindu-se, nu se influenţează reciproc.

Principiul reversibilităţii drumului razelor : o rază care parcurge un sistem optic într-un sens urmează acelaşi drum şi cînd este dirijată, prin sistemul optic, în sens invers, dacă celelalte condiţii rămîn neschimbate.

Principiul lui Fermat : drumul optic parcurs de o rază de lumină între două puncte este un extremum în raport cu oricare alt drum geometric posibil.

Aceste principii permit construcţia opticii geometrice ca un capitol independent al fizicii. Bineînţeles, întrucît optica geometrică este, aşa cum s-a arătat, o aproximaţie a opticii electromagnetice, toate aceste principii, devin teoreme ale teoriei cîmpului electromagnetic.

Din principiul lui Fermat rezultă, ca teoreme, legile reflexiei şi refracţiei. Prima teoremă afirmă că într-un mediu ideal razele incidentă, reflectată

și transmisă, cît și normala la suprafața de separație sînt coplanare. A doua teoremă, a reflexiei, stabilește egalitatea unghiului de incidență cu unghiul de reflexie, iar cea de a treia, invariantul lui Descartes

$$n_1 \sin i = n_2 \sin i'. \qquad (13.16)$$

Așa cum s-a arătat în capitolul 6, aceste teoreme se pot obține din ecuațiile lui Maxwell.

Este bine cunoscut faptul că suprafața liniștită a apei sau o suprafață metalică lustruită reflectă un fascicul luminos, dar o foaie de hîrtie sau o suprafață metalică prelucrată mai puțin pretențios (semifinisată) reflectă același fascicul luminos mai mult sau mai puțin în toate direcțiile (reflexie difuză). Diferența dintre reflexia difuză și cea „specular㓠(tip oglindă) se datorește gradului diferit de netezire al suprafeței.

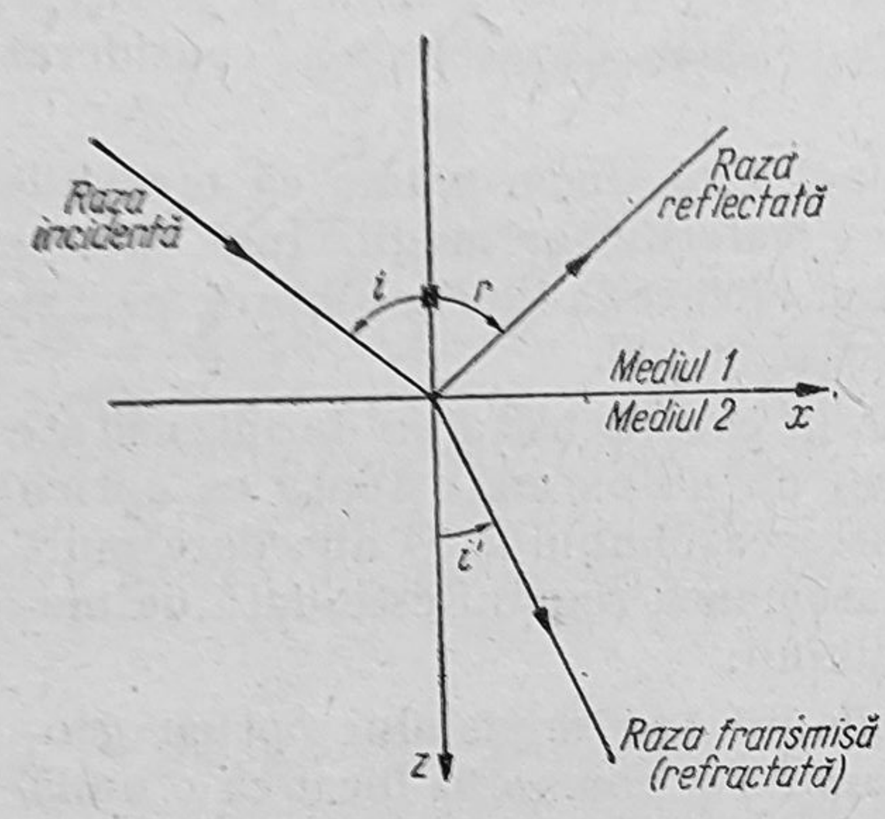


Fig. 13.5

Prima condiție de reflexie specular㠎: adîncimea medie R_a a iregularităților suprafeței reflectătoare trebuie să fie mult mai mică decît lungimea de undă a radiației reflectate: $R_a \ll \lambda$. De exemplu, o suprafață metalică cu rugozitate relativ mare $R_a = 6{,}3$ μm nu poate reflecta decît difuz lumina, în schimb reflectă foarte bine microundele cu $\lambda \simeq 0{,}5$ cm.

A doua condiție de reflexie: dimensiunea D, cea mai mică a suprafeței reflectante trebuie să fie mult mai mare decît lungimea de undă a radiației: $D \gg \lambda$. De exemplu, o oglindă de dimensiuni normale utilizată în construcția aparatelor optice reflectă perfect lumina vizibilă; în schimb pusă în fața unui fascicul de unde radio (să presupunem $\lambda = 10$ m), radiația va fi difractată, „ocolind“ oglinda.

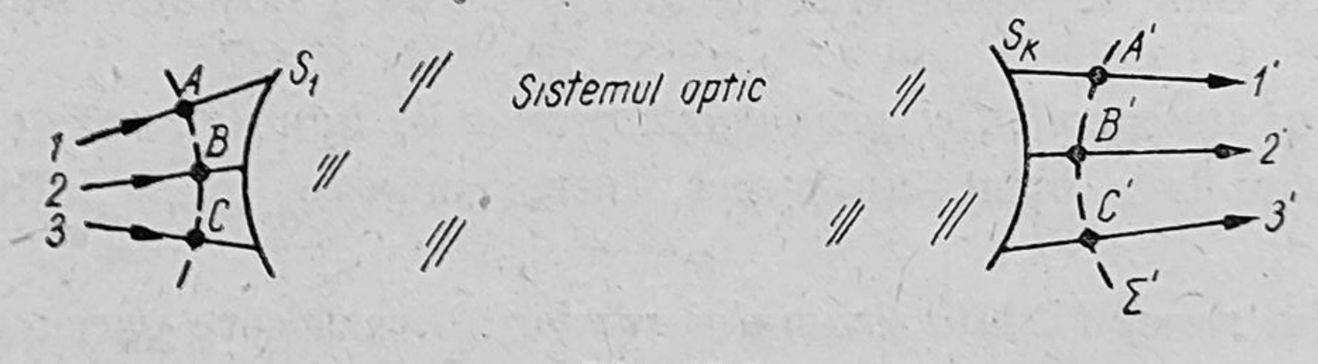


Fig. 13.6

Teorema Malus-Dupin. Dacă din mediul aflat în fața sistemului optic pornește un fascicul de raze normale la suprafața echifază Σ, după trecerea fasciculului prin mai multe suprafețe de separare S_1, S_2, ..., S_k ale sistemului optic (adică după mai multe reflexii și refracții) se obține fasciculul emergent și suprafața echifază Σ' (fig. 13.6).

Teorema lui Malus stabilește că drumurile optice corespunzătoare fiecărei raze între cele două suprafețe echifaze Σ și Σ' sînt egale, adică

$$(L) = \Sigma n \cdot l = (AA') = (BB') = (CC') = \ldots = \text{const.}$$

$$\text{sau } \mathrm{d}(\Sigma nl) = 0.$$

Această teoremă se deduce aplicînd principiul Fermat.

13.5. Reflexia externă și reflexia internă. Fibre optice.

a) *Reflexia externă* reprezintă cazul reflexiei la suprafața de separație între două medii caracterizate prin $n_1 < n_2$.

Un caz important este acela în care intensitatea cîmpului electric al radiației incidente este paralelă cu planul de incidență și $r_p = 0$. În acest caz, $i + i' = \pi/2$, iar unghiul de incidență corespunzător se numește unghi Brewster ($i = i_B$) și se determină din legea refracției

$$\operatorname{tg} i_B = n_2/n_1. \tag{13.17}$$

Așa cum s-a arătat în § 6.4, pentru această incidență radiația cu **E** paralel cu planul de incidență este transmisă complet ($\mathcal{T} = 1$, $\mathcal{R} = 0$). O aplicație deosebit de importantă în tehnică este construcția ferestrelor tuburilor laser.

b) *Reflexia internă* corespunde cazului cînd $n_1 > n_2$. Așa cum s-a arătat în §6.5 există un unghi de incidență limită

$$i_{max} = l = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \tag{13.18}$$

pentru care unghiul de refracție ia valoarea $i' = \pi/2$. După cum s-a văzut, pentru unghiul $i > l$, rezultă $\mathcal{R} = 1$, fenomen denumit reflexie totală. O aplicație tehnică deosebit de importantă a acestui fenomen o constituie fibrele optice.

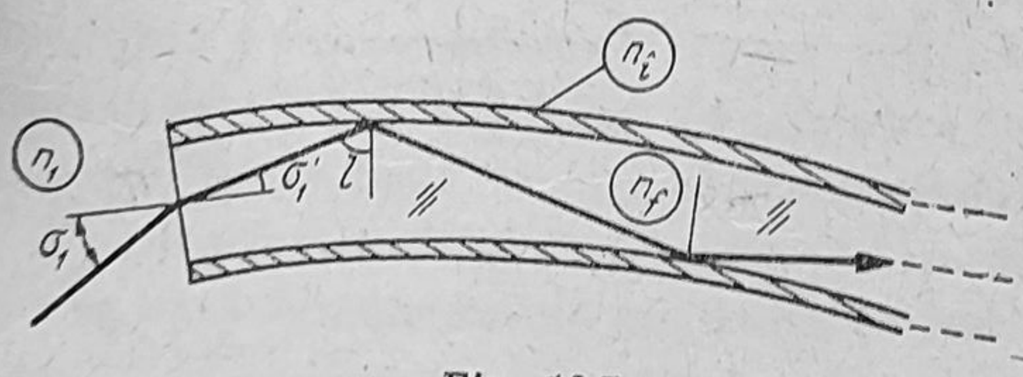


Fig. 13.7

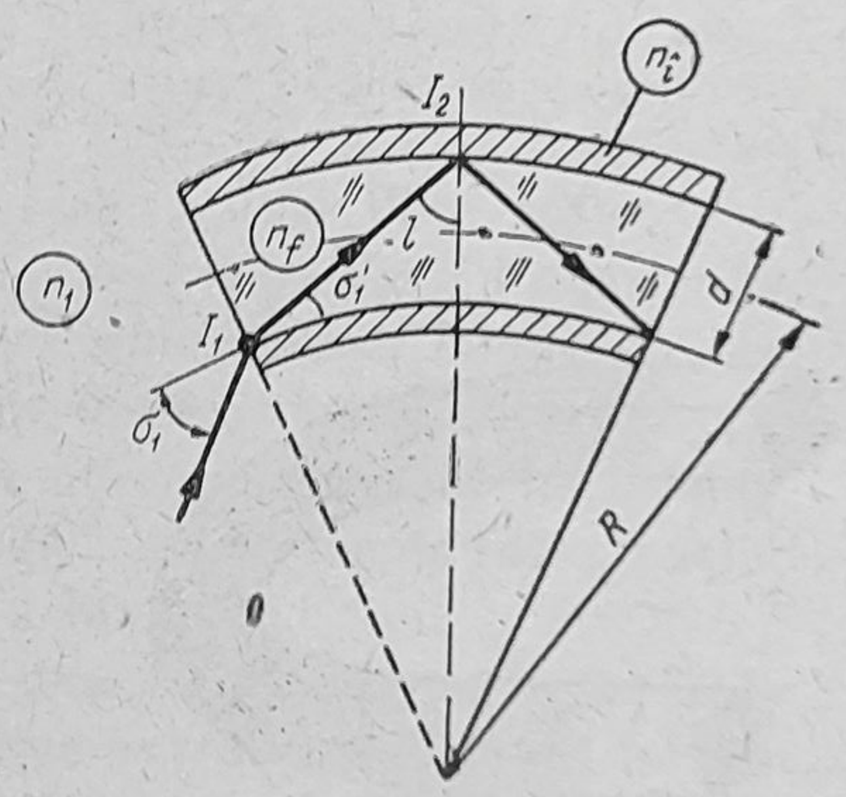


Fig. 13.8

Fibre optice. Lumina poate fi transmisă dintr-un punct într-altul prin intermediul unei fibre transparente din plastic, învelită fie într-un material translucid, fie într-un material cu indice de refracție mult mai mic decît al plasticului (fig. 13.7).

Apertura (deschiderea) fibrei optice $A = n_1 \sin \sigma_1$ se poate calcula ținînd seama de indicele de refracție al materialului fibrei n_f și de indicele de refracție al învelișului n_i

$$A = n_1 \sin \sigma_1 = n_f \sin \sigma_1'. \tag{13.19}$$

Condiția de reflexie totală : $\sin l = n_i/n_f$ și relația $\sigma_1' + l = \pi/2$ duc la expresia

$$A = n_f[1 - (n_i/n_f)^2]^{1/2} \qquad (13.20)$$

valabilă pentru curburi mici ale fibrei optice.

Este evident, însă, că raza de curbură R a fibrei optice influențează asupra modului de transmitere a radiației prin fibra optică de diametru d (fig. 13.8). Se poate admite că mediul este practic neabsorbant și izotrop. Considerînd două reflexii succesive în I_1 și I_2, se poate scrie relația sinusurilor în triunghiul OI_1I_2

$$\frac{R - d/2}{\sin l} = \frac{R + d/2}{\sin(\sigma_1' + \pi/2)};$$

rezultă, ținînd seama de legea refracției în I_1,

$$A = n_1 \sin \sigma_1 = n_f \sin \sigma_1' = n_f[1 - (n_i/n_f)^2 (R + d/2)^2 \cdot (R - d/2)^{-2}]^{1/2}. \qquad (13.21)$$

Se observă că apertura scade odată cu mărirea raportului d/R. Se poate determina raza minimă de curbură a unei fibre optice făcînd la limită $A \to 0$. Rezultă

$$(d/R)_{max} = 2(n_f - n_i)/(n_f + n_i) \text{ sau } R_{min} = (d/2) \cdot (n_f + n_i)/(n_f - n_i). \qquad (13.22)$$

Se pot transmite imagini (nu numai flux luminos) dintr-un loc într-altul utilizînd un mănunchi de fibre fine din sticlă, fiecare fibră transmițînd o mică parte din imagine (fig. 13.9). Astfel de cabluri optice flexibile pot ajunge la trei metri lungime și pot transfera pînă la 50 % din energia luminoasă care intră printr-un capăt. Într-o fibră de acest fel o rază poate suferi aproape 50 000 reflexii. Cea mai mare parte din scăderea de energie este datorată absorbției în interiorul materialului transparent, reflexia fiind practic totală.

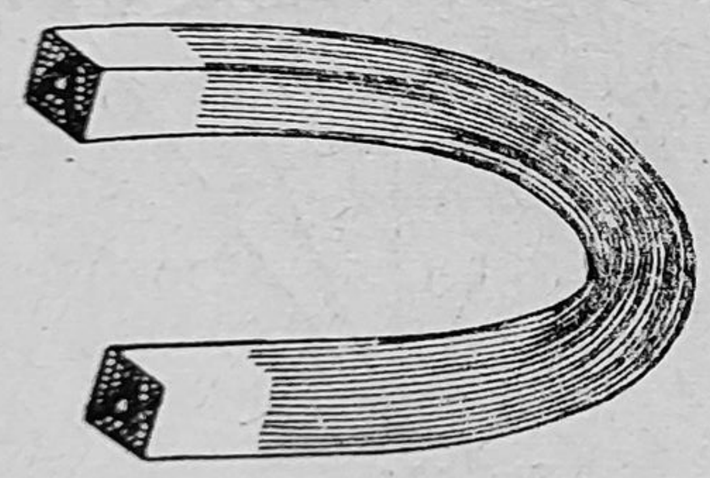


Fig. 13.9

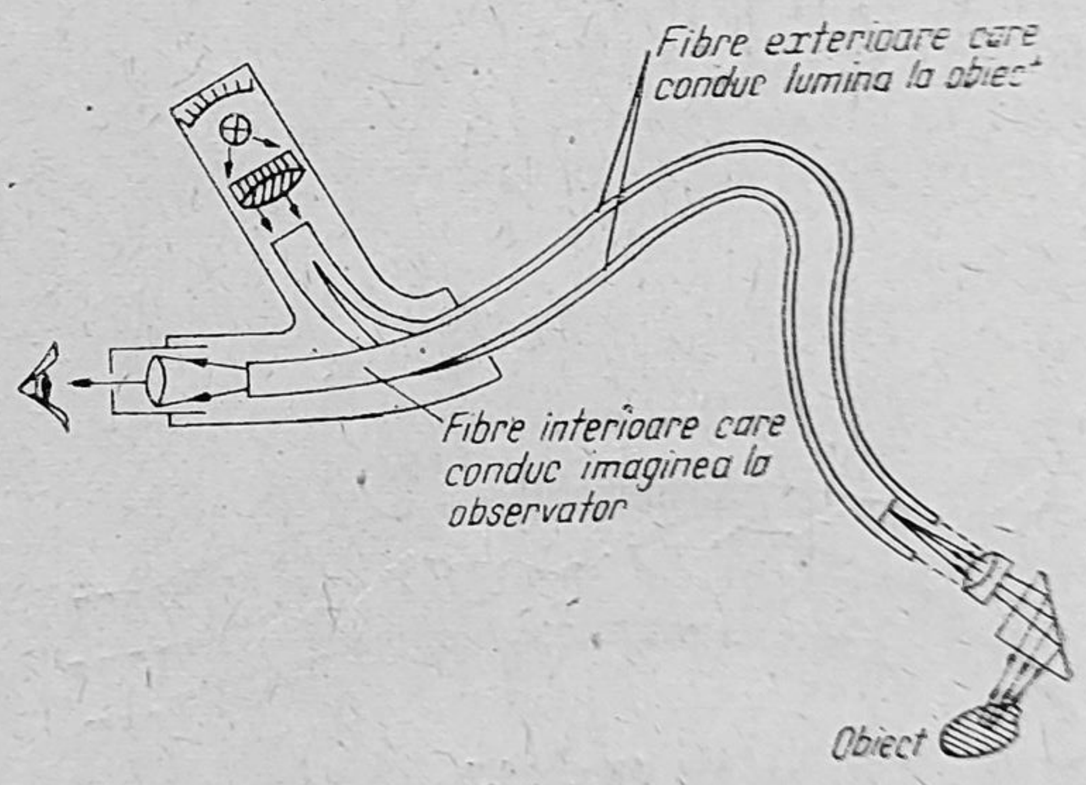


Fig. 13.10

Tehnica fibrelor optice a deschis posibilitatea realizării multor dispozitive optice utile în transmiterea și transformarea imaginilor luminoase.

Astfel, în momentul de față, o deosebită importanță în endoscopie o prezintă *fibroscopul flexibil* (fig. 13.10).

Secțiunea transversală a fibrei optice poate fi circulară, dreptunghiulară, hexagonală. Fibrele optice, ca și mănunchiurile de fibre, pot fi cilindrice (de lungimi mai mari sau mai mici, după cum este cazul) sau conice (lungimi limitate). În primul caz apertura fasciculului care iese din fibra optică este egală cu cea a fasciculului incident $A = A' \rightarrow n_1 \sin \sigma_1 = n' \sin \sigma'$.

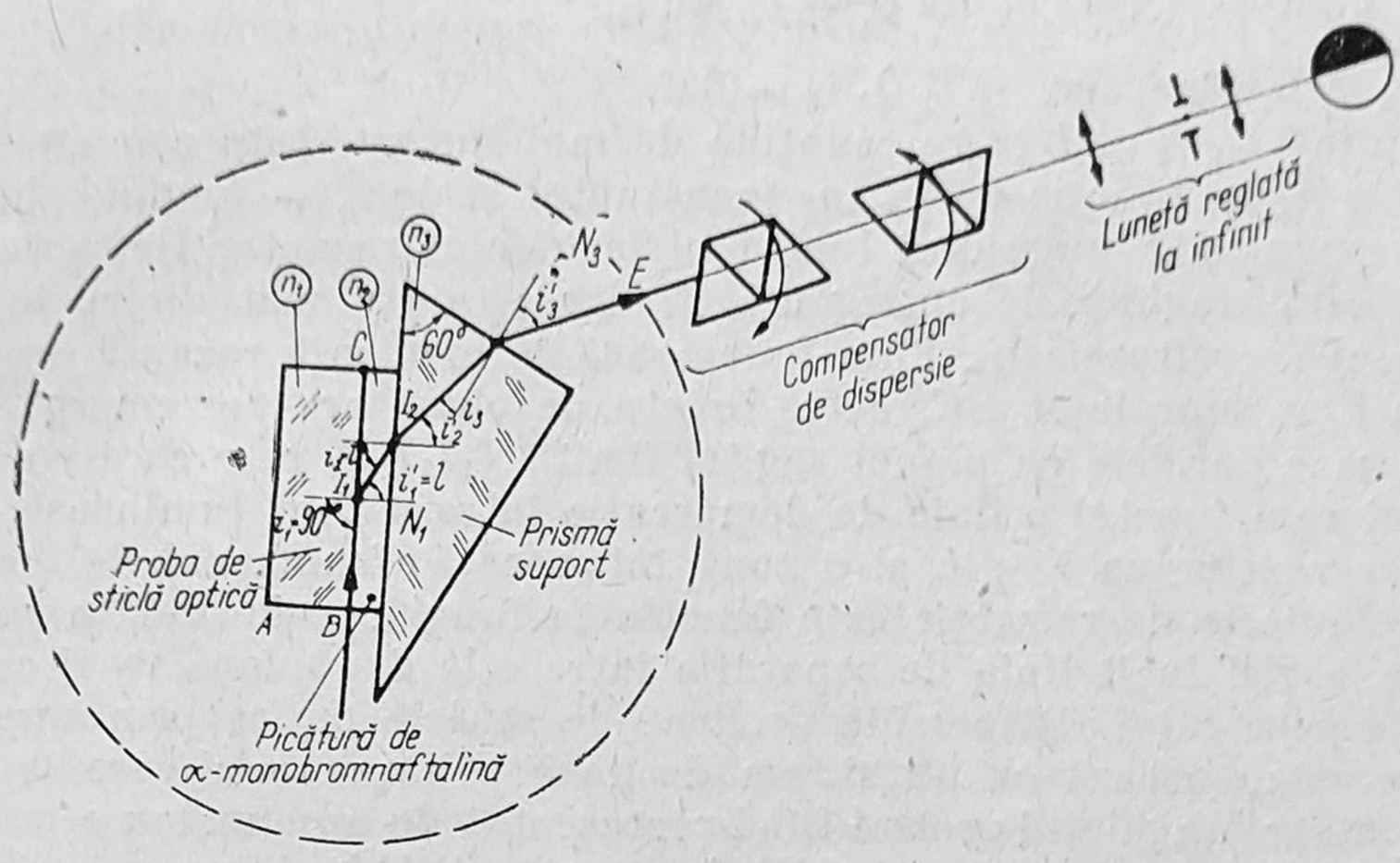


Fig. 13.11

În cazul fibrelor optice conice (foconi) apertura fasciculului emergent se modifică ; de asemenea, iluminarea crește cu micșorarea secțiunii fibrei, iar imaginea transmisă printr-un mănunchi de fibre conice se micșorează odată cu secțiunea.

Dimensiunea minimă a secțiunii transversale a unei fibre optice obișnuite este de ordinul de 10 μm (de circa 20 ori mai mare decît lungimea de undă a luminii). Există și fibre optice la care dimensiunea minimă a secțiunii este de ordinul de mărime al lungimii de undă a luminii. În acest caz condițiile pentru aplicarea legilor reflexiei și refracției nu sînt îndeplinite, fibrele respective acționînd ca „ghiduri de undă", modul lor de lucru putînd fi explicat pe baza teoriei electromagnetice a luminii.

Refractometrul tip Abbe (fig. 3.11). Funcționarea refractometrului Abbe are la bază fenomenul de incidență razantă : cînd se transmite lumină într-un mediu cu indice de refracție $n_2 > n_1$, în mediul cu indicele n_2 unghiul de refracție $i' \leqslant l$, unde $\sin l = n_1/n_2$. Proba de sticlă al cărei indice de refracție urmează a fi determinat trebuie să prezinte două suprafețe AB și BC polizate (suprafețe optice). Proba aderă prin intermediul unei picături de alfa-monobromnaftalină la prisma suport a aparatului. Această prismă, cu unghiul de refracție 60° și cu posibilitatea de rotație în jurul unui punct I_2, este realizată din flint greu, avînd indicele de refracție relativ mare. Lichidul folosit la realizarea joncțiunii între proba de sticlă și prisma suport are indicele de refracție mai mare decît orice indice de refracție al unei sticle optice :

$n_2 > n_1$. Fenomenul de incidență razantă are loc în oricare punct situat pe suprafața BC. Razele limită (incidente la 90°) vor ieși din prisma suport sub un unghi de emergență i_3'. Se scriu legile refracției în I_1, I_2 și I_3 :

$$n_1 = n_2 \sin l = n_3 \sin i_2'$$

$$n_3 \sin i_3 = n_0 \sin i_3',$$

unde $n_0 = 1$ pentru aer, și $i_2' + i_3 = 60°$.

Eliminînd i_3, i_2' și l între ecuațiile de mai sus se poate calcula indicele de refracție n_1 în funcție de n_2, n_3 (constante) și de i_3' — unghiul de emergență corespunzător unghiului limită al incidenței razante. Refractometrul Abbe măsoară unghiul de emergență i_3', dar este etalonat direct în valori ale indicelui de refracție n_1. Cum fenomenul de incidență razantă are loc în orice punct al suprafeței BC, către luneta de observare vor emerge o infinitate de raze paralele cu planul sagital limită $I_1I_2I_3E$, raze care vor determina în cîmpul lunetei o linie de demarcație între o zonă luminoasă, corespunzătoare razelor cu $i_1' < l$, și o zonă întunecată (fenomenul de incidență razantă). Indicele de refracție este funcție de lungimea de undă a radiației refractate, astfel încît linia de separație între cele două zone va fi colorată în culorile spectrului. Dispersiile produse de sticlele optice prin care trece lumina se compensează cu un sistem de două prisme Amici care se rotesc în sens contrar, unghiul de rotire fiind reprezentat de un număr z ce se poate citi pe tamburul compensatorului. Refractometrul Abbe lucrează cu lumină albă, etalonarea și compensarea dispersiei fiind făcută pentru a indica direct indicele de refracție corespunzător radiației d. În funcție de n_d și z se poate calcula dispersia medie, cu o relație de forma : $n_F - n_C = A + B\sigma$, unde A și B sînt funcții tabelate de n_d, iar σ funcție tabelată de z (tabelele respective însoțesc aparatul).

13.6. Terminologie generală și convenția de semne în optica tehnică

Dioptru : ansamblul format din două medii transparente optic, omogene, cu indici de refracție diferiți, separate printr-o suprafață. După forma suprafeței de separație se deosebesc următoarele forme de dioptri : plan, sferic, cilindric, parabolic. O oglindă poate fi considerată ca un dioptru.

Sistem optic : succesiune de dioptri cu suprafețe de revoluție avînd axele de simetrie în prelungire (suprapuse).

Axă optică : determinată de centrele de curbură și vîrfurile dioptrilor.

Punct-obiect : punct geometric, considerat obiect pentru sistemul optic.

Sistem optic stigmatic : sistemul optic pentru care imaginile unor puncte-obiect sînt punctiforme.

Punct-imagine : imaginea punctului-obiect dată de un sistem optic stigmatic.

Puncte conjugate : punctul-obiect și punctul-imagine corespunzător. Se notează cu aceeași literă : A și A' cînd sînt situate pe axa optică, B și B' cînd sînt în afara axei, dar în imediata apropiere a acesteia, $\tilde{B}$ și $\tilde{B}'$ cînd sînt în afara axei (extraaxiale).

Punct de incidență : punctul în care o rază întîlnește suprafața primului dioptru al sistemului optic.

Punct de emergență : punctul de pe suprafața ultimului dioptru al unui sistem optic din care iese raza emergentă.

Domeniu paraxial : domeniul aflat în imediata vecinătate a axei optice a unui sistem optic ; se caracterizează prin înălțimi de incidență și înclinări ale razelor foarte mici, în raport cu axa optică.

Notații adoptate :

— pentru unghiuri : σ, i, φ în domeniul paraxial, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{i}$, $\tilde{\varphi}$ în domeniul extraaxial ;

— pentru înălțimi de incidență : y, h în domeniul paraxial, $\tilde{y}$, $\tilde{h}$ în domeniul extraaxial ;

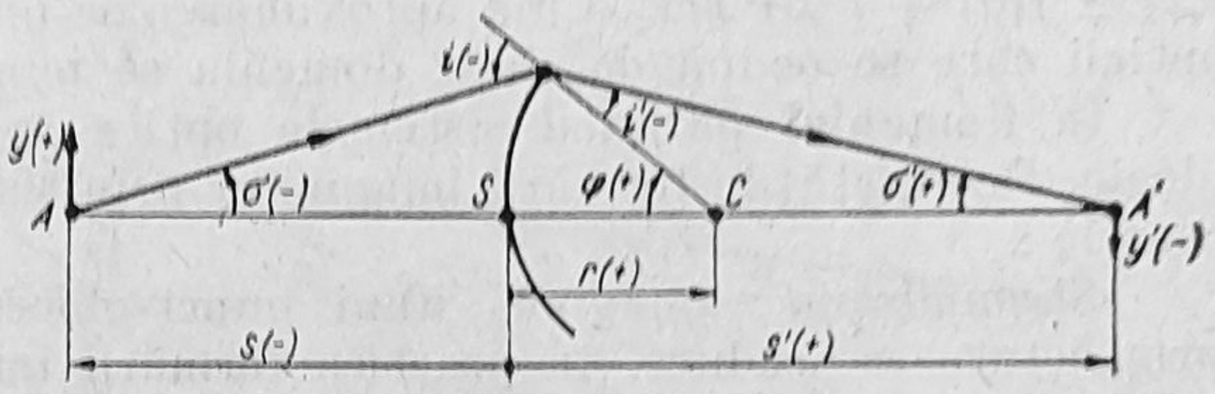


Fig. 13.12

— pentru distanțe : s, c, d în domeniul paraxial, $\tilde{s}$, $\tilde{D}$, $\tilde{c}$, $\tilde{l}$ în domeniul extraaxial.

Convenția de semne în optica tehnică (fig. 13.12) :

— lumina se propagă de la stînga spre dreapta (așadar, schemele optice ale aparatelor se vor reprezenta, convențional, cu prima suprafață a sistemului optic așezată în stînga) ;

— distanțele se măsoară pozitiv către dreapta și negativ către stînga ;

— razele de curbură se măsoară de la dioptru la centrul de curbură ;

— dimensiunile transversale se măsoară de la axă, fiind pozitive deasupra axei și negative sub axă ;

— unghiurile se măsoară de la axa optică la raze ; unghiurile de incidență se măsoară de la normale la raze ; se consideră pozitiv sensul acelor unui ceasornic.

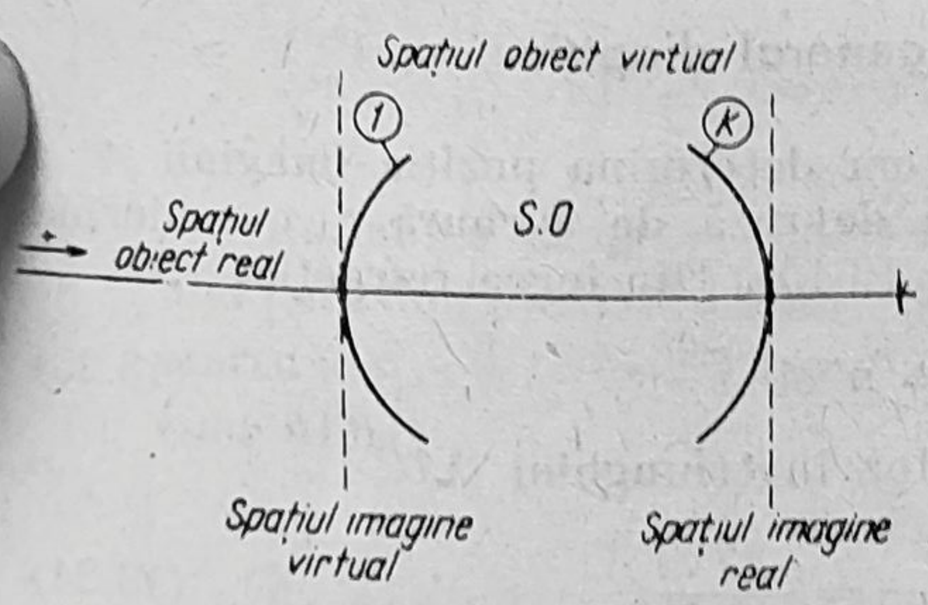


Fig. 13.13

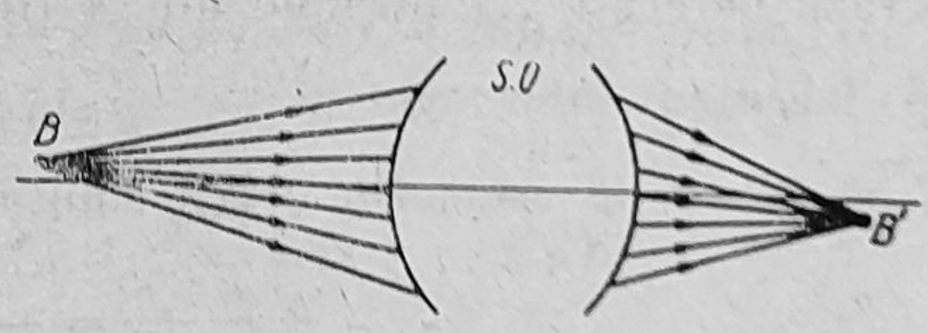


Fig. 13.14

Real și virtual în optica tehnică. Un sistem optic împarte spațiul, în lungul axei optice, în patru regiuni (fig. 13.13). Primul dioptru împarte spațiul în :

— spațiul obiect real (în fața sistemului optic) ;

— spațiul obiect virtual (după primul dioptru al sistemului).

Ultimul dioptru al sistemului împarte spațiul în :

— spațiul imagine real (după ultimul dioptru) ;

— spațiul imagine virtual (în fața ultimului dioptru).

13.7. Studiul formării imaginilor prin sisteme optice în cadrul opticii de ordinul întîi

Obiectul opticii de ordinul întîi este studiul proprietăților sistemelor optice centrate în domeniul paraxial, adică considerînd numai punctele și razele din vecinătatea axei optice. În domeniul paraxial orice funcție poate fi aproximată cu primii doi termeni ai unei serii de puteri de tip Maclaurin $f(x) \simeq f(0) + f'(0) \cdot x/1!$. Cum aproximarea se oprește la puterea întîi, partea opticii care se ocupă de acest domeniu se numește optică de ordinul întîi.

În domeniul paraxial sistemele optice se comportă ca sisteme optice ideale. Proprietățile formării imaginilor prin sisteme optice ideale sînt următoarele :

Stigmatismul : imaginea unui punct-obiect este punctiformă. Această proprietate se traduce, în practica formării imaginilor, prin aceea că toate razele pornind dintr-un punct-obiect ies din sistemul optic trecînd prin punctul-imagine (fig. 13.14).

Aplanetismul : un obiect plan perpendicular pe axa optică are o imagine plană perpendiculară pe axă.

Ortoscopia : imaginea este asemenea cu obiectul. Această proprietate mai poate fi exprimată prin constanța raportului între mărimea imaginii și a obiectului, pentru o poziție fixă a planului obiect.

De remarcat că în prima etapă de studiere (sau proiectare) a sistemelor optice, proprietățile și legile opticii de ordinul întîi se extind și la zone mai depărtate de axa optică (extraaxiale), considerînd sistemele optice ca fiind ideale. Același lucru poate fi exprimat și altfel : într-o primă etapă de studiere (proiectare) a sistemelor optice se consideră că sistemele optice lucrează în exclusivitate cu raze din domeniul paraxial.

13.7.1. Invariantul general dioptric

Pentru a stabili acest invariant, vom determina poziția imaginii A' a unui punct-obiect, dată de un dioptru de rază de curbură r, considerînd o rază oarecare AI pornind din A (fig. 13.15). Din legea refracției

$$n \sin i = n' \sin i' \tag{13.23}$$

Vom folosi de asemenea legea sinusurilor în triunghiul AIC

$$-\frac{\tilde{s}-r}{\sin \tilde{i}} = \frac{r}{\sin \tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{l}}{\sin \tilde{\varphi}}, \tag{13.24}$$

unde $|\tilde{i}| = |\tilde{\sigma}| + |\tilde{\varphi}|$, sau, ținînd seama de convenția de semne,

$$\tilde{i} = \tilde{\sigma} - \tilde{\varphi}, \tag{13.25}$$

iar $\overline{IA} = \tilde{l}$ abscisa oblică obiect măsurată de la dioptru la punctul A. Scriem acum legea sinusurilor și în triunghiul $A'IC$

$$-\frac{\tilde{s'}-r}{\sin \tilde{i'}} = \frac{r}{\sin \tilde{\sigma'}} = \frac{\tilde{l'}}{\sin \tilde{\varphi}} \tag{13.26}$$

unde

$$|\tilde{\varphi}| = |\tilde{\sigma}'| + |\tilde{i}'| \rightarrow \tilde{\varphi} = \tilde{\sigma}' - \tilde{i}' \tag{13.27}$$

iar $\overline{IA'} = \tilde{l}'$ este abscisa oblică imagine. Prin împărțirea relațiilor (13.24) și (13.26) și eliminarea raportului $\sin \tilde{i}'/\sin \tilde{i}$ din relația (13.23), se obține

$$(\tilde{s}' - r)/(\tilde{s} - r) \cdot \tilde{l}/\tilde{l}' = n/n'$$

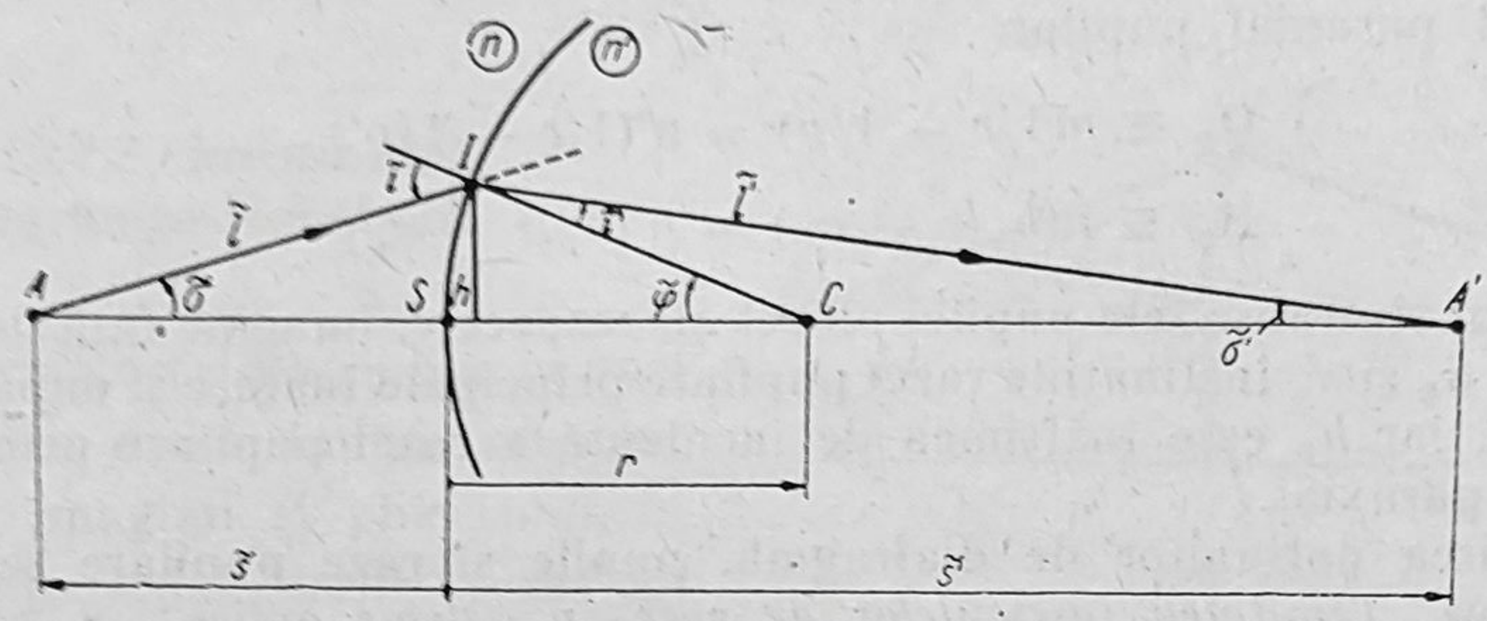


Fig. 13.15

sau

$$(\tilde{s} - r)n/\tilde{l} = (\tilde{s}' - r)n'/\tilde{l}'$$

ceea ce reprezintă invariantul general dioptric. Acest invariant se mai poate scrie și sub forma

$$n\tilde{s}/\tilde{l}(1/r - 1/\tilde{s}) = n'\tilde{s}/l'(1/r - 1/\tilde{s}'). \tag{13.28}$$

13.7.2. Invariantul paraxial obiectiv (Abbe)

Formarea imaginii unui punct-obiect axial printr-un dioptru, în domeniul paraxial, poate fi definită analitic de relația (13.28), în care se face aproximarea: $\tilde{s} \simeq \tilde{l}$, $\tilde{s}' \simeq \tilde{l}'$, rezultînd expresia invariantului paraxial obiectiv (sau Abbe)

$$Q_s \equiv n(1/r - 1/s) = n'(1/r - 1/s'). \tag{13.29}$$

Se pot folosi notațiile: $1/r = \rho$ curbura, $1/s = \xi$ proximitatea obiect, $1/s' = \xi'$ proximitatea imagine, $(n' - n)\rho = \varphi$ puterea dioptrului. Unitățile de măsură sînt

$$\langle r \rangle = \langle s \rangle = \langle s' \rangle = \text{metri, respectiv}$$

$$\langle \rho \rangle = \langle \xi \rangle = \langle \xi' \rangle = \text{m}^{-1} = \text{dioptrii.}$$

Cu noile notații invariantul paraxial obiectiv devine

$$Q_s \equiv n(\rho - \xi) = n'(\rho - \xi'). \tag{13.30}$$

Invariantul Abbe mai poate fi scris și în funcție de înălțimea de incidență h din domeniul paraxial și de înclinarea σ. Dacă se amplifică relația (13.29) cu h și se înlocuiește $h/s = \sigma$ și $h/s' = \sigma'$, se obține

$$A_s \equiv n(h/r - \sigma) = n'(h/r - \sigma'). \tag{13.31}$$

Dacă se urmărește reprezentarea prin sistem a unei diafragme (element constructiv care delimitează fluxul luminos prin sistemul optic), în domeniul paraxial, atunci notațiile se schimbă, relațiile (13.29) sau (13.31) devenind invariantul paraxial pupilar

$$Q_p \equiv n(1/r - 1/p) = n'(1/r - 1/p') \tag{13.32}$$

$$A_p \equiv n(h_p/r - \sigma_p) = n'(h_p/r - \sigma'_p) \tag{13.33}$$

unde p și p' sînt abscisele pupilei-obiect și, respectiv, imagine față de dioptrul considerat σ_p și σ'_p înclinațiile razei pupilare principale înainte și după dioptrul considerat, iar h_p este înălțimea de incidență a razei pupilare principale în domeniul paraxial.

Definirea noțiunilor de diafragmă, pupile și raze pupilare se va face la capitolul „*Limitatea fasciculelor de raze în sisteme optice*".

Determinarea focarelor unui dioptru. Focarele sînt punctele conjugate, față de dioptru, cu punctele axiale de la infinit (fig. 13.16). Pentru $s = -\infty \rightarrow \rightarrow s' = f'$; pentru $s' = \infty \rightarrow s = \bar{f}$, deci

$$f' = \frac{n'}{n' - n} \cdot r \tag{13.34}$$

$$\bar{f} = -\frac{n}{n' - n} \cdot r.$$

Se observă că $f'/\bar{f} = -n'/n$.

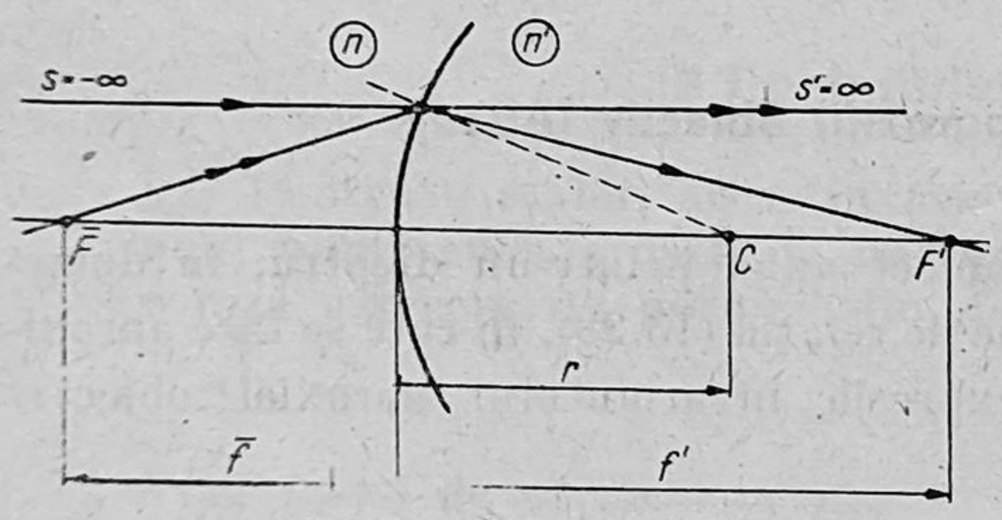


Fig. 13.16

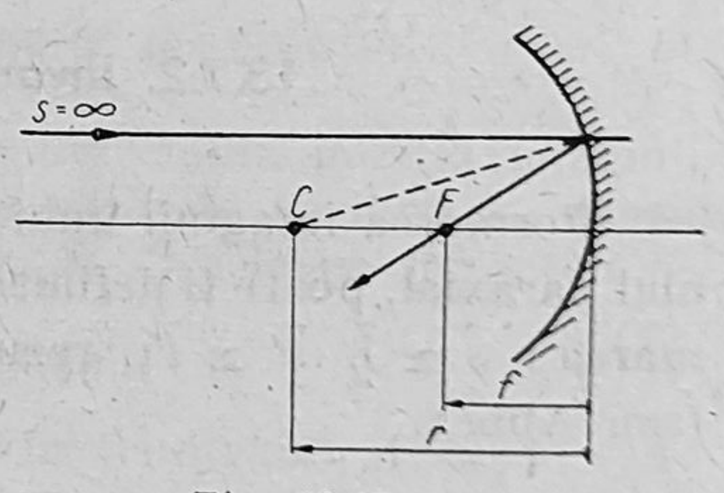


Fig. 13.17

Convenție pentru oglinzi. Pentru a putea studia suprafețele de reflexie cu relațiile determinate la dioptri de refracție se consideră indicii de refracție n' și grosimile d' care urmează unei reflexii de ordin impar ca fiind negative, iar cele de ordin par pozitive; curburile sînt măsurate ca și pentru dioptri.

Făcînd $n' = -n$ în invariantul paraxial obiectiv (13.29) se obține

$$1/s + 1/s' = 2/r \tag{13.35}$$

ceea ce reprezintă ecuația de conjugare față de oglinda sferică, în domeniul paraxial.

Determinarea focarului unei oglinzi sferice. Focarul este punctul conjugat, față de oglindă, cu punctul de la infinit (fig. 13.17). Înlocuind în ecuația (13.35) $s = \infty$ și $s' = f'$ sau $s = \bar{f}$ și $s' = -\infty$, se obține

$$f' = \bar{f} = f = r/2. \tag{13.36}$$

adică distanțele focale obiect și imagine sînt egale (oglinda are un singur focar), în domeniul paraxial avînd valoarea $r/2$.

13.7.3. Invariantul Lagrange-Helmholtz

Se urmărește determinarea unei relații între dimensiunile transversale ale imaginii și obiectului, în domeniul paraxial, scriind legea refracției pentru o rază ce trece prin vîrful dioptrului pornind din marginea cîmpului obiect y (fig. 13.18).

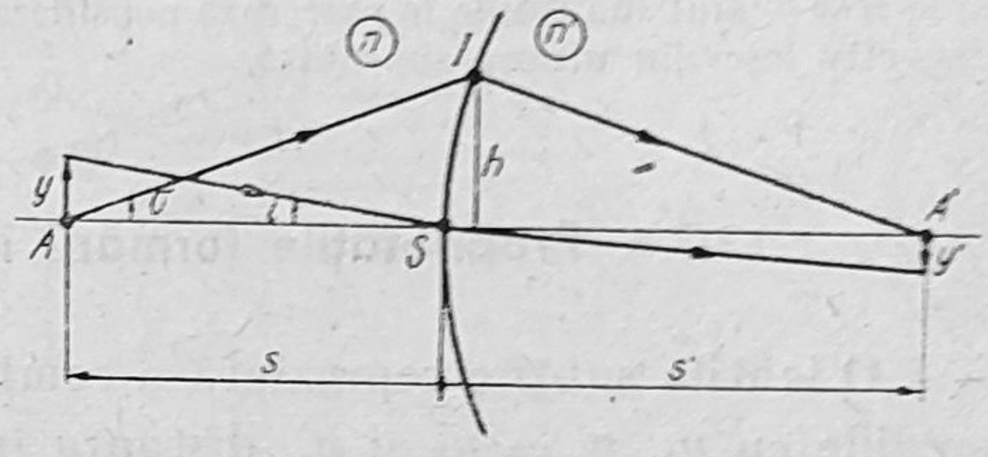


Fig. 13.18

Din legea refracției în S rezultă $ni = n'i'$. Aproximînd tangenta cu unghiul, se determină: $i = -y/s$; $i' = -y'/s'$; $\sigma = h/s$; $\sigma' = h/s'$, care înlocuite în expresia legii refracției duc la două relații

$$\mathcal{L} \equiv ny/s = n'y'/s' \tag{13.37}$$

$$\mathcal{H} \equiv ny\sigma = n'y'\sigma' \tag{13.38}$$

care reprezintă, împreună, invariantul Lagrange-Helmholtz.

Observație. Printr-un sistem optic centrat invariantul Helmholtz scris sub forma (13.38) rămîne constant pentru orice dioptru. Fie un sistem optic centrat format din k dioptri și considerăm dioptri de rangul $j-1$ și j (fig. 13.19).

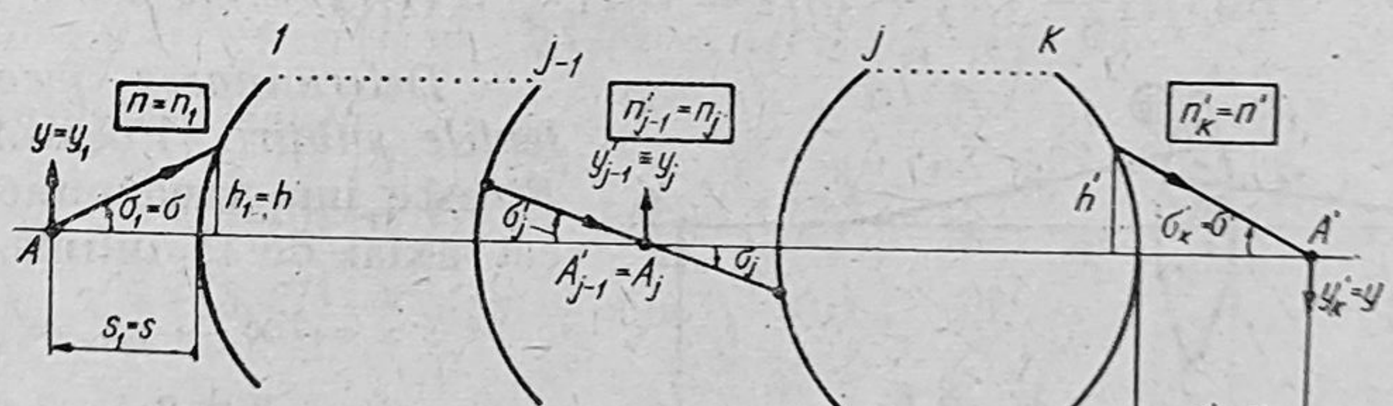


Fig. 13.19

Se observă că $n'_{j-1} = n_j$; $y'_{j-1} = y_j$; $\sigma'_{j-1} = \sigma_j$, astfel încît

$$\mathcal{H}_{j-1} = \mathcal{H}_j \tag{13.39}$$

unde

$$\mathcal{H}_{j-1} \equiv n_{j-1}y_j\sigma_{j-1} = n'_{j-1}y'_{j-1}\sigma'_{j-1}$$

$$\mathcal{H}_j \equiv n_jy_j\sigma_j = n'_jy'_j\sigma'_j.$$

Punînd $j = 1, 2, \ldots, k$ în (13.39) se ajunge la $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_k$, adică

$$n_1y_1\sigma_1 = n'_ky'_k\sigma'_k$$

sau, folosind notațiile $n_1 = n$, $y_1 = y$, $\sigma_1 = \sigma$; $n'_k = n'$; $y'_k = y'$, $\sigma'_k = \sigma'$,

$$ny\sigma = n'y'\sigma'. \tag{3.40}$$

ceea ce reprezintă invariantul Helmholtz scris pentru întreg sistemul optic.

Relația (13.40) poate fi scrisă și în funcție de $s_1 = s$ și $s'_k = s'$

$$ny \cdot \frac{h}{s} = n'y' \cdot \frac{h'}{s'} \tag{13.41}$$

unde h și h' sînt înălțimile la care raza considerată intră în prima suprafață a sistemului optic, respectiv iese din ultima suprafață.

13.7.4. Proprietățile formării imaginilor prin lentile subțiri

O lentilă subțire reprezintă o combinație a doi dioptri coaxiali ce separă mediile cu n_1, $n'_1 = n_2$ și n'_2, distanța între vîrfurile dioptrilor (grosimea lentilei măsurată pe axa optică) fiind $d \simeq 0$ (sau neglijabilă față de razele de curbură $|r_1|$ și $|r_2|$).

Pentru a determina relația de conjugare (între obiect și imagine) față de o lentilă subțire scriem invariantul paraxial obiectiv pentru dioptrii 1 și 2, folosind notațiile din figura 13.20.

$$Q_{s1} \equiv n_1(1/r_1 - 1/s_1) = n'_1(1/r_1 - 1/s'_1)$$

$$Q_{s2} \equiv n_2(1/r_2 - 1/s_2) = n'_2(1/r_2 - 1/s'_2).$$

Ținînd seama că $n'_1 \equiv n_2 = n$, $s'_1 = s_2$ și de notațiile $s_1 = s$, $s'_1 = s'$, prin adunarea expresiilor invarianților paraxiali, membru cu membru, se obține ecuația de conjugare față de lentila subțire

$$n_1(1/r_1 - 1/s) + n/r_2 = n/r_1 + n'(1/r_2 - 1/s'). \tag{13.42}$$

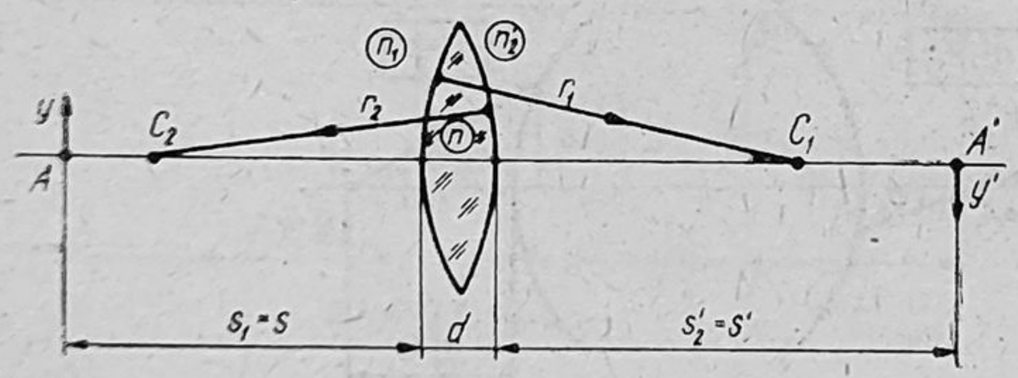


Fig. 13.20

Determinarea focarelor unei lentile subțiri. Focarul imagine F' este imaginea punctului obiect axial de la infinit, deci

$$s = \infty - \; ; s' = f' \tag{13.42}$$

$$\frac{n'_2}{f'} = \frac{n - n_1}{r_1} - \frac{n - n_2}{r_2}. \tag{13.43}$$

Focarul obiect $\bar{F}$ este conjugat cu punctul imagine axial de la infinit

$$s = \bar{f} \; ; \; s' = \infty \tag{13.42}$$

$$\frac{n_1}{\bar{f}} = -\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n - n'_2}{r_2}. \tag{13.44}$$

Se observă că

$$\bar{f}/f' = -n_1/n'_2. \tag{13.45}$$

Utilizînd expresia (13.43), ecuația de conjugare (13.42) se mai poate scrie

$$n_2'/s' - n_1/s = n_2'/f'. \tag{13.46}$$

Pentru determinarea mărimii imaginii y' se scrie invariantul Lagrange sub forma (13.37), pentru ambii dioptri

$$\mathcal{L}_1 \equiv n_1 y_1/s_1 = n_1' y_1'/s_1'$$

$$\mathcal{L}_2 \equiv n_2 y_2/s_2 = n_2' y_2'/s_2'.$$

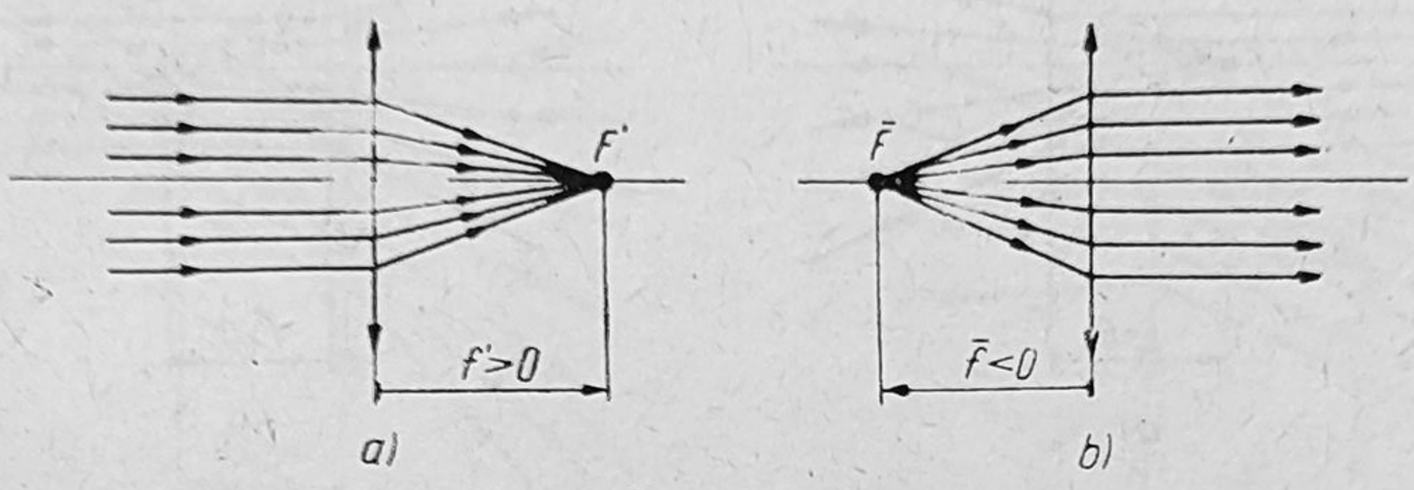


Fig. 13.21

Ținînd seama de relațiile : $n_1' \equiv n_2 = n$; $s_1' \simeq s_2$; $y_1' \equiv y_2$; $y_1 = y$; $y_2' = y'$, se obține $\mathcal{L} \equiv n_1 y/s = n_2' y'/s'$ sau $\frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_2'} \cdot \frac{s'}{s}$ (13.47)

Un caz particular, dar des întîlnit, îl constituie lentila subțire aflată în aer. În acest caz $n_1 = n_2' = 1$. Relațiile care dau distanțele focale devin

$$1/f' = (n-1)\cdot(1/r_1 - 1/r_2) \tag{13.48}$$

sau

$$\varphi' = (n-1)\cdot(\rho_1 - \rho_2) \tag{13.48'}$$

unde $\langle \varphi' \rangle = m^{-1} =$ dioptrii este puterea lentilei

$$1/\bar{f} = -(n-1)(1/r_1 - 1/r_2)\ ;\ \bar{f} = -f'. \tag{13.49}$$

Relațiile de conjugare devin

$$(13.46) \rightarrow 1/s' - 1/s = 1/f' \tag{13.50}$$

$$(13.47) \rightarrow y'/y = s'/s. \tag{13.51}$$

13.7.5. Proprietățile focarelor unei lentile subțiri

O lentilă subțire se reprezintă convențional printr-o singură linie perpendiculară pe axa optică. Distingem următoarele tipuri de lentile subțiri, care vor fi descrise mai jos.

Lentila subțire convergentă (fig. 13.21) efectuează următoarele operații :

a) un fascicul de raze paralele cu axa optică (venind de la punctul obiect axial situat la infinit) este transformat de lentilă într-un fascicul convergent cu vîrful în focarul imagine F' ;

b) un fascicul divergent cu vîrful în focarul obiect F este transformat de lentila subțire într-un fascicul paralel cu axa optică (către punctul imagine axial de la infinit).

Lentila subțire divergentă (fig. 13.22) efectuează, asemănător, operațiile următoare :

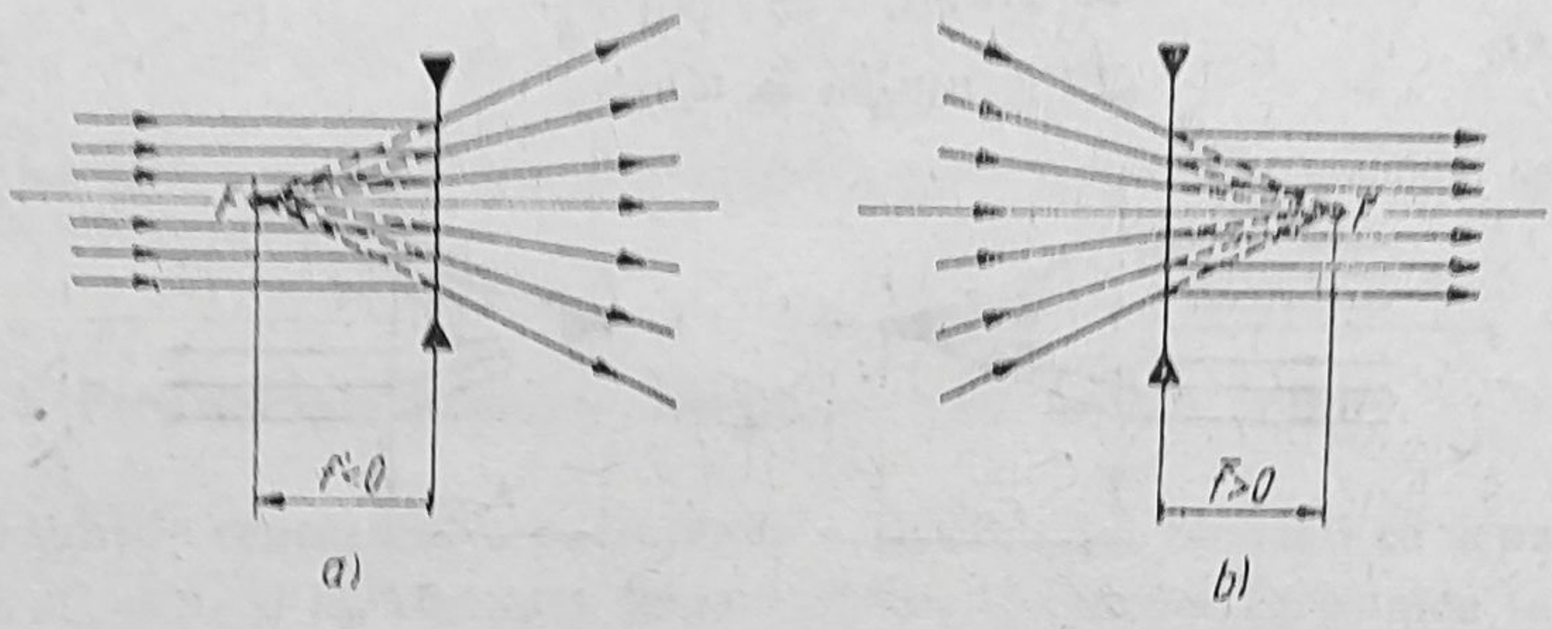


Fig. 13.22

a) un fascicul paralel cu axa optică este transformat într-un fascicul divergent cu vîrful în focarul imagine F' (virtual în acest caz) ;

b) un fascicul convergent cu vîrful în focarul obiect F (virtual) este transformat într-un fascicul paralel cu axa optică.

Dacă se aplică proprietatea de aplanetism a formării imaginilor în sistemele optice (în domeniul paraxial) pentru planele obiect și imagine situate la infinit față de o lentilă subțire se determină proprietățile planelor focale, perpendiculare pe axa optică în F (planul focal obiect conjugat cu planul imagine de la infinit) și în F' (planul focal imagine conjugat cu planul obiect de la infinit).

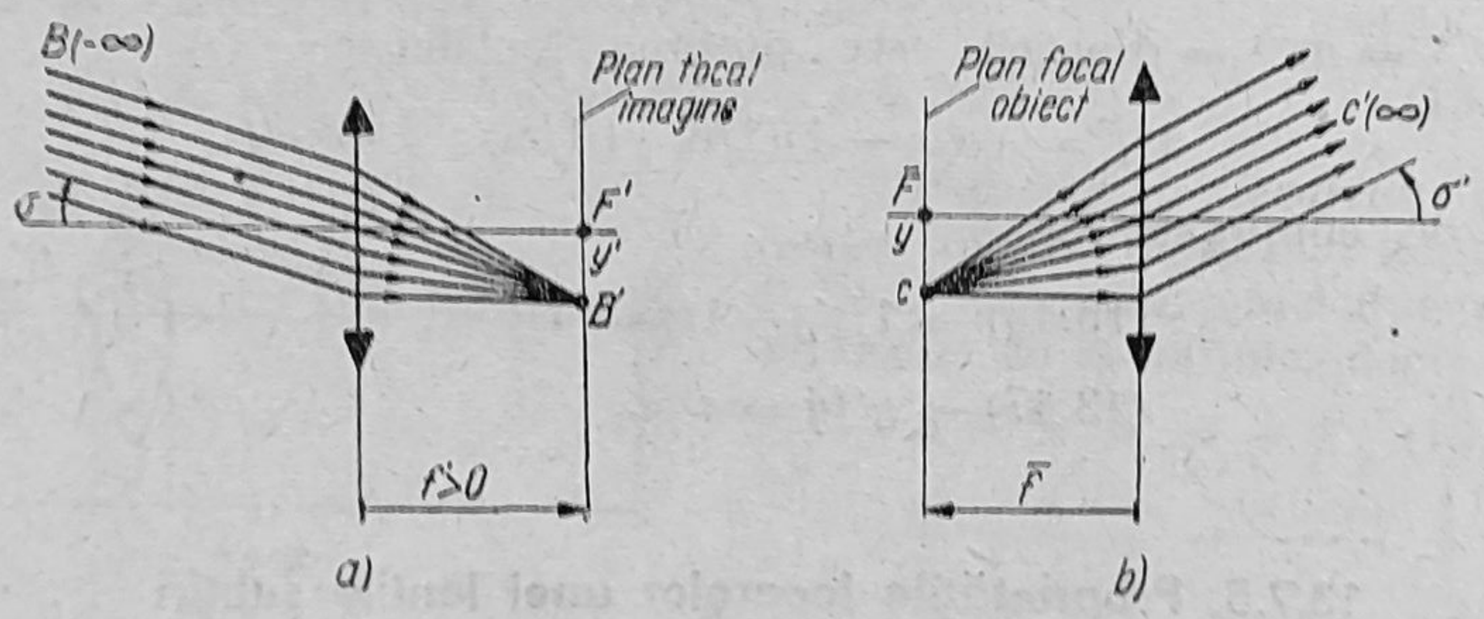


Fig. 13.23

Rezultă proprietățile de mai jos ale planelor focale :

Unui punct B din planul obiect de la infinit, aflat în direcția σ, îi corespunde un punct imagine B' din planul focal imagine, la distanța y' de la axa optică (fig. 13.23, a ; 13.24, a). Unui punct obiect C din planul focal obiect, aflat la distanța y de la axa optică, îi corespunde punctul imagine aflat la infinit în direcția σ' (fig. 13.23, b, 13.24, b).

13.7.6. **Măririle sistemelor optice**

Măririle stabilesc rapoarte adimensionale între mărimile imagine și cele obiect. Avînd în vedere simplitatea reprezentării prin lentile subțiri și posibilitatea generalizării formării imaginilor prin aceste lentile la siste-

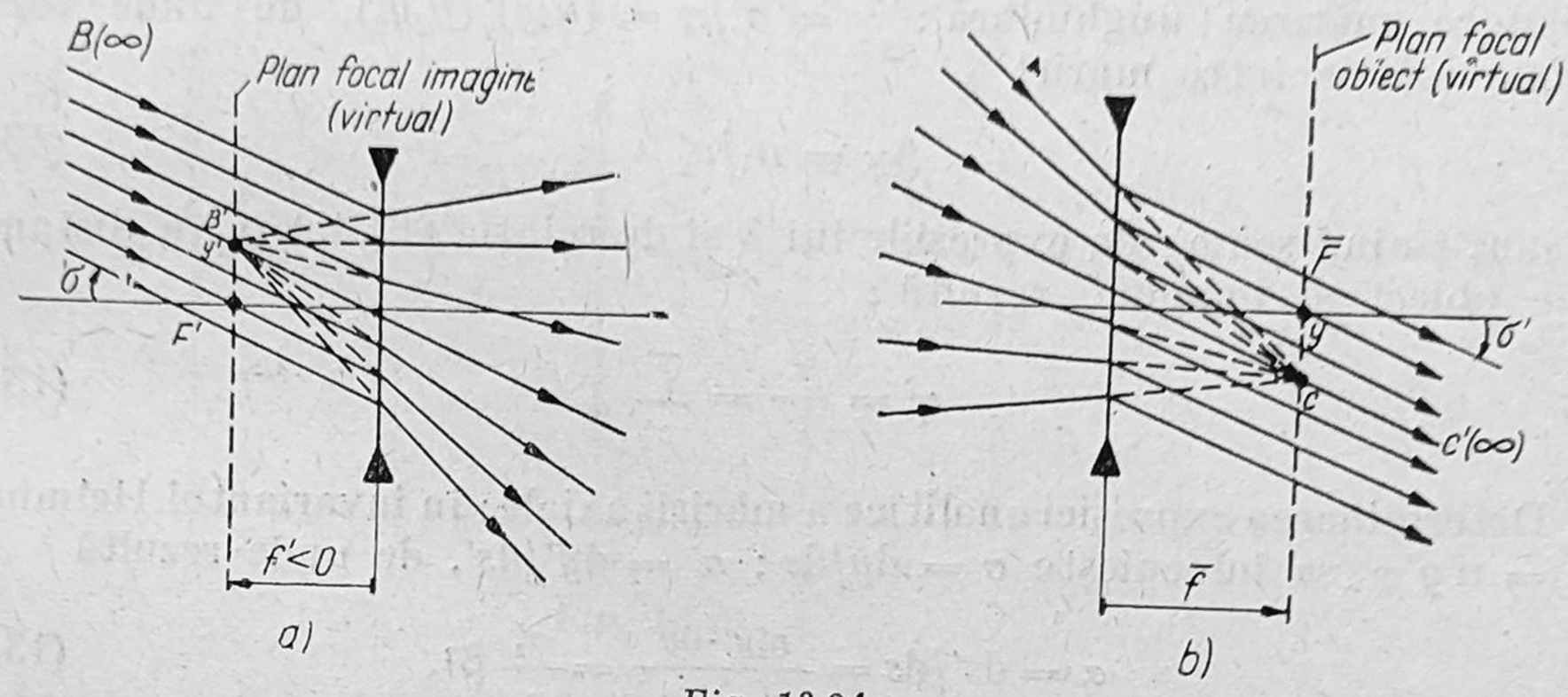


Fig. 13.24

mele optice centrate, vom defini și studia măririle de mai jos în cazul lentilelor de acest fel :

Mărirea axială $\alpha = ds'/ds$, unde ds' reprezintă variația poziției imaginii pentru o variație ds a poziției obiectului. Această mărire își poate găsi aplicație în calculul profunzimii la aparatele foto sau de proiecție.

Mărirea transversală $\beta = dy'/dy$, unde dy' este variația mărimii imaginii la o variație dy a obiectului. Se poate constata că pentru o poziție axială constantă a obiectului, deci și a imaginii, mărirea transversală

$$\beta = dy'/dy = y'/y\,|_{s=const.} \tag{13.52}$$

Mărirea unghiulară, definită ca fiind raportul

$$\gamma = d\sigma'/d\sigma = \sigma'/\sigma\,|_{s=const.} \tag{13.53}$$

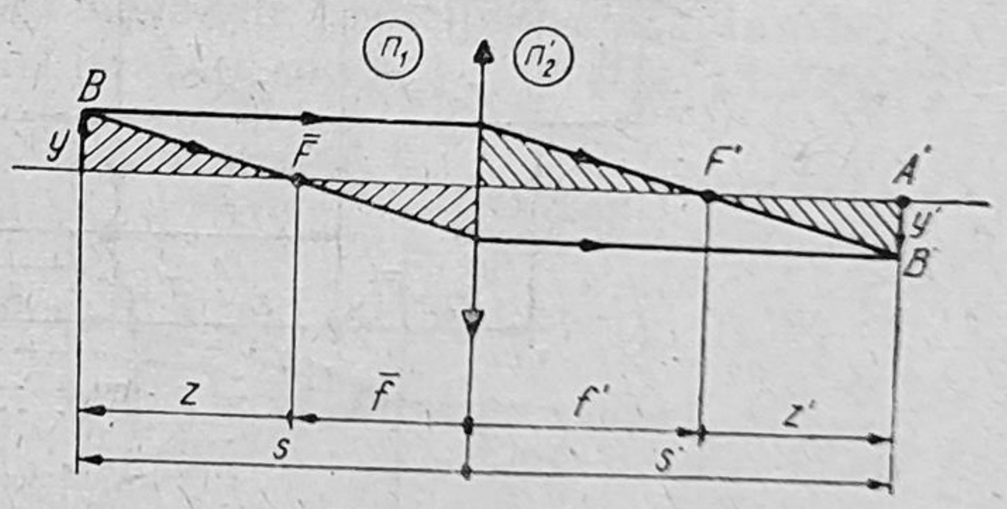


Fig. 13.25

Fie o lentilă subțire care dă imaginea y' pentru obiectul y. Folosind proprietatea de stigmatism a sistemelor optice în domeniul paraxial, se consideră două raze ce pornesc din punctul B : una paralelă cu axa optică și care va ieși din lentila subțire trecînd prin F', iar cealaltă prin $\bar{F}$ și care va ieși din lentilă paralelă cu axa optică (conform proprietăților focarelor). Imaginea $A'B'$ va fi perpendiculară pe axa optică, conform proprietății de aplanetism (fig. 13.25).

Determinarea expresiei măririi transversale : din asemănarea triunghiurilor haşurate se deduce, ținînd seama de convenția semnelor

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{\bar{f}}{z} = -\frac{z'}{f'} \tag{13.54}$$

unde z și z' reprezintă coordonatele focale ale obiectului, respectiv, imaginii.

Din relaţiile (13.54) rezultă ecuaţia de conjugare în coordonate focale (ecuaţia lui Newton)

$$zz' = ff' \tag{13.55}$$

Din invariantul Helmholtz, scris pentru lentila subţire sub forma (13.40), se deduce mărirea unghiulară : $\gamma = \sigma'/\sigma = (n_1 y)/(n_2' y_2')$, de unde rezultă o primă relaţie între măriri

$$\beta\gamma = n_1/n_2' \tag{13.56}$$

sau, ţinînd seama de expresiile lui β şi de relaţia (13.45) între distanţele focale obiect şi imagine, rezultă :

$$\gamma = \frac{z}{f'} = \frac{\bar{f}}{z'} \tag{13.57}$$

Determinarea expresiei analitice a măririi axiale : în invariantul Helmholtz $ny\sigma = n'y'\sigma'$ se înlocuieşte $\sigma = \mathrm{d}y/\mathrm{d}s$; $\sigma' = \mathrm{d}y'/\mathrm{d}s'$, de unde rezultă

$$\alpha = \mathrm{d}s'/\mathrm{d}s = \frac{n_2' y' \cdot \mathrm{d}y'}{n_1 y \cdot \mathrm{d}y'} = \frac{n_2'}{n_1}\beta^2. \tag{13.58}$$

Aceasta este relaţia lui Maxwell sau cea de a doua relaţie dintre măriri. Dacă se înmulţesc relaţiile între măriri (13.56) şi (13.58) se obţine a treia relaţie între măriri

$$\alpha\gamma = \beta. \tag{13.59}$$

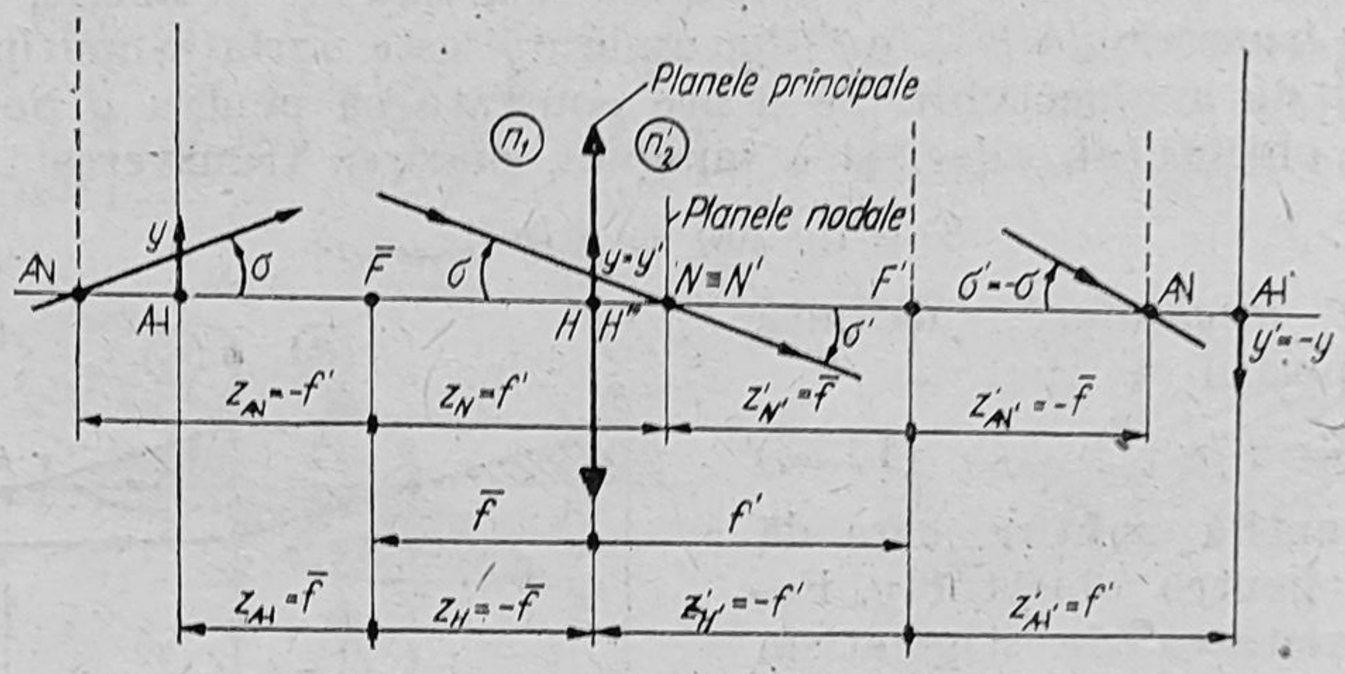


Fig. 13.26

13.7.7. Puncte şi plane cardinale

Planele cardinale sînt perpendiculare pe axa optică prin punctele cardinale, unde măririle iar valori unitare (fig. 13.26) :

$$\beta = \pm 1 \; ; \; \gamma = \pm 1.$$

Punctele şi planele principale sînt conjugate faţă de un sistem optic şi se caracterizează prin $\beta = 1$, adică imaginea este egală cu obiectul.

Determinarea poziţiilor planelor principale obiect (H) şi imagine (H') se face cu ajutorul relaţiilor (13.54), utilizînd coordonatele focale : $\beta = 1 \rightarrow$ $\rightarrow z_H = -\bar{f}$; $z'_{H'} = -f'$.

Rezultă că pentru o lentilă subțire planele principale se confundă cu lentila. Poziţiile *planelor antiprincipale* obiect ($\mathcal{A}$) şi imagine ($\mathcal{A}'$): $\beta = -1 \rightarrow z_{\mathcal{A}} = \bar{f}$; $z_{\mathcal{A}'} = f'$. Se observă că planele antiprincipale sînt simetricele planelor principale faţă de focare.

Planele nodale obiect (N) şi imagine (N') sînt caracterizate de $\gamma = 1 \rightarrow (13.57) \rightarrow z_N = f'$; $z_{N'} = \bar{f}$.

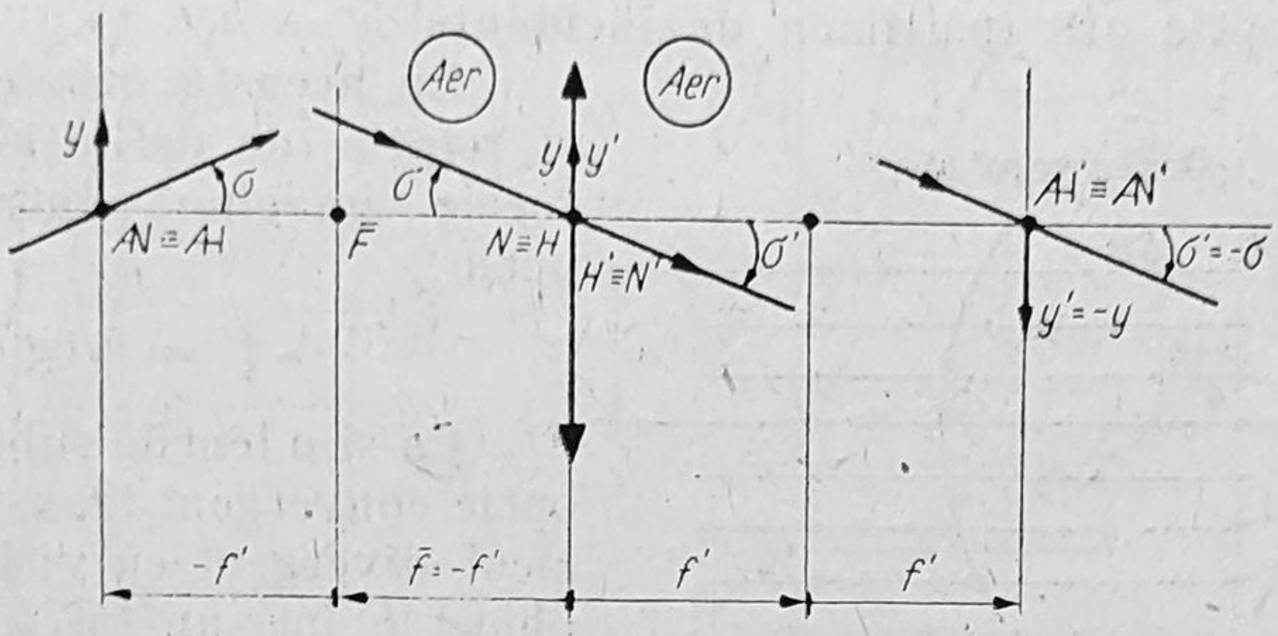


Fig. 13.27

Se observă că punctele nodale sînt confundate în cazul lentilei subţiri şi deplasate faţă de planul lentilei în mediul mai dens (în exemplul considerat $n_2' > n_1$). Dacă o rază trece prin B sub înclinaţia σ ea iese din sistem prin N' sub aceeaşi înclinaţie $\sigma' = \sigma$.

Planele antinodale obiect ($\mathcal{A}_N$) şi imagine ($\mathcal{A}_N'$) sînt simetricele planelor nodale faţă de focare

$$\gamma = -1 \rightarrow (13.57) \rightarrow z_{\mathcal{A}_N} = -f' \; ; \; z_{\mathcal{A}_N'} = -\bar{f}.$$

O rază care trece prin $\mathcal{A}_N$ sub înclinaţia σ va ieşi din sistemul optic prin punctul conjugat $\mathcal{A}_N'$ sub înclinaţia σ'.

În cazul particular al lentilei subţiri scăldate în aer (sau în acelaşi mediu de o parte şi de alta) planele nodale coincid cu planele principale, iar planele antinodale cu planele antiprincipale, deoarece în acest caz $\bar{f} = -f'$ (fig. 13.27).

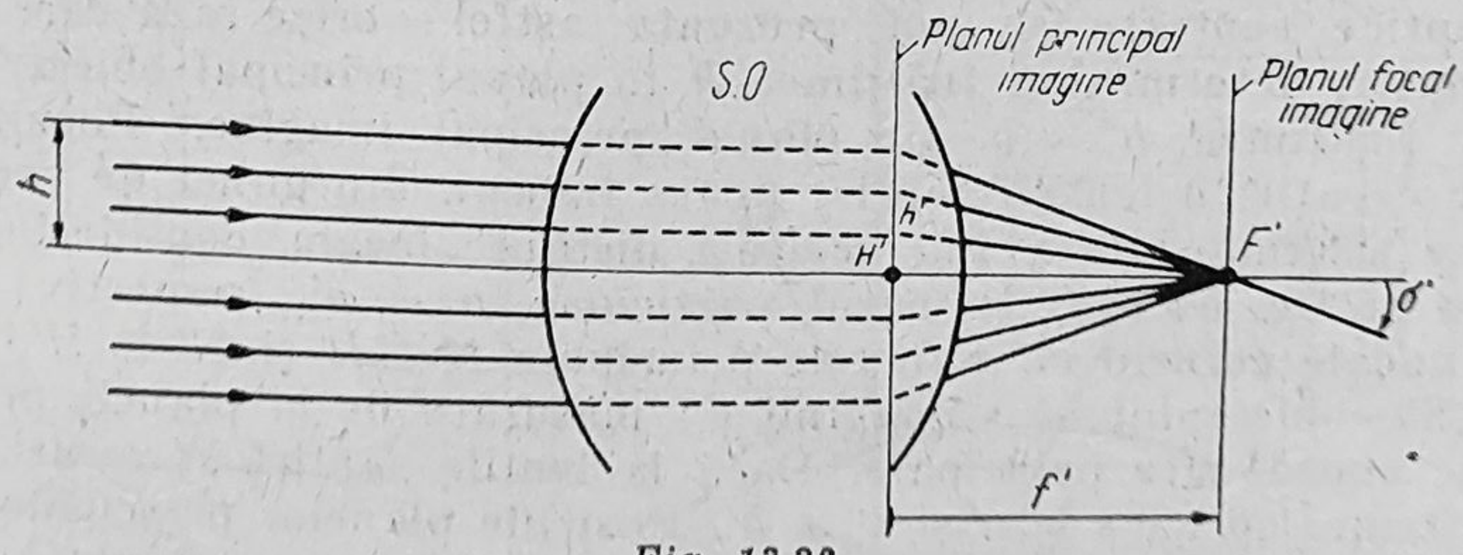


Fig. 13.28

13.7.8. Generalizarea proprietăţilor formării imaginilor prin lentile subţiri la sisteme optice centrate

Ca şi o lentilă subţire, un sistem optic convergent transformă un fascicul de raze paralele cu axa optică într-un fascicul convergent în planul imagine F', conjugat faţă de sistemul optic cu punctul obiect axial de la infinit (fig. 13.28).

Dacă ţinem seama de caracteristica planelor principale ($y' = y$; sau $\beta = 1$), la intersecţia prelungirilor razelor incidente cu razele imagine care ies din sistem se determină planul principal imagine. Raţionamentul este simplu : oriunde s-ar găsi planul principal obiect H, o rază paralelă cu axa optică la distanţe h îl va intersecta la înălţimea de incidenţă h ; rămîne, deci, a determina poziţia planului principal imagine H' unde raza emergentă din sistemul optic are înălţimea de incidenţă $h' = h$.

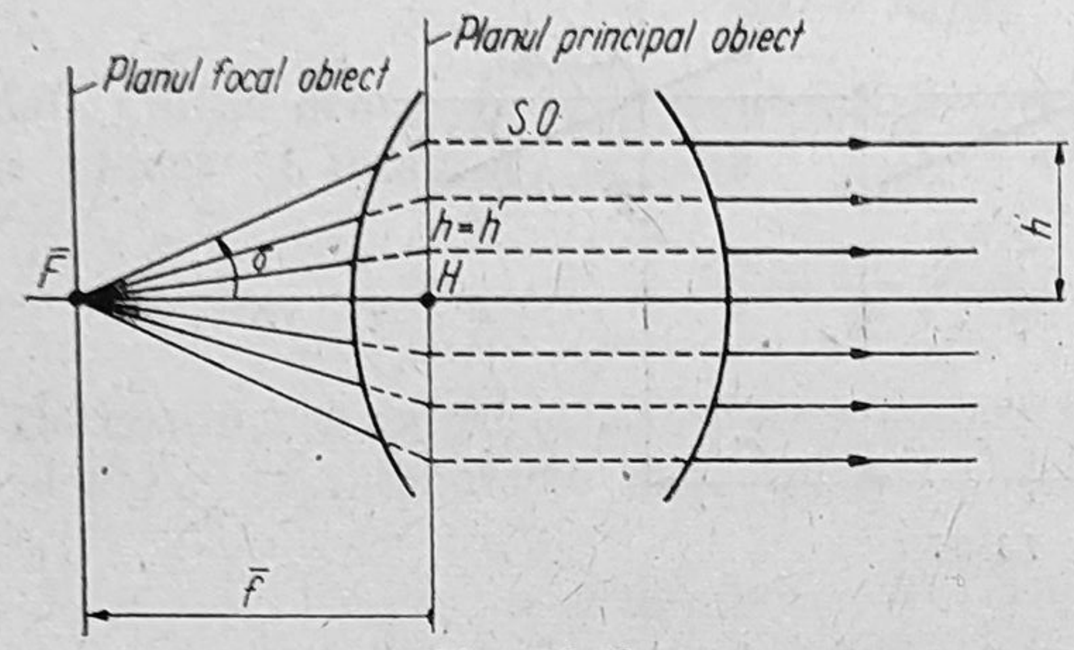


Fig. 13.29

Cu această ocazie determinăm şi relaţia de definiţie a distanţei focale imagine pentru un sistem optic

$$f' = h/\mathrm{tg}\,\sigma'. \qquad (13.60)$$

Ca şi o lentilă subţire, un sistem optic convergent transformă un fascicul divergent cu vîrful în focarul obiect F într-un fascicul paralel cu axa optică, către punctul imagine axial de la infinit, conjugat focarului obiect (fig. 13.29).

Determinarea grafică a planului principal obiect H se face aplicînd aceeaşi metodă ca la determinarea lui H'. Rezultă relaţia matematică de definiţie a distanţei focale obiect :

$$f = h'/\mathrm{tg}\,\sigma. \qquad (13.61)$$

Ţinînd seama de proprietatea de aplanetism la formarea imaginilor prin sisteme optice în domeiul paraxial, rezultă, asemenea lentilelor subţiri, proprietăţile planelor focale perpendiculare pe axa optică şi conjugate faţă de sistemul optic cu planele de la infinit. De asemenea, se generalizează şi proprietăţile formării imaginilor prin lentile subţiri divergente la sistemele optice divergente.

În rezumat, proprietăţile formării imaginilor prin lentile subţiri şi prin sisteme optice centrate se pot prezenta astfel : orice rază care intră în sistemul optic, determinînd înălţimea h în planul principal obiect, iese din sistem la înălţimea $h' = h$ din planul principal imagine. Pornind de la această observaţie, o lentilă subţire poate înlocui, din punct de vedere teoretic, orice sistem optic avînd aceleaşi distanţe focale, considerînd $l_H = 0$ (fig. 13.30 şi fig. 13.31). În cazul particular $n_1 = n_2'$, respectiv $n_1 = n_k'$, punctele nodale coincid cu punctele principale $N \equiv H$ şi $N' \equiv H'$.

Poziţiile obiectului a şi imaginii a', măsurate de la planele principale, se numesc coordonate principale. Dacă la lentile subţiri $s = a$ şi $s' = a'$, pentru sisteme optice $s \neq a$ şi $s' \neq a'$. Poziţiile planelor principale pot determina intervalul între ele $l_H = HH' > 0$, în cazurile reprezentate mai sus, sau $l_H = HH' < 0$, în cazul în care H' se află „în stînga“ lui H.

Aşadar, în etapa iniţială de proiectare — stabilirea schemei optice a aparatului — se pot considera toate sistemele optice care fac parte din aparat ca fiind lentile subţiri de distanţe focale (puteri) echivalente. Trecerea de la schema optică cu lentile subţiri la schema optică cu sisteme optice reale constă în „dedublarea“ planului unei lentile subţiri în cele două plane principale aflate la distanţa $l_H > 0$ sau $l_H < 0$.

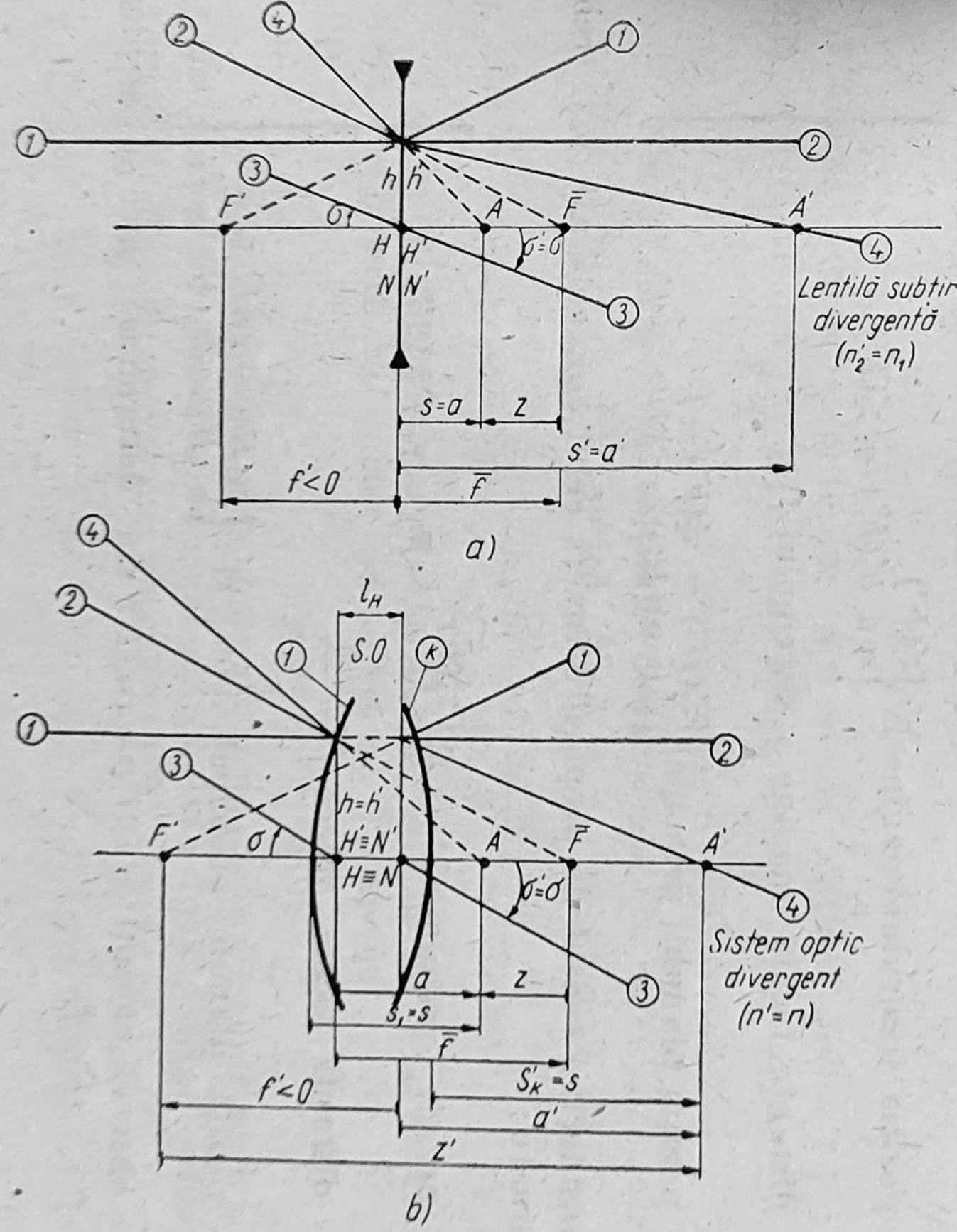


Fig. 13.30

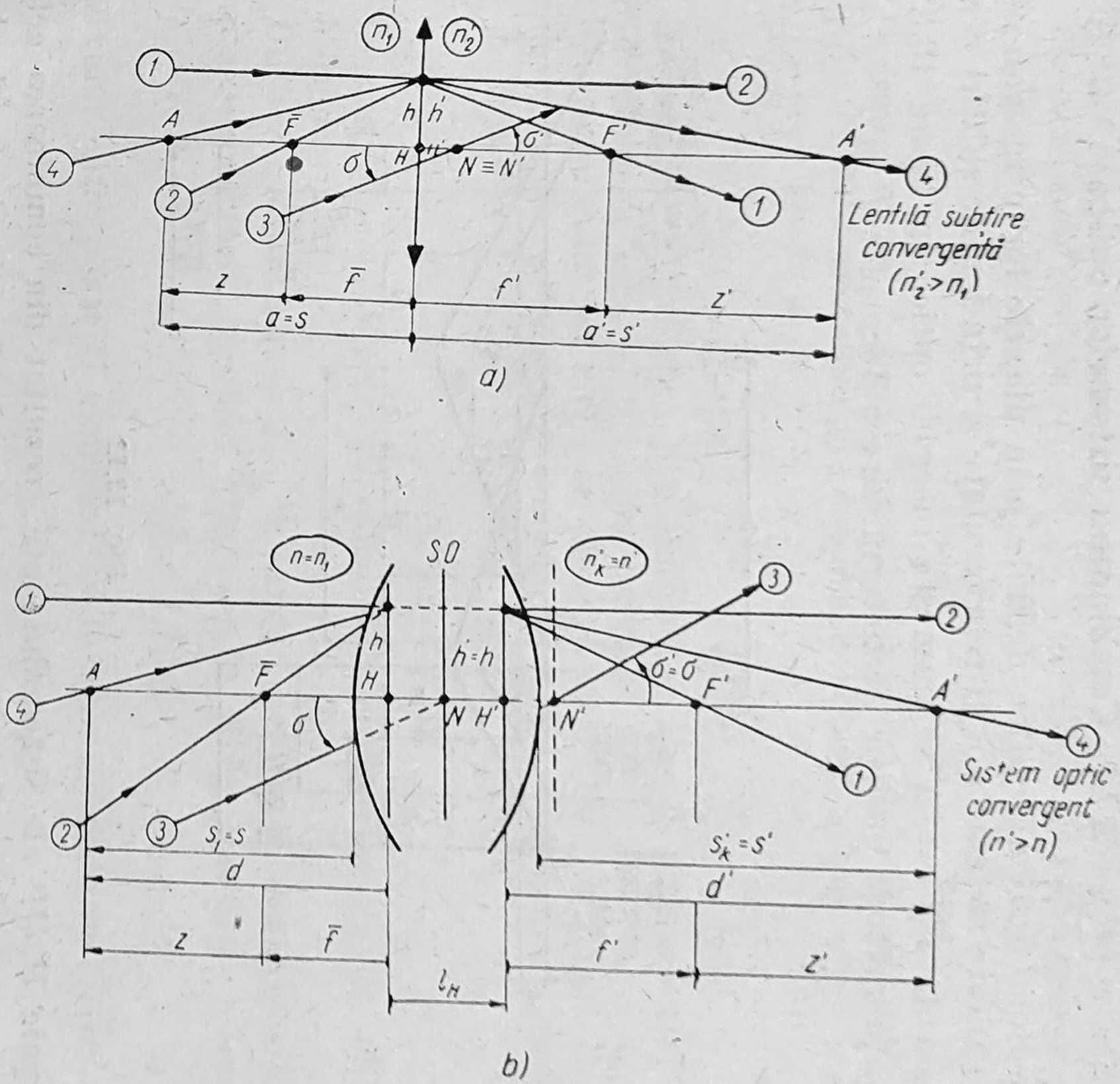


Fig. 13.31

13.7.9. **Combinarea sistemelor optice**

Fie două sisteme optice definite prin planele lor principale și planele focale. (Aceste sisteme pot fi reprezentate și prin lentile subțiri echivalente).

Distanța $\overline{F_1'F_2} = \Delta$ se numește interval optic. În figura 13.32 este prezentată metoda grafică de determinare a focarelor $\bar{F}$ și F' și a planelor

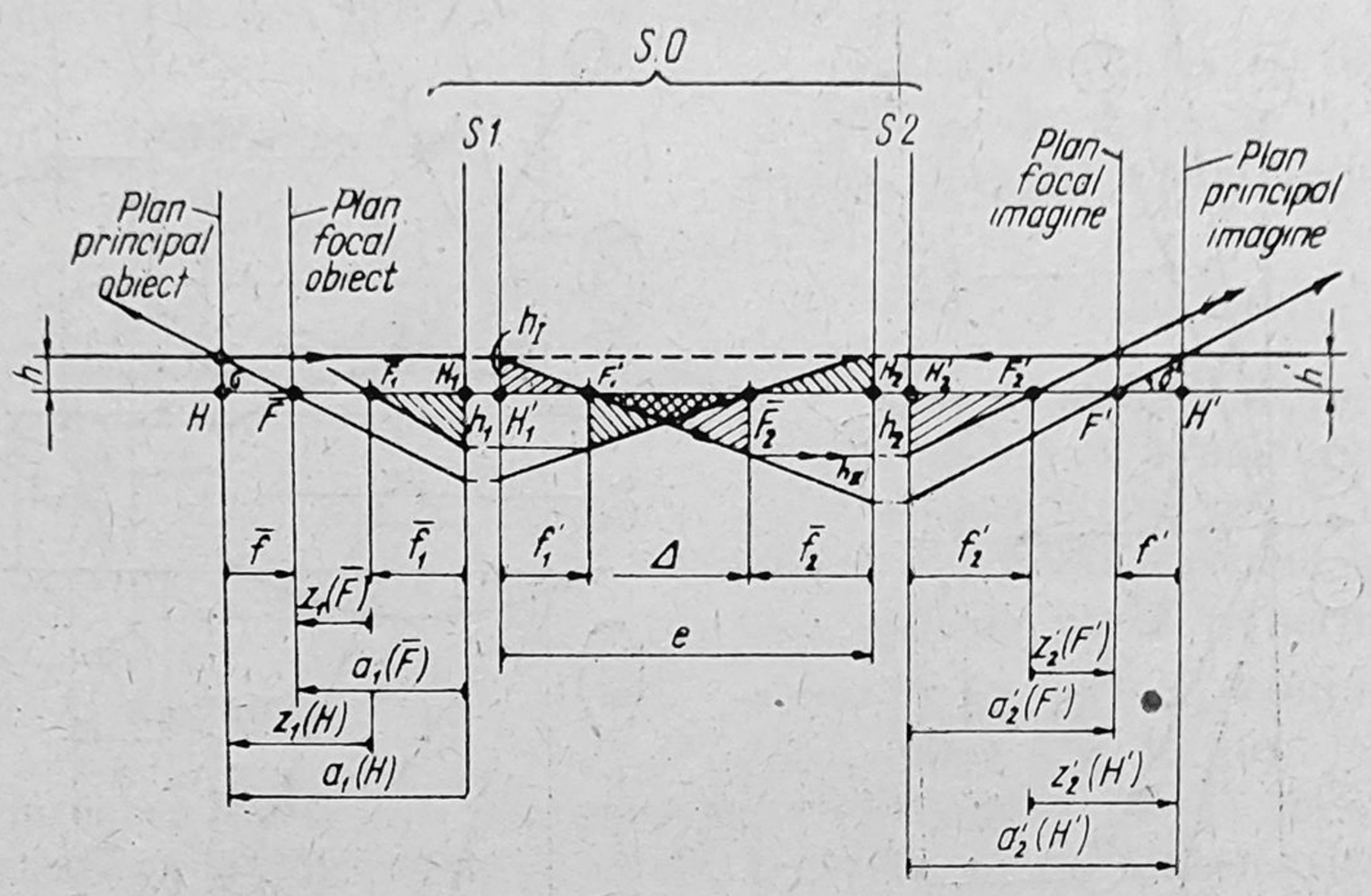


Fig. 13.32

principale H, H' ale sistemului optic, rezultat din combinarea celor două sisteme considerate. Trebuie determinate, în funcție de $\bar{f}_1$, f_1', Δ, $\bar{f}_2$, f_2':

$$\left.\begin{aligned}
&\text{— poziția focarului imagine } F' \begin{cases} z_2'(F') \\ \text{sau } a_2'(F') = z_2'(F') + f_2' \end{cases} \\
&\text{— distanța focală imagine a sistemului } f' = \frac{h}{\operatorname{tg} \sigma'} \\
&\text{— poziția planului principal } \begin{cases} z_2'(H') = z_2'(F') - f' \\ \text{sau } a_2'(H') = z_2'(H') + f_2' \end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (13.62)$$

Considerînd sensul de propagare invers celui convențional, mai trebuie determinate:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{— poziția focarului obiect } \bar{F} \begin{cases} z_1(\bar{F}) \\ \text{sau } a_1(\bar{F}) = z_1(\bar{F}) + \bar{f}_1 \end{cases} \\
&\text{— distanța focală obiect } \bar{f} = \frac{h'}{\operatorname{tg} \sigma} \\
&\text{— poziția planului principal obiect H : } \begin{cases} z_1(H) = z_1(\bar{F}) - \bar{f} \\ a_1(H) = z_1(H) + \bar{f}_1. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (13.63)$$

Se observă că toți acești parametri sînt determinați dacă se calculează $z_2'(F')$, f' ; $z_1(\bar{F})$, $\bar{f}$.

Pentru calculul lui $z_2'(F')$, se observă că F' este conjugat, față de sistemul $S2$, cu F_1' pentru care $z_2 = -\Delta$. Din relația de conjugare a lui Newton: $z_2 z_2' = \bar{f}_2 f_2'$, rezultă

$$z_2'(F') = -\bar{f}_2 f_2'/\Delta \tag{13.64}$$

Distanța focală imagine se calculează cu relația de definiție (13.60): $f' = h/\text{tg}\,\sigma'$. Din triunghiurile haşurate rezultă: $h/h_2 = -f_1'/\Delta$ și $\text{tg}\,\sigma' = -h_2/f_2'$, ceea ce duce la

$$f' = -f_1' f_2'/\Delta \tag{13.65}$$

Cu relațiile (13.62) se pot determina restul parametrilor ce definesc pozițiile planelor focal și principal imagine.

Pentru calculul lui $z_1(\bar{F})$ se observă că $\bar{F}$ este conjugat cu $\bar{F}_2$, față de sistemul $S1$. Din relația de conjugare a lui Newton $z_1 z_1' = \bar{f}_1 \cdot f_1'$, luînd $z_1' = \Delta$, rezultă

$$z_1(\bar{F}) = \bar{f}_1 f_1'/\Delta. \tag{13.66}$$

Distanța focală obiect se calculează cu relația de definiție (13.61): $\bar{f} = h'/\text{tg}\,\sigma$.

Din triunghiurile haşurate, în lungul razei care străbate sistemul de la dreapta spre stînga, rezultă: $h'/h_1 = \bar{f}_2/\Delta$ și $\text{tg}\,\sigma = h_1/\bar{f}_1$, ceea ce duce la

$$\bar{f} = \bar{f}_1 \bar{f}_2/\Delta \tag{13.67}$$

Intervalul optic poate fi exprimat în funcție de distanța $\overline{H_1' H_2} = e$

$$\Delta = e - f_1' + \bar{f}_2.$$

Dacă sistemele sînt scăldate în aer

$$\Delta = e - f_1' - f_2' \tag{13.68}$$

Folosind expresiile puterilor sistemelor optice: $\varphi_1' = 1/f_1'$; $\varphi_2' = 1/f_2'$; $\varphi' = 1/f'$, relația (13.65) se mai poate scrie:

$$\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2' - e\varphi_1'\varphi_2'. \tag{13.69}$$

Notînd cu h_I și h_{II} înălțimile de incidență ale razei care intră în sistem, venind paralel cu axa optică, $h_{II}/h_I = \eta_{II}$, se observă că

$$\eta_{II} = h_{II}/h_I = -\frac{e - f_1'}{f_1'} = 1 - e\varphi_1'. \tag{13.70}$$

Folosind raportul η_{II}, ecuația (13.69) care dă puterea sistemului obținut din combinarea sistemelor de puteri φ_1', φ_2' devine

$$\varphi_{12}' = \varphi_1' + \eta_{II} \cdot \varphi_2'. \tag{13.71}$$

Ecuația (13.71) se poate generaliza pentru cazul combinării a mai multor sisteme optice. Dacă la sistemul obținut din două sisteme optice se adaugă un al treilea sistem, atunci relația (13.71) devine

$$\varphi_{123}' = \varphi_{12}' + \eta_{III}\varphi_3' = \varphi_1' + \eta_{II}\varphi_2' + \eta_{III}\varphi_3',$$

ceea ce, prin generalizare, duce la relația

$$\varphi' = \varphi_1' + \eta_{11}\varphi_2' + \ldots + \eta_k\varphi_k'. \qquad (13.72)$$

Distanța focală a sistemului total va fi dată de relația : $f' = 1/\varphi$, iar mărirea transversală totală

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \ldots \beta_k. \qquad (13.73)$$

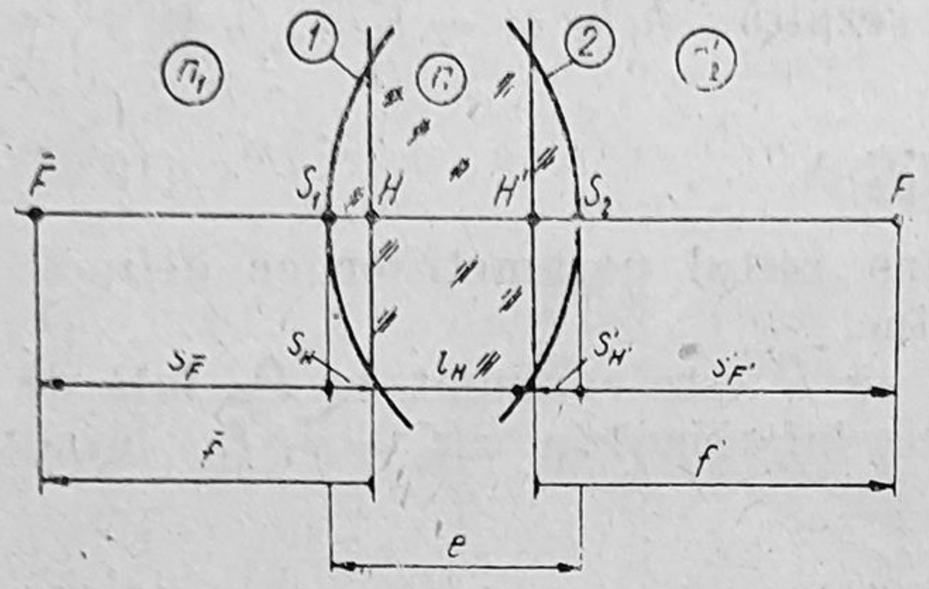


Fig. 13.33

13.7.10. **Aplicații la combinarea sistemelor optice**

a) Lentila cu dioptri sferici, constituie exemplul cel mai simplu de combinare a sistemelor optice (fig. 13.33).

Cum caracteristicile unui dioptru sferic se pot determina cu relațiile (13.34), rezultă că pozițiile planelor focale și ale planelor principale ale unei lentile se obțin aplicînd relațiile de combinare (13.62)...(13.67) :

— pentru dioptrul 1

$$r_1,\ n_1,\ n_1' = n \Rightarrow (13.34) \Rightarrow \begin{cases} f_1' = \dfrac{n}{n - n_1}\, r_1 \\ \bar{f}_1 = -\dfrac{n_1}{n - n_1}\, r_1 \end{cases}$$

— pentru dioptrul 2

$$r_2,\ n_2 = n,\ n_2' \Rightarrow (13.34) \Rightarrow \begin{cases} f_2' = -\dfrac{n_2'}{n - n_2'}\, r_2 \\ \bar{f}_2 = \dfrac{n}{n - n_2'}\, r_2 \end{cases}$$

— intervalul Δ (13.68) $\Rightarrow \Delta = e - f_1' + \bar{f}_2 = e - \dfrac{n}{n - n_1}\, r_1 + \dfrac{n}{n - n_2'}\, r_2.$

O lentilă se află, în majoritatea cazurilor, în aer, iar dacă se găsește într-un dublet sau triplet lipit poate fi considerată tot în aer, grosimea stratului de aer fiind făcută zero la combinarea cu celelalte lentile cu care vine în contact. Așadar, generalizarea indicilor de refracție n_1 și n_2' neavînd utilitate practică, vom lua $n_1 = n_2' = 1$ (lentila scăldată în aer).

Din aplicarea relațiilor (13.65) și (13.67) rezultă distanțele focale ale lentilei

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = \frac{\dfrac{n}{(n-1)^2}\, r_1 r_2}{e - \dfrac{n}{n-1}(r_1 - r_2)} \qquad (13.74)$$

$$\bar{f} = \frac{\bar{f}_1 \bar{f}_2}{\Delta} = -\frac{\dfrac{n}{(n-1)^2}\, r_1 r_2}{e - \dfrac{n}{n-1}(r_1 - r_2)} = -f'. \qquad (13.75)$$

Cu relaţiile (13.62) şi (13.64) se determină poziţia focarului imagine

$$s'_{F'} = a'_2(F') = -\frac{\bar{f}_1 f'_2}{\Delta} + f'_2 = f'\left(1 - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{e}{r_1}\right) \qquad (13.76)$$

Poziţiile planului principal imagine sînt

$$s'_{H'} = s'_{F'} - f' = -f'\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{e}{r_1}. \qquad (13.77)$$

Cu relaţiile (13.63) şi (13.66) se determină poziţia focarului obiect

$$s_{\bar{F}} = a_1(\bar{F}) = \frac{\bar{f}_1 f'_1}{\Delta} + \bar{f}_1 = \bar{f}\left(1 + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{e}{r_2}\right)$$

sau

$$s_{\bar{F}} = -f'\left(1 + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{e}{r_2}\right). \qquad (13.78)$$

Poziţia planului principal obiect este

$$s_H = s_{\bar{F}} - \bar{f} = \bar{f}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{e}{r_2} = -f'\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{e}{r_2}. \qquad (13.79)$$

Intervalul cuprins între planele principale se poate determina cu relaţia

$$l_H = e - s_H + s'_{H'}.$$

Puterea lentilei $\varphi = 1/f' \rightarrow$ (13.74)

$$\varphi = (n-1)\cdot(1/r_1 - 1/r_2) + [(n-1)^2/n]\cdot e/(r_1 r_2)$$

sau, folosind curburile în locul razelor,

$$\varphi = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) + [(n-1)^2/n]\cdot e\rho_1\rho_2. \qquad (13.80)$$

Pentru lentilele subţiri se consideră $e \ll \{|r_1|\ ;\ |r_2|\}$, ceea ce permite neglijarea lui e în relaţiile (13.74)...(13.80)

$$s'_{H'} = s_H = 0\ ;\ s'_{F'} = f'\ ;\ s_{\bar{F}} = \bar{f}.$$

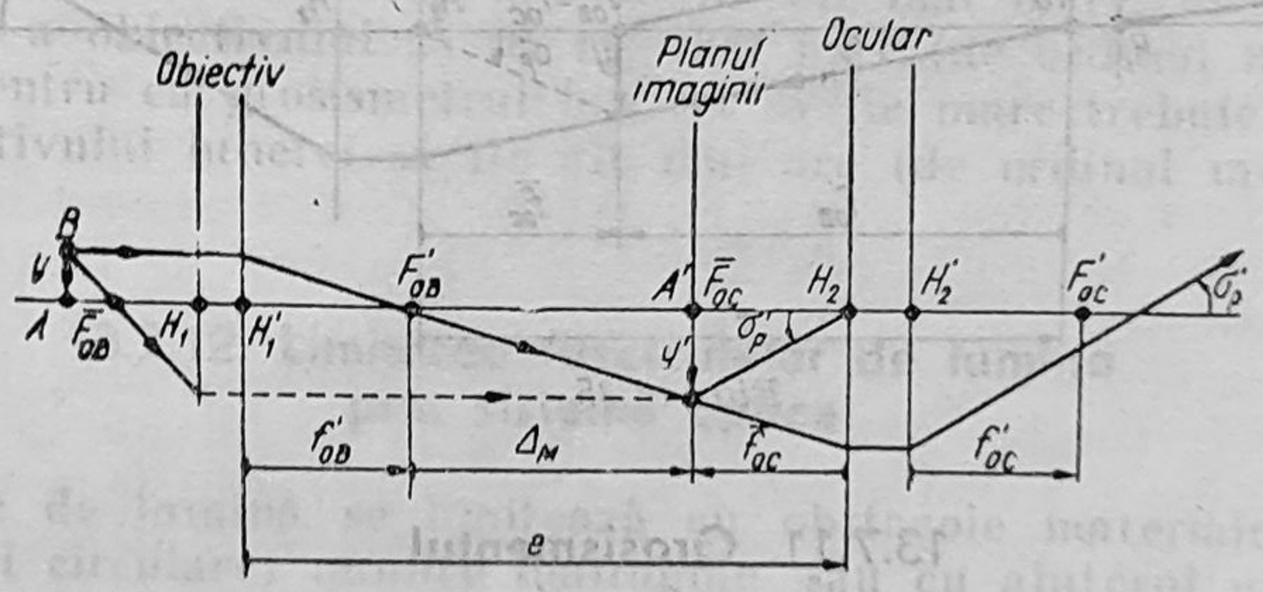


Fig. 13.34

Din relaţiile (13.74) şi (13.75) se regăsesc atît relaţiile (13.48) şi (13.49), cît şi puterea $\varphi = (n-1)\cdot(\rho_1 - \rho_2)$ (13.48').

b) Microscopul este un aparat folosit pentru observarea şi măsurarea obiectelor apropiate şi mici. Microscopul este format, în principal, din două sisteme optice: un obiectiv şi un ocular (fig. 13.34). Distanţa focală a obiectivului este de ordinul milimetrilor, iar cea a ocularului este de ordinul

centimetrilor. Intervalul optic $\Delta_M \simeq 160$ mm. Distanța focală a microscopului :

$$f'_M = -f'_{OB} f'_{OC} / \Delta_M < 0 \tag{13.81}$$

ceea ce arată că microscopul este un aparat focal (are distanță focală finită) și ocular (dă o imagine finală virtuală care poate fi observată cu ochiul).

Exemplu numeric : $f'_{OB} = 3$ mm, $f'_{OC} = 25$ mm, $\Delta_M = 150$ mm, $f_M = -0{,}5$ mm.
Puterea microscopului, exprimată în dioptrii (m^{-1}), este :

$$\varphi_M = 1/f'_M = -1\,000/0{,}5 = -2\,000 \text{ dpt.}$$

Pozițiile planelor focale ale microscopului :

$$z'_2(F') = -\bar{f}_{OC} \cdot f'_{OC} / \Delta_M = +25 \cdot 25/150 = +4{,}17 \text{ mm} ;$$

$$z_1(\bar{F}) = \bar{f}_{OB} \cdot \bar{f}'_{OB} / \Delta_M = -3 \cdot 3/150 = -0{,}06 \text{ mm}.$$

c) Luneta este un aparat optic folosit pentru observarea și măsurarea obiectelor situate la infinit. Lunetele utilizate în aparatele optice de măsurat (fără redresare) sînt formate din două sisteme optice : obiectivul și ocularul (fig. 13.35). Distanța focală a obiectivului lunetei este de ordinul 300—1 500 mm, iar cea a ocularului de ordinul centimetrilor. Intervalul optic este nul. Distanța focală a lunetei

$$f'_L = -f'_{OB} \cdot f'_{OC} / \Delta = \infty \tag{13.82}$$

ceea ce arată că luneta este un aparat optic afocal.

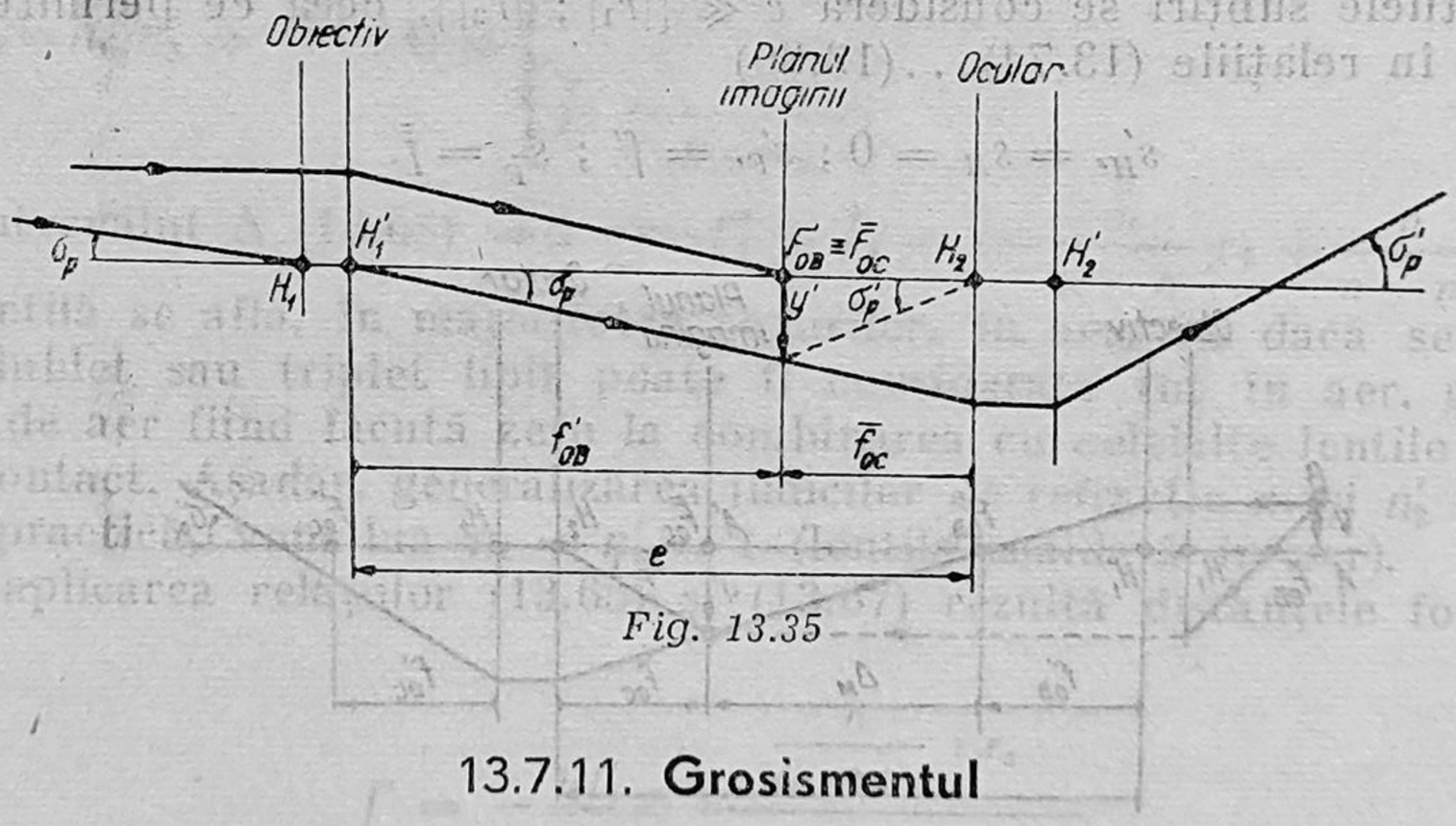


Fig. 13.35

13.7.11. Grosismentul

Pentru aparatele optice oculare mărimea caracteristică o constituie grosimentul, definit de raportul

$$\Gamma = \operatorname{tg} \sigma'_p / \operatorname{tg} \sigma_{ochi} \tag{13.83}$$

unde σ'_p este unghiul sub care se vede obiectul prin aparat, iar σ_{ochi} unghiul sub care se vede (sau s-ar vedea) obiectul cu ochiul liber.

a) Grosismentul microscopului. În cazul microscopului, obiectul fiind mic se observă (s-ar observa) cu ochiul situat la distanța vederii optime (fig. 13.36) : $D_0 = 250$ mm. Rezultă $\text{tg}\ \sigma_{och.} = -\ y/D_0$. Din figura care reprezintă schema optică a microscopului (fig. 13.34) rezultă

$$\text{tg}\ \sigma'_p = \frac{y'}{f_{oc}}, \text{ deoarece, în aer, } f_{oc} = -\ f'_{oc}.$$

Făcînd raportul celor două tangente, rezultă grosimentul microscopului

$$\Gamma_M = -\ \frac{y'}{y} \cdot \frac{D_0}{f'_{oc}} = -\ \beta_{ob} \cdot \frac{D_0}{f'_{oc}}.$$

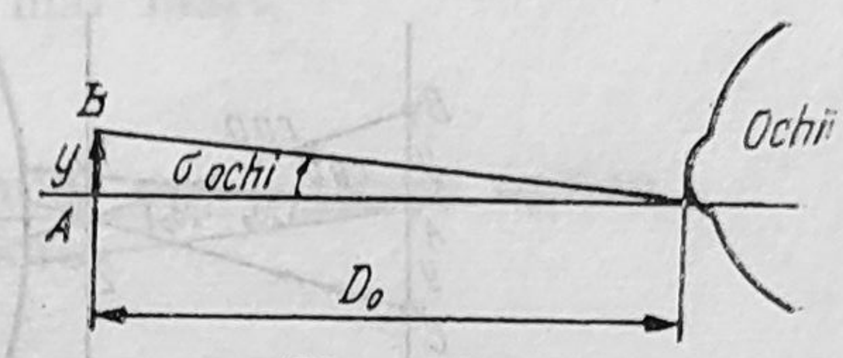


Fig. 13.36

Mărirea transversală a obiectivului : $\beta_{ob} = y'/y = -\ \Delta_M/f'_{ob}$.
Expresia grosimenetului devine

$$\Gamma_M = \frac{\Delta_M \cdot D_0}{f'_{ob} \cdot f'_{oc}}. \qquad (13.84)$$

b) Grosismentul lunetei. În cazul lunetei, unghiul sub care se vede obiectul cu ochiul liber este chiar σ_p, deoarece obiectul este situat la inifinit. Din schema optică a lunetei (13.35) rezultă

$$\text{tg}\ \sigma'_p = \frac{y'}{f'_{oc}}, \text{ ca și la microscop } f_{oc} = -\ f'_{oc}$$

$$\text{tg}\ \sigma_p = -\ \frac{y'}{f'_{ob}}$$

Făcînd raportul tangentelor rezultă grosismentul lunetei

$$\Gamma_L = -\ f'_{ob}/f'_{oc}. \qquad (13.85)$$

Comparație între obiectivul de microscop și obiectivul de lunetă : pentru ca grosismetrul microscopului să fie cît mai mare, este necesar ca distanța focală a obiectivului să fie cît mai mică (de ordinul milimetrilor), în timp ce, pentru ca grosismetrul lunetei să fie mare trebuie ca distanța focală a obiectivului lunetei să fie cît mai are (de ordinul metrului).

13.7.12. Limitarea fasciculelor de lumină prin sisteme optice

Fasciculele de lumină se limitează cu obstacole materiale (marginile unor deschideri circulare) numite diafragme sau cu ajutorul unor imagini ale acestora. Dintre diafragmele care pot exista într-un aparat optic (de exemplu, monturile tuturor lentilelor sau diafragme propriu-zise) două joacă roluri importante în formarea imaginilor prin aparat (fig. 13.37) :

1° *Diafragma de deschidere* (D_d), sau de apertură, are rolul de a limita înclinările razelor care intră în sistemul optic venind din planul obiect. Imaginile diafragmei de deschidere față de părțile sistemului optic anteri-

oară și posterioară se numesc pupilă de intrare (P_i), respectiv, pupilă de ieșire (P_e). Dintre imaginile tuturor diafragmelor, pupila de intrare se vede sub cel mai mic unghi $2\sigma_0$ (unghiul de deschidere sau de apertură) din centrul cîmpului obiect, în timp ce pupila de ieșire se vede sub cel mai mic unghi $2\sigma'_0$ din centrul cîmpului imagine.

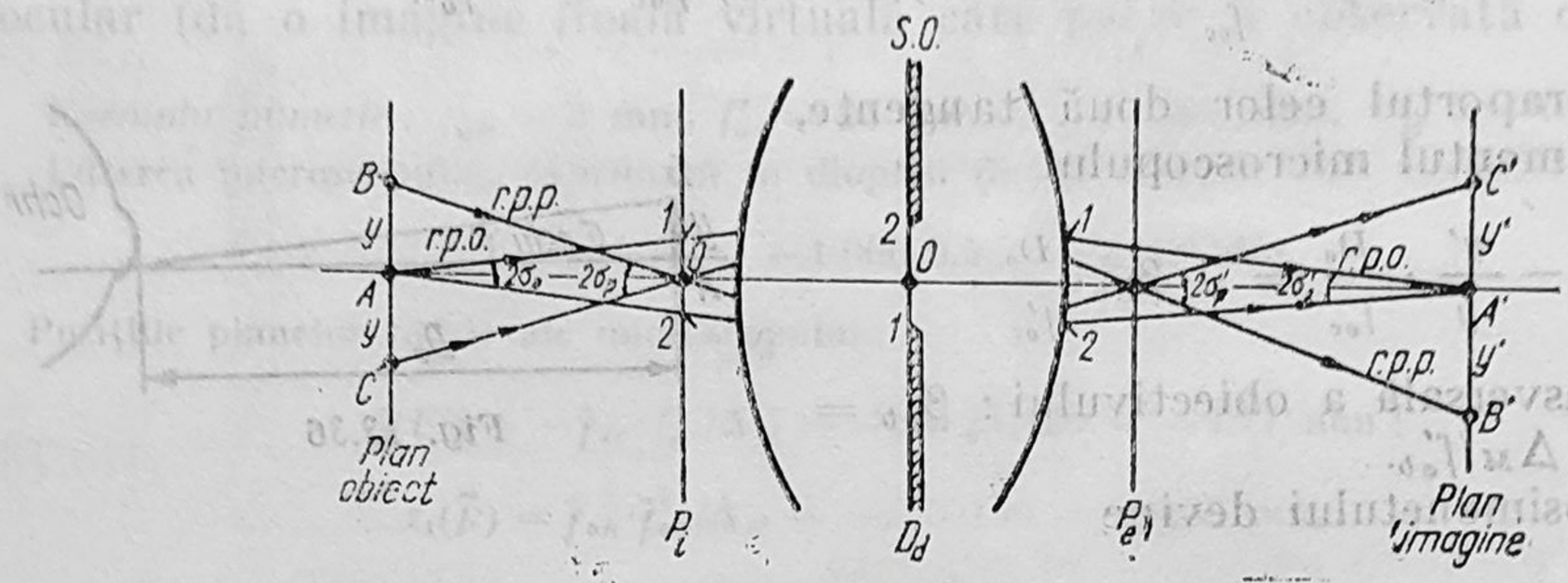


Fig. 13.37

O rază care pornește din marginea cîmpului obiect și trece prin centrul pupilei de intrare se numește rază pupilară principală (*r.p.p.*) sau rază principală ; această rază trece prin centrul diafragmei de deschidere și iese din sistem trecînd prin centrul pupilei de ieșire.

O rază care pornește din centrul cîmpului obiect și trece pe la marginea pupilei de intrare se numește rază pupilară obiectivă (*r.p.o.*) sau rază obiectivă ; această rază iese din sistem prin marginea analogă a pupilei de ieșire și determină centrul cîmpului imagine.

O rază care pornește din marginea cîmpului obiect și trece pe la marginea pupilei de intrare se numește rază pupilară marginală (*r.p.m.*) sau rază marginală. Razele marginale „îmbracă" tubul luminos care străbate sistemul optic ; în funcție de aceste raze se dimensionează componentele optice ale aparatului.

Dacă diafragma de deschidere se află în fața sistemului, aceasta este în același timp și pupilă de intrare a sistemului. Diafragma de deschidere constituie pupila de ieșire a sistemului, atunci cînd ea se află după sistemul optic.

2° *Diafragma de cîmp* (D_c) are rolul de a limita cîmpul obiect cuprins în planul obiect. Imaginile diafragmei de cîmp față de părțile sistemului optic aflate înaintea sau în urma sa (în sensul de propagare al luminii prin sistem) se numesc lucarnă de intrare (L_i), respectiv, lucarnă de ieșire (L_e). Dintre imaginile tuturor diafragmelor, lucarna de intrare se vede sub cel mai mic unghi $2\sigma_p$ din centrul pupilei de intrare, în timp ce lucarna de ieșire se vede sub cel mai mic unghi $2\sigma'_p$ din centrul pupilei de ieșire.

13.7.13. Condiția de conectare a tuburilor luminoase

În aparatele optice de măsurat (microscoape, lunete, proiectoare de drofile, aparate foto etc.) este necesară conectarea tuburilor luminoase astfel încît să nu existe pierderi de lumină. Condiția de conectare a tuburilor lu-

minoase este ca pupila de ieșire a unui sistem optic să coincidă cu pupila de intrare în sistemul optic următor.

La aparatele optice oculare pupila de ieșire trebuie să corespundă ca mărime și poziție pupilei ochiului (∅ 2—6 mm, iar pentru poziție se proiectează „bonete" pentru sprijinirea orbitei ochiului — pupila de ieșire trebuind să se formeze între 10—20 mm de ultimul dioptru al sistemului optic). Condiția de conectare a tuburilor luminoase (inclusiv cu ochiul) este cu atît mai importantă cu cît unghiurile σ'_p sînt mai mari.

13.7.14. Aplicații la formarea imaginilor prin sisteme optice cu raze pupilare

Vom considera trei cazuri posibile:

a) planul obiect și pupila de intrare la distanțe finite față de sistemul optic (fig. 13.38):

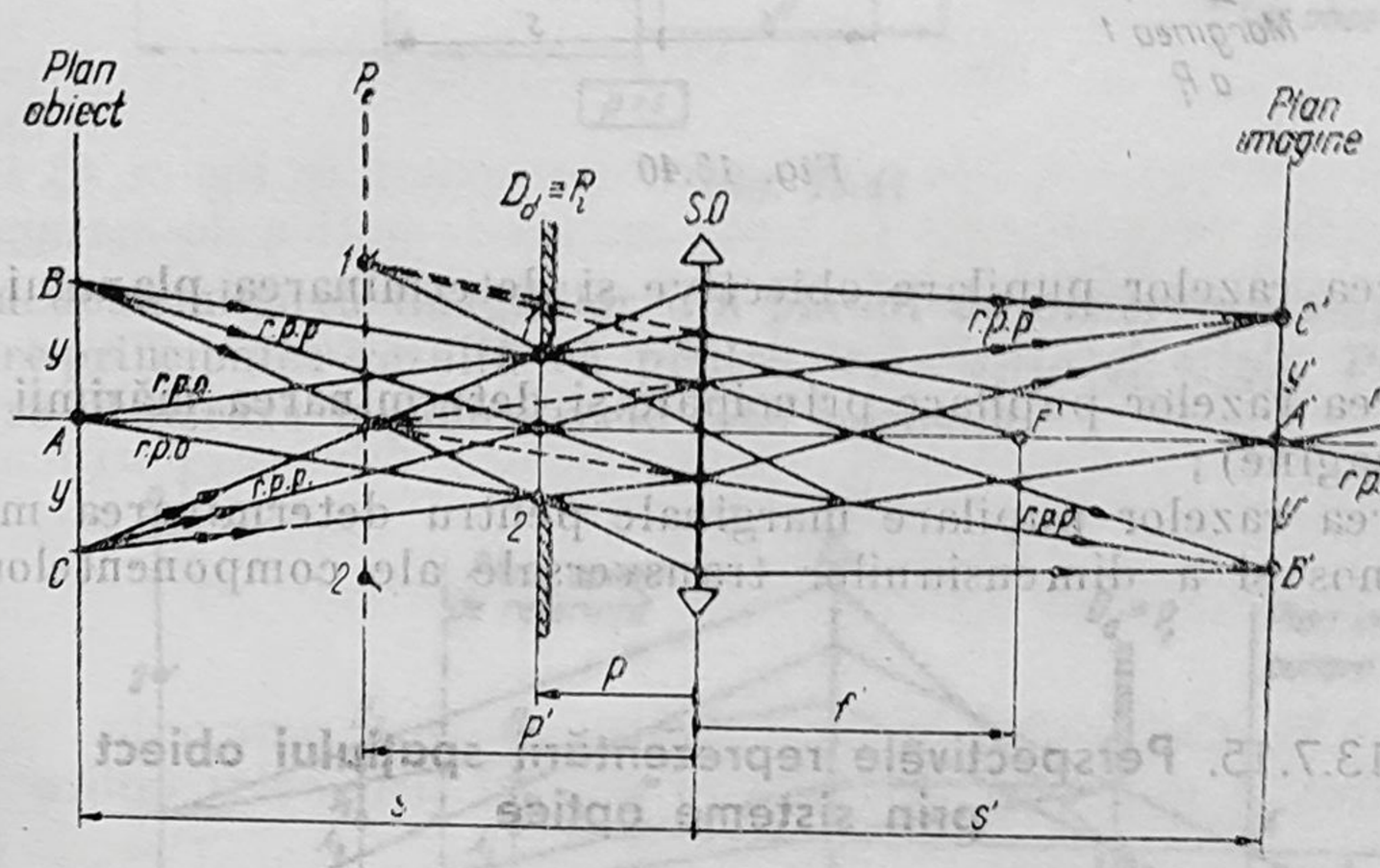


Fig. 13.38

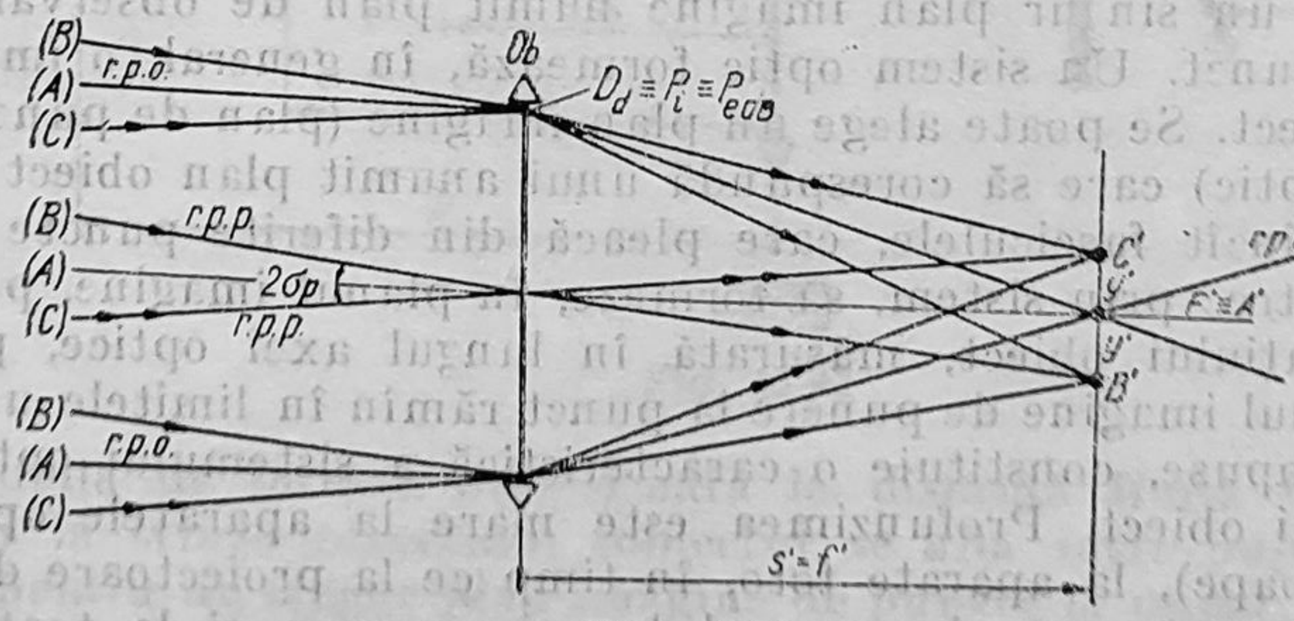


Fig. 13.39

b) **planul obiect la infinit, iar pupila de intrare la distanța finită. Exemplu: luneta, avînd cîmpul obiect unghiular $2\sigma_p$ (fig. 13.39). Diafragma de deschidere a lunetei este montura obiectivului.**

c) planul obiect la distanță finită, iar pupila de intrare la infinit (exemplu : microscop de măsurat sau proiector de profile, fig. 13.40).

Etapele determinării grafice a imaginilor prin sisteme optice, cu raze pupilare, sînt :

— determinarea pupilelor de intrare și de ieșire (cu raze paralele cu axa optică și prin focare) ;

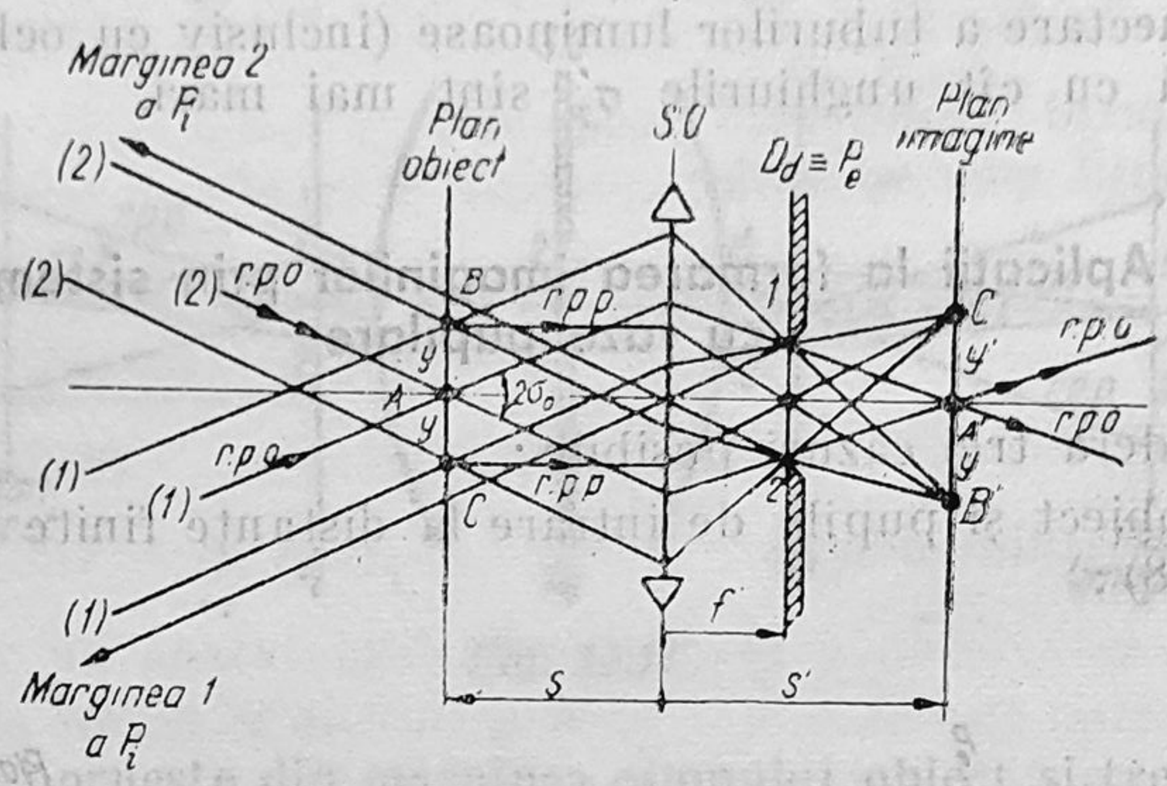


Fig. 13.40

— trasarea razelor pupilare obiective și determinarea planului imagine (teoretic) ;

— trasarea razelor pupilare principale și determinarea mărimii imaginii (în planul imagine) ;

— trasarea razelor pupilare marginale pentru determinarea marginilor tubului luminos și a dimensiunilor transversale ale componentelor optice.

13.7.15. Perspectivele reprezentării spațiului obiect prin sisteme optice

Perspectiva este modul în care este reprezentat spațiul printr-un sistem optic, folosind un singur plan imagine numit plan de observare sau plan de punere la punct. Un sistem optic formează, în general, o imagine plană a spațiului obiect. Se poate alege un plan imagine (plan de punere la punct a sistemului optic) care să corespundă unui anumit plan obiect din spațiul obiect, astfel încît fasciculele, care pleacă din diferite puncte ale acestui plan obiect și trec prin sistem, să formeze, în planul imagine, pete minime. Adîncimea spațiului obiect, măsurată în lungul axei optice, pentru care petele din planul imagine de punere la punct rămîn în limitele unor condiții de claritate impuse, constituie o caracteristică a sistemului optic : profunzimea spațiului obiect. Profunzimea este mare la aparatele optice afocale (lunete, telescoape), la aparate foto, în timp ce la proiectoare de profile, la microscoape de măsurat, în general la microscoape și la toate aparatele optice de măsurat, profunzimea este mică și foarte mică.

Ținînd seama de profunzimea spațiului obiect și de formarea imaginilor cu raze pupilare, există trei tipuri de perspective, determinate de poziția pupilei de intrare față de planul obiect de referință :

a) Pupila de intrare este situată la distanță finită față de sistemul optic și la dreapta obiectului, considerînd sensul de propagare al luminii de la stînga spre dreapta : pentru un singur plan imagine de punere la punct, la obiecte egale, dar situate la distanțe diferite, imaginea mai mare corespunde obiectului aflat mai aproape. Este *perspectiva naturală* (sau obișnuită, sau *entocentrică*), reprezentată în figura 13.41.

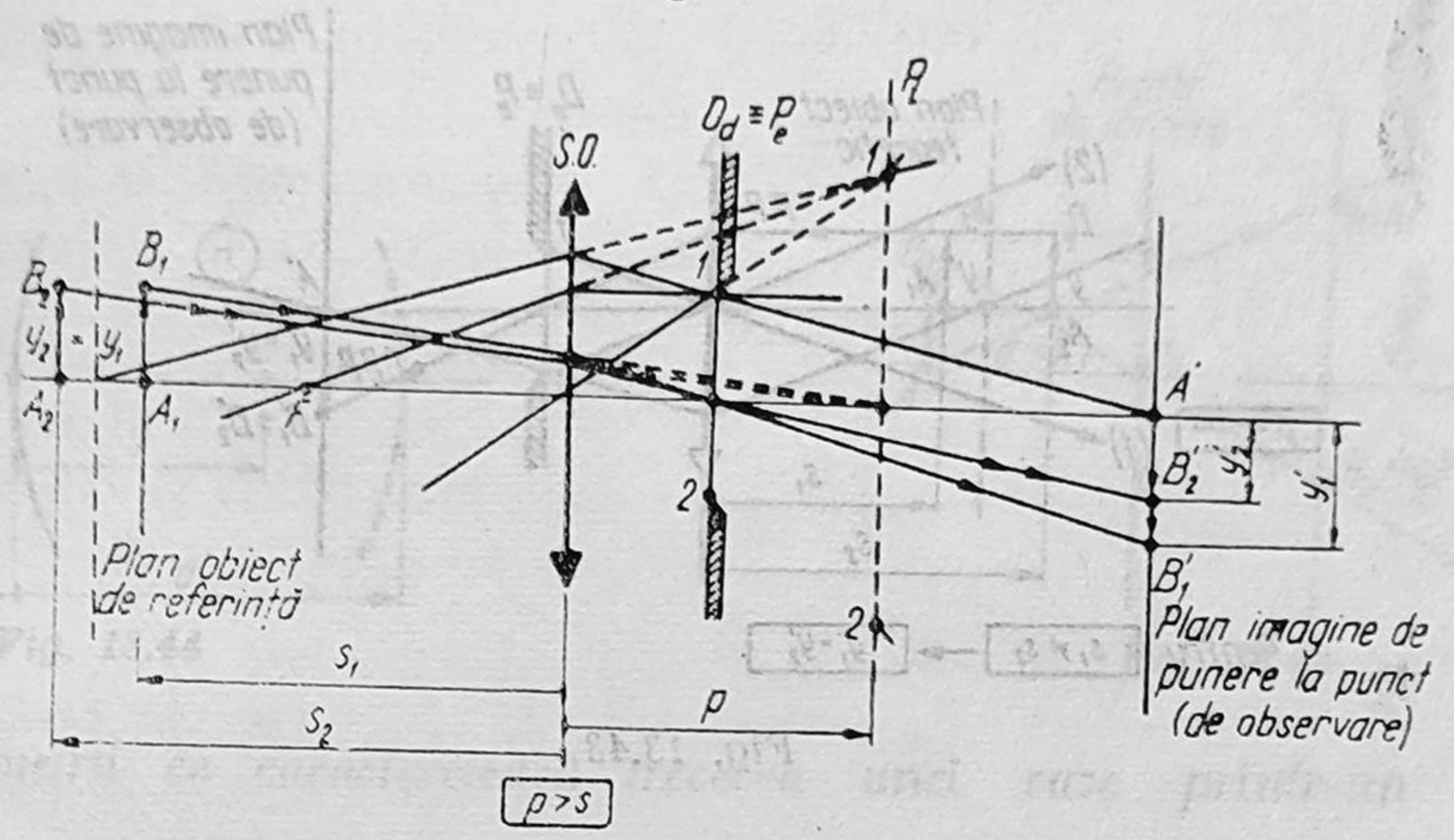


Fig. 13.41

La determinarea imaginilor din planul de observare s-au utilizat razele pupilare principale: rezultă că pentru $|s_1| < |s_2| \rightarrow |y_1'| < |y_2'|$. Perspectiva obișnuită se utilizează la obiectivele foto normale.

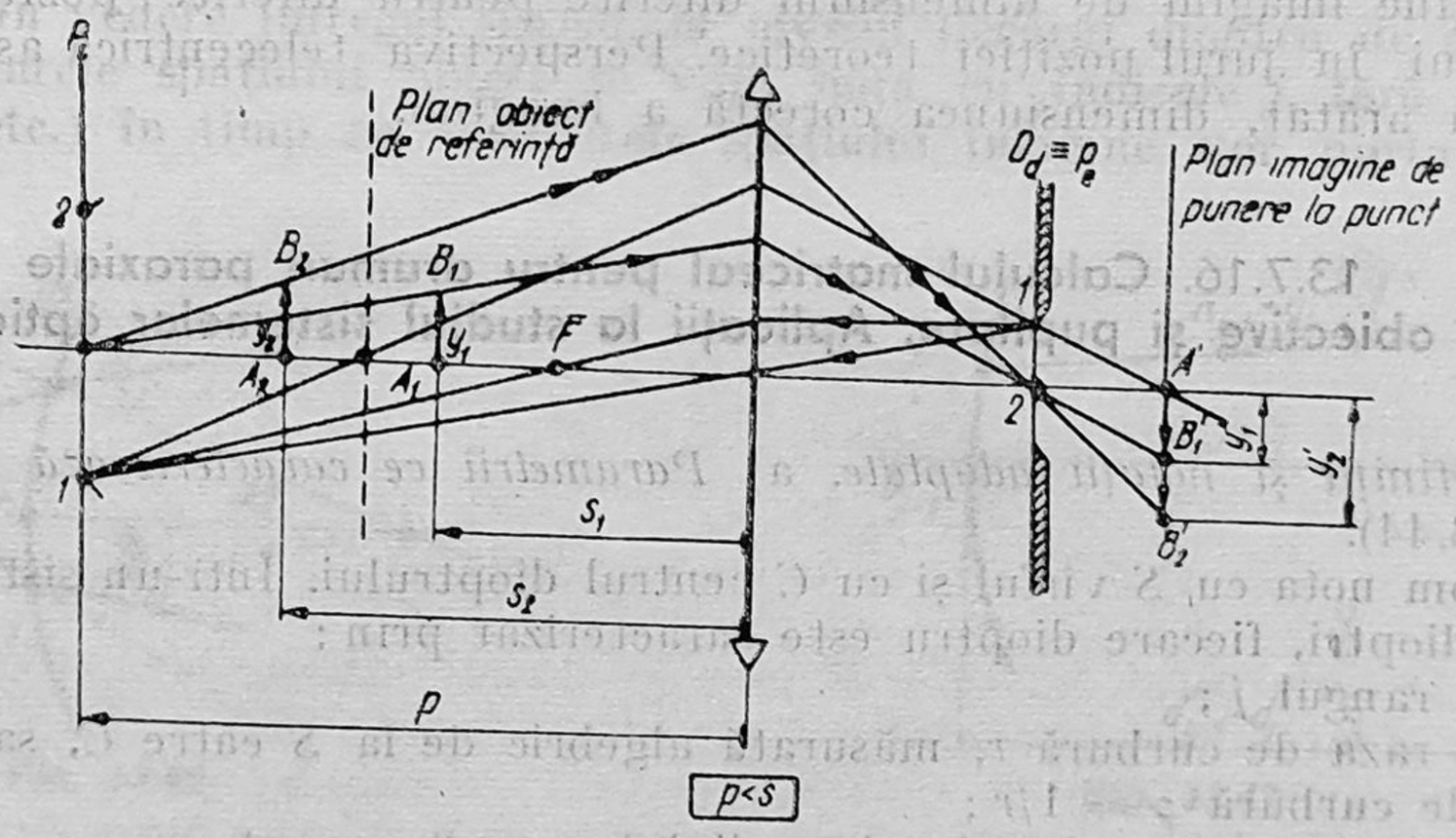


Fig. 13.42

b) Pupila de intrare este situată la distanță finită față de sistemul optic, dar la stînga obiectului (obiectul se află între pupila de intrare și sistem) ; pentru un singur plan imagine de punere la punct, la obiecte egale dar situate la distanțe diferite, imaginea mai mare corespunde obiectului aflat mai departe. Aceasta este *perspectiva hipercentrică*, reprezentată în figura 13.42. Se observă că pentru $|s_1| < |s_2|$ se obține $|y_1'| < |y_2'|$. Perspectiva hipercentrică se utilizează, rareori, la unele obiective foto, pentru efecte speciale.

c) Cînd pupila de intrare se află la infinit, iar obiectul la distanță finită, se formează *perspectiva telecentrică:* într-un singur plan imagine de punere la punct, imaginile unui obiect aflat la diferite distanțe (în jurul planului obiect de referință) sînt egale, chiar dacă nu sînt perfect clare. Această perspectivă se obține montînd diafragma de deschidere în focarul imagine al

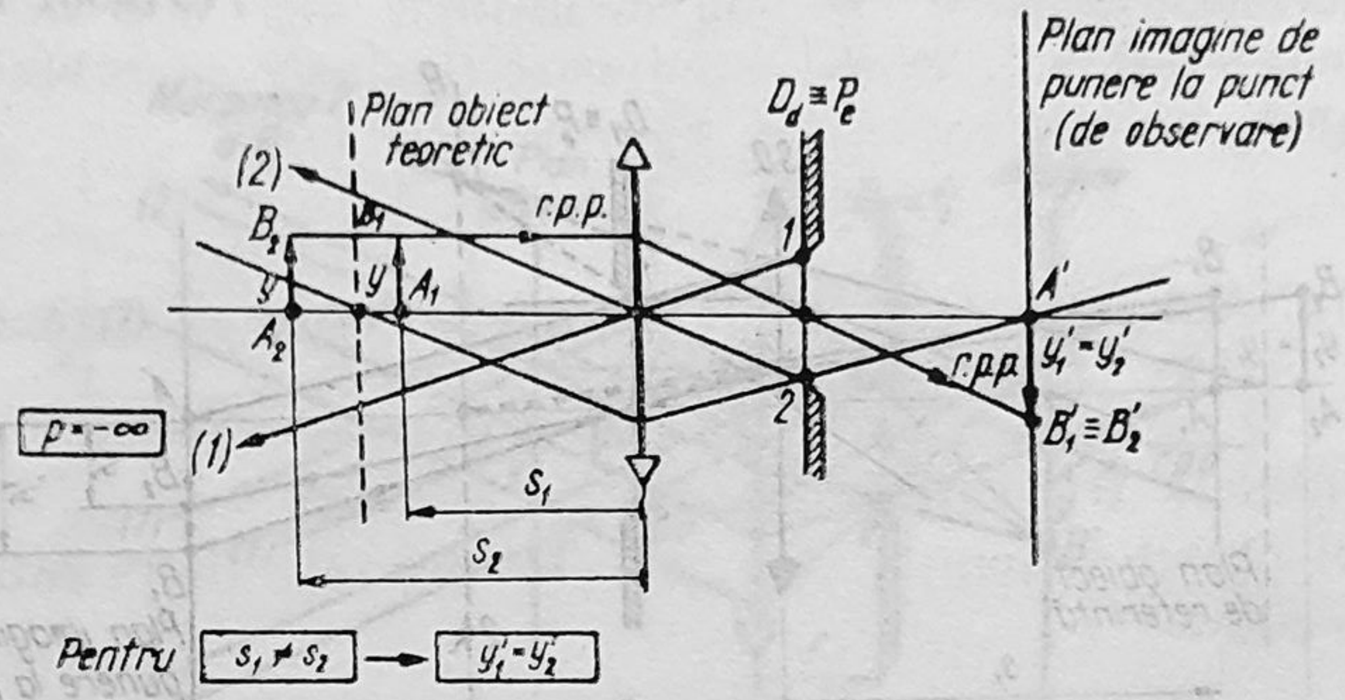


Fig. 13.43

sistemului optic convergent, așa cum este reprezentat în figura 13.43. Perspectiva telecentrică se utilizează la toate aparatele optice de măsurat. Cum obiectul de măsurat nu poate fi așezat exact în planul obiect teoretic, conjugat cu planul imagine de punere la punct unde se află reticulul gradat cu care se efectuează măsurarea, în cazul unor perspective ento- sau hipercentrice s-ar obține imagini de dimensiuni diferite pentru diferite poziționări ale obiectului în jurul poziției teoretice. Perspectiva telecentrică asigură, așa cum s-a arătat, dimensiunea corectă a imaginii.

13.7.16. Calculul matriceal pentru drumuri paraxiale obiective și pupilare. Aplicații la studiul sistemelor optice

Definiții și notații adoptate. a) *Parametrii ce caracterizează un dioptru* (fig. 13.44).

Vom nota cu S vîrful și cu C centrul dioptrului. Într-un sistem de mai mulți dioptri, fiecare dioptru este caracterizat prin:

— rangul j;

— raza de curbură r, măsurată algebric de la S către C, sau inversul razei de curbură $\rho = 1/r$;

— indicele de refracție al mediului care îl precede n sau care îi urmează n';

— distanța care îl separă de dioptrul precedent d, sau de dioptrul următor d'.

În general, vom determina un dioptru prin parametrii ρ_j, n_j', d_j'.

b) *Parametrii ce caracterizează o rază* (fig. 13.45):

— unghiul făcut cu axa de o rază pupilară obiectivă σ;

— unghiul făcut cu axa de o rază pupilară principală σ_p;

— înălțimea de incidență h într-un plan de abscisă cunoscută.

Se poate demonstra că mărimea $\mathcal{L} = n\ (h \cdot \sigma_p - h_p \cdot \sigma)$ nu depinde de abscisa punctelor H și H_p și că rămîne constantă (invariabilă) la trecerea razelor prin sistemul optic. Este vorba despre invariantul Langrange, scris pentru raza principală și pentru cea obiectivă :

$$\mathcal{L} \equiv n(h\sigma_p - h_p\sigma) = n'(h'\sigma'_p - h'_p\sigma') \tag{13.86}$$

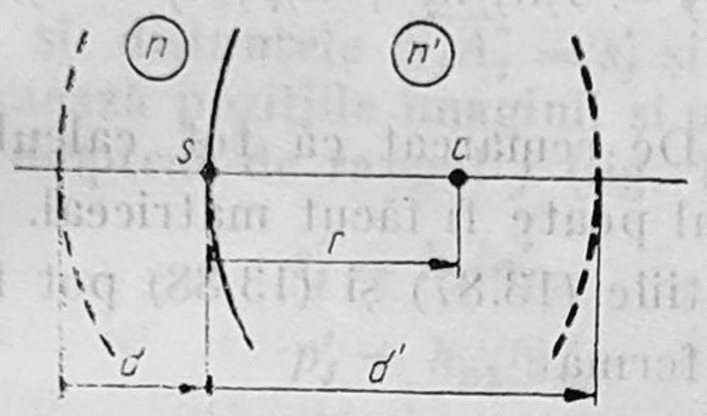


Fig. 13.44

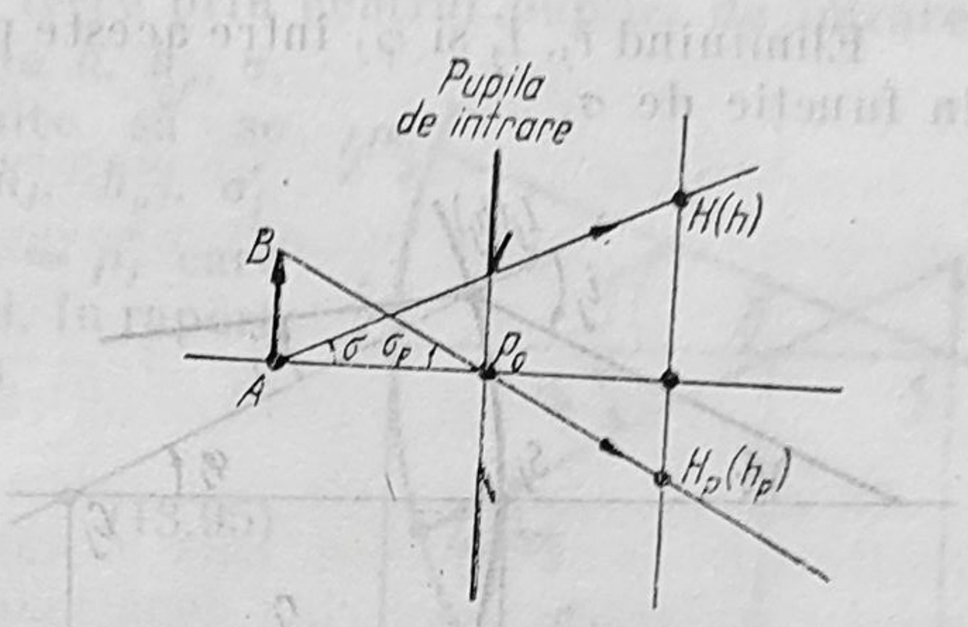


Fig. 13.45

c) *Parametrii ce caracterizează trecerea unei raze printr-un dioptru* (fig. 13.46) :

— punctele de incidență I ;

— înălțimea de incidență h (ordonatele punctelor I) ;

— unghiurile de incidență și de refracție i și i'. Acestea se măsoară de la normală la rază ;

— unghiul normalei cu axa optică, φ.

Avînd în vedere întregul sistem, la nivelul fiecărui dioptru de rang j, toate elementele spațiului obiect le vom nota cu indicele j, fără accent (σ_j, i_j, A_j etc.) în timp ce elementele spațiului imagine vor purta indi-

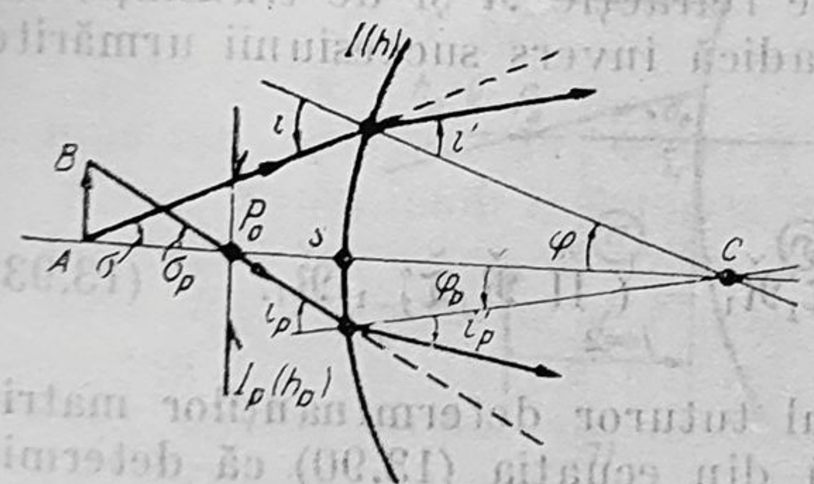


Fig. 13.46

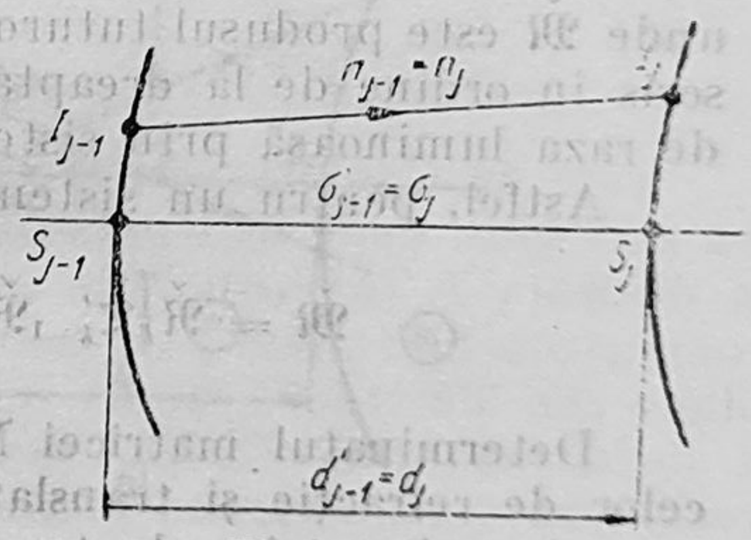


Fig. 13.47

cele j și accent (σ'_j, i'_j, A'_j etc.). Totodată, elementele referitoare la spațiul obiect inițial le vom nota fără indice și fără accent (n, σ, A, B etc.), iar elementele spațiului imagine final, fără indice și cu accent (n', σ', A', B' etc.).

Parametrii h, σ, n ai dioptrului de rangul j sînt dați de ecuațiile (fig. 13.47)

$$\begin{aligned} h_j &= h'_{j-1} - d'_{j-1} \cdot \sigma'_{j-1} \\ \sigma_j &= \sigma'_{j-1} \\ n_j &= n_{j-1}. \end{aligned} \tag{13.87}$$

Refracția unei raze paraxiale se exprimă cu relațiile (fig. 13.48)

$$\varphi_j = h_j \rho_j$$

$$i_j = -\varphi_j + \sigma_j\,;\; i'_j = i_j n_j / n'_j \tag{13.88}$$

$$\sigma'_j = i'_j + \varphi_j.$$

Eliminînd i_j, i'_j și φ_j între aceste patru ecuații se poate calcula direct σ'_j, în funcție de σ_j

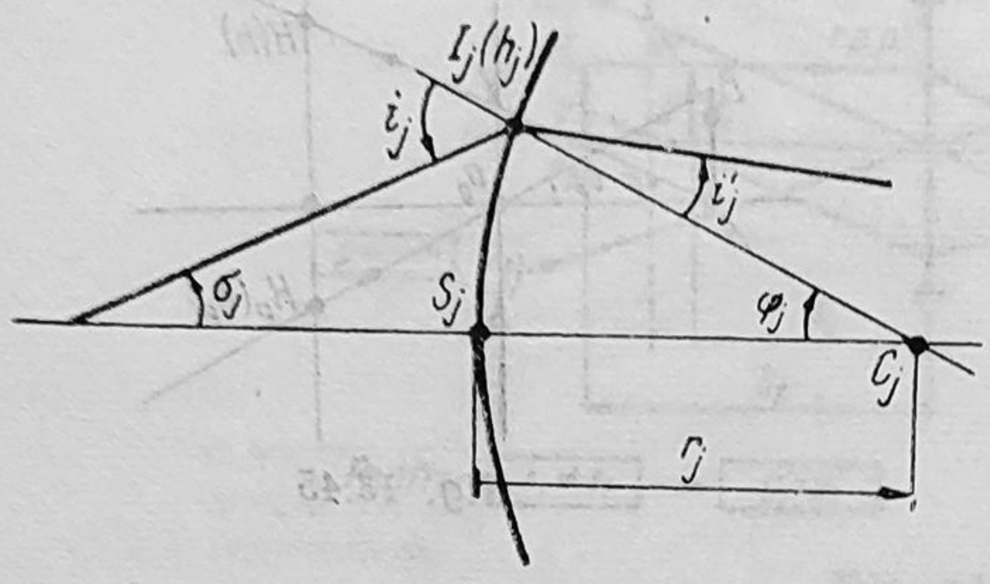


Fig. 13.48

$$\sigma'_j = \sigma_j n_j / n'_j + h_j \rho_j (n'_j - n_j)/n'_j. \tag{13.89}$$

De remarcat că tot calculul paraxial poate fi făcut matriceal. Astfel, ecuațiile (13.87) și (13.88) pot fi puse sub forma

$$\begin{pmatrix} h_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = \check{\mathfrak{T}}'_{j-1} \cdot \begin{pmatrix} h_{j-1} \\ \sigma'_{j-1} \end{pmatrix},\quad \check{\mathfrak{T}}'_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & -d'_{j-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13.90}$$

$$\begin{pmatrix} h_j \\ \sigma'_j \end{pmatrix} = \check{\mathfrak{R}}_j \cdot \begin{pmatrix} h_j \\ \sigma_j \end{pmatrix},\quad \check{\mathfrak{R}}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_j / n'_j & n_j / n'_j \end{pmatrix}; \tag{13.91}$$

$\Phi_j = (n'_j - n_j)\rho_j$ reprezină puterea dioptrului j.

Transformarea liniară, între spațiul obiect inițial și spațiul imagine final, poate fi scrisă sub formă matriceală :

$$\begin{pmatrix} h' \\ \sigma' \end{pmatrix} = \check{\mathfrak{M}} \cdot \begin{pmatrix} h \\ \sigma \end{pmatrix} \tag{13.92}$$

unde $\check{\mathfrak{M}}$ este produsul tuturor matricelor de refracție $\check{\mathfrak{R}}$ și de translație $\check{\mathfrak{T}}'$ scris în ordine de la dreapta spre stînga, adică invers succesiunii urmărite de raza luminoasă prin sistemul optic

Astfel, pentru un sistem cu k dioptri

$$\check{\mathfrak{M}} = \check{\mathfrak{R}}_k \check{\mathfrak{T}}'_{k-1} \check{\mathfrak{R}}_{k-1} \check{\mathfrak{T}}'_{k-2} \ldots \check{\mathfrak{R}}_2 \check{\mathfrak{T}}'_1 \check{\mathfrak{R}}_1 = \Big(\prod_{j=2}^{k} \check{\mathfrak{R}}_j \check{\mathfrak{T}}'_{j-1}\Big) \check{\mathfrak{R}}_1. \tag{13.93}$$

Determinatul matricei $\check{\mathbf{M}}$ este produsul tuturor determinanților matricelor de refracție și translație. Se observă din ecuația (13.90) că determinantul unei matrice de translație este întotdeauna unitar, iar din ecuația (13.91) că determinantul unei matrice de refracție este dat de raportul între indicii de refracție ce preced și cei care urmează dioptrului. Astfel, determinantul matricei $\check{\mathfrak{M}}$ devine produsul determinanților matricelor de refracție

$$\det \check{\mathfrak{M}} = \frac{n_k}{n'_k} \frac{n_{k-1}}{n'_{k-1}} \ldots \frac{n_2}{n'_2} \frac{n_1}{n'_1}.$$

Dar $n'_1 = n_2$, $n'_2 = n_3, \ldots$ ș.a.m.d., aceasta permițînd să se scrie

$$\det \check{\mathfrak{M}} = n/n' \tag{13.94}$$

unde n este indicele spațiului obiect inițial, iar n' indicele de refracție al spațiului imagine final.

Se studiază mersul a două raze particulare: prima este raza obiectivă (de deschidere) care pornește din centrul cîmpului obiect A, situat pe axa optică a sistemului, iar a doua este o rază principală care pornește dintr-un punct din afara axei B și trece prin centrul pupilei de intrare P_0.

După fixarea elementelor inițiale h, h_p, σ, σ_p, mersul razelor paraxiale permite să se calculeze pentru fiecare dioptru h_j, h_{pj}, σ'_j, σ'_{pj} și distanțele $\overline{S_jA'_j} = s'_j$ și $\overline{S_jP'_j} = p'_j$ care formează pozițiile imaginii și pupilei, în raport cu dioptrul de rangul j (fig. 13.49)

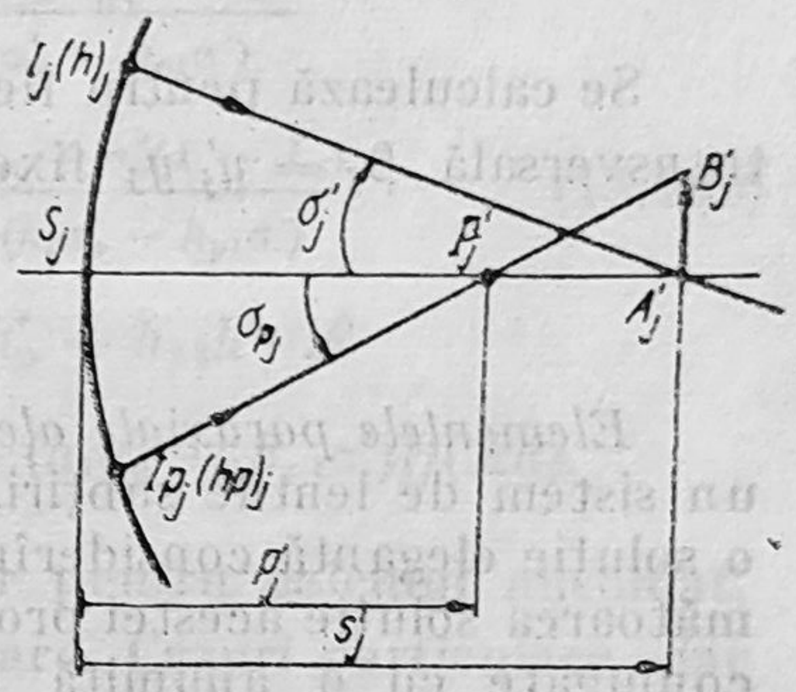


Fig. 13.49

$$s'_j = h_j/\sigma'_j$$
$$p'_j = h_{pj}/\sigma'_{pj} \qquad (13.95)$$

Pentru a fixa practic condițiile inițiale, distingem două cazuri, după cum obiectul este la infinit sau la distanță finită.

a) *Cazul obiectului la infinit* (fig. 13.50, a). Se alege ca plan de plecare planul pupilei de intrare considerată ca și cum ar fi dioptru de rangul 0. În acest caz, h reprezintă raza pupilei de intrare, iar elementele inițiale sînt

$$h_0 = h\,;\ h_{p0} = h_p = 0\,;\ n'_0 = n$$
$$\sigma'_0 = \sigma = 0\,;\ \sigma'_{p0} = \sigma_p\,;\ d'_0 = \overline{P_0S_1}. \qquad (13.96)$$

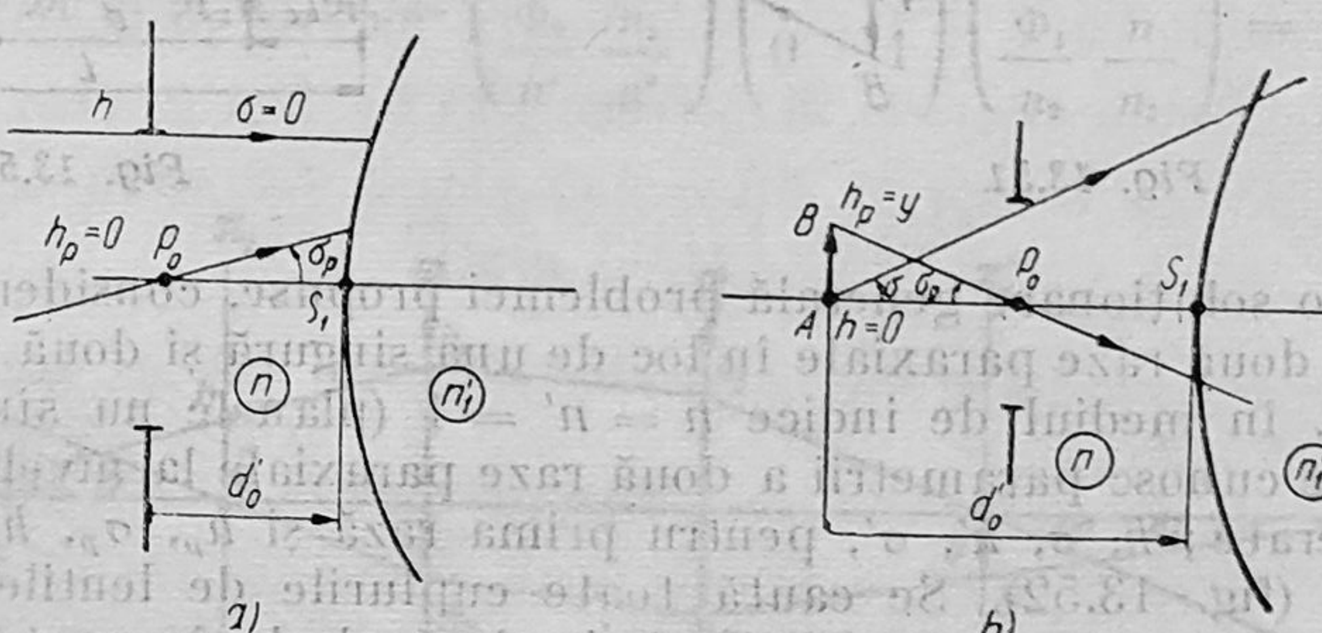


Fig. 13.50

Se calculează pentru fiecare dioptru s'_j și p'_j cu relațiile (13.95). Distanța focală imagine f'_j fixează dimensiunea imaginii:

$$f'_j = h/\sigma'_j. \qquad (13.97)$$

În cazul unui sistem optic afocal $\sigma' = 0\,;\ f' \to \infty$ și se definește grosimentul sistemului

$$\Gamma = \frac{h}{h'} = \frac{n'\sigma'_p}{n\sigma_p}\,. \qquad (13.98)$$

b) *Obiectul este situat la distanță finită* (fig. 13.50, b). Se alege ca plan de plecare planul obiect, considerîndu-l ca dioptru de ragnul 0. Se notează cu y și y' dimensiunile obiectului, respectiv ale imaginii. Elementele inițiale ale mersului razelor vor fi

$$h_0 = h = 0\,;\; h_{p0} = h_p = y\,;\; n'_0 = n$$
$$\sigma'_0 = \sigma\,;\; \sigma'_{p0} = \sigma_p\,;\; d'_0 = \overline{AS_1}. \tag{13.99}$$

Se calculează pentru fiecare dioptru s'_j și p'_j, cu relațiile (13.95). Mărirea transversală $\beta_j = y'_j/y_j$ fixează dimensiunea imaginii

$$\beta_j = \frac{n\sigma}{n'_j\sigma'_j}\,. \tag{13.100}$$

Elementele paraxiale ale unui sistem de lentile subțiri. Problema de a găsi un sistem de lentile subțiri, care să răspundă anumitor condiții își găsește o soluție elegantă considerînd două raze paraxiale. H. H. Hopkins a dat următoarea soluție acestei probleme: a fixat două puncte A și A' care trebuie conjugate cu o anumită mărire β, două puncte P_0 și P'_0 care reprezintă pozițiile pupilelor de intrare și ieșire, urmărind apoi toate cuplurile de lentile subțiri care îndeplinesc aceste condiții (fig. 13.51).

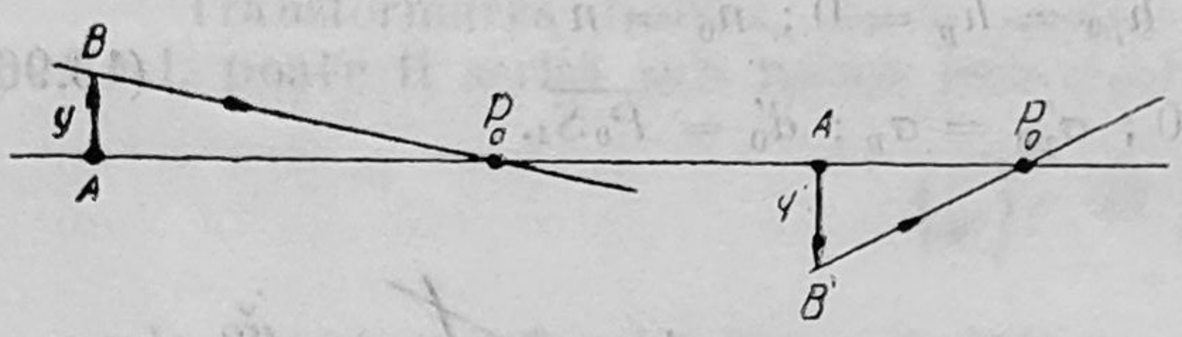


Fig. 13.51

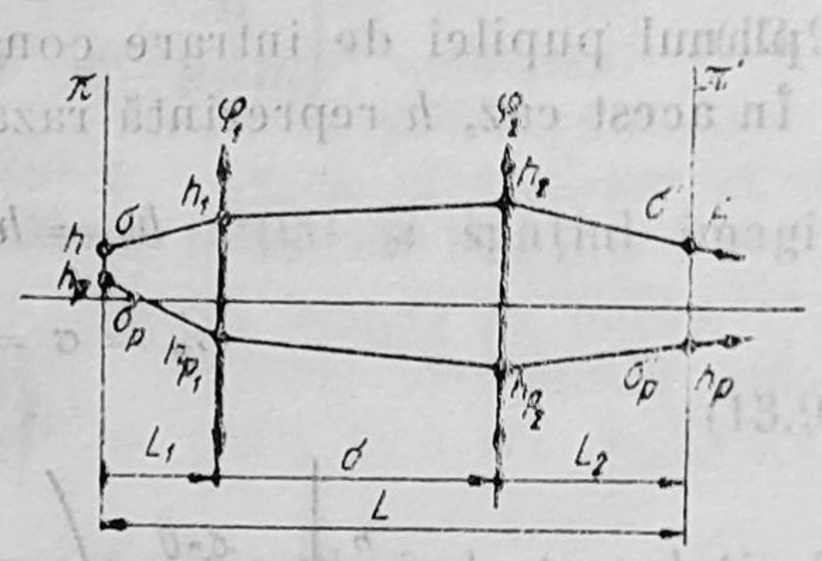


Fig. 13.52

Vom da o soluționare generală problemei propuse, considerînd, așa cum s-a mai spus, două raze paraxiale în loc de una singură și două plane π și π' la distanța L în mediul de indice $n = n' = 1$ (planele nu sînt obligatoriu conjugate). Se cunosc parametrii a două raze paraxiale la nivelul celor două plane considerate; h, σ, h', σ', pentru prima rază și h_p, σ_p, h'_p, σ'_p, pentru a doua rază (fig. 13.52). Se caută toate cuplurile de lentile subțiri care realizează transformarea propusă. Trebuie, însă, de la început remarcat că:

— datele trebuie să verifice invariantul Lagrange

$$\mathcal{L} = h\sigma_p - h_p\sigma = h'\sigma'_p - h'_p\sigma'\,;$$

— de asemenea, că problema va admite o infinitate de soluții, dacă se îndeplinește condiția

$$(h - h')\cdot(\sigma_p - \sigma'_p) - (h_p - h'_p)\cdot(\sigma - \sigma') \neq \mathcal{L}(\sigma\sigma'_p - \sigma'\sigma_p). \tag{13.101}$$

Dacă condiția (13.101) nu este îndeplinită (în cazul în care are loc egalitatea) sistemul optic se reduce la o singură lentilă, problema prezentînd o soluție unică. Considerăm relația (13.101) îndeplinită și notăm φ_1 și φ_2

puterile a două lentile și Φ puterea sistemului. Luînd L_1 ca parametru, rezultă diferitele elemente ale sistemului

$$\Phi = \frac{\sigma\sigma'_p - \sigma'\sigma_p}{\mathcal{L}}$$

$$h_1 = h - L_1\sigma\,;\; h_2 = \mathcal{L}\,\frac{h' - h_1 + \sigma'(L - L_1)}{\mathcal{L} + (h_1\sigma'_p - h_{p1}\sigma')}$$

$$h_{p1} = h_p - L_1\sigma_p\,;\; h_{p2} = \mathcal{L}\,\frac{h'_p - h_{p1} + \sigma'_p(L - L_1)}{\mathcal{L} + (h_1\sigma'_p - h_{p1}\sigma')} \qquad (13.102)$$

$$d = (h_1h_{p2} - h_{p1}h_2)/\mathcal{L}\,;\; L_2 = (h_2h'_p - h_{p2}h')/\mathcal{L}$$

$$\varphi_1 = [\mathcal{L} + (h_2\sigma_p - h_{p2}\sigma)]/\mathcal{L}d)\,;\; \varphi_2 = [\mathcal{L} + (h_1\sigma'_p - h_{r1}\sigma')]/(\mathcal{L}d).$$

Această metodă se programează foarte ușor pentru calculul automat, dînd rezultate la numeroase probleme de proiectare. Cazuri particulare, dar foarte practice constituie folosirea planelor conjugate obiect și imagine (fig. 13.53), cînd obiectul se află la distanță finită, parametrii razelor paraxiale fiind dați de relațiile (13.99), sau a planelor pupilelor de intrare și ieșire cînd obiectul se află la infinit (13.96).

Aplicații ale calculului matriceal la studiul sistemelor optice. a) Matricea de transformare pentru o lentilă simplă se obține particularizînd relația (13.93)

$$\breve{\mathfrak{M}} = \breve{\mathfrak{R}}_2\breve{\mathfrak{T}}_{12}\breve{\mathfrak{R}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\Phi_2}{n'} & \dfrac{n_2}{n'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-d & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\Phi_1}{n_2} & \dfrac{n}{n_2} \end{pmatrix} =$$

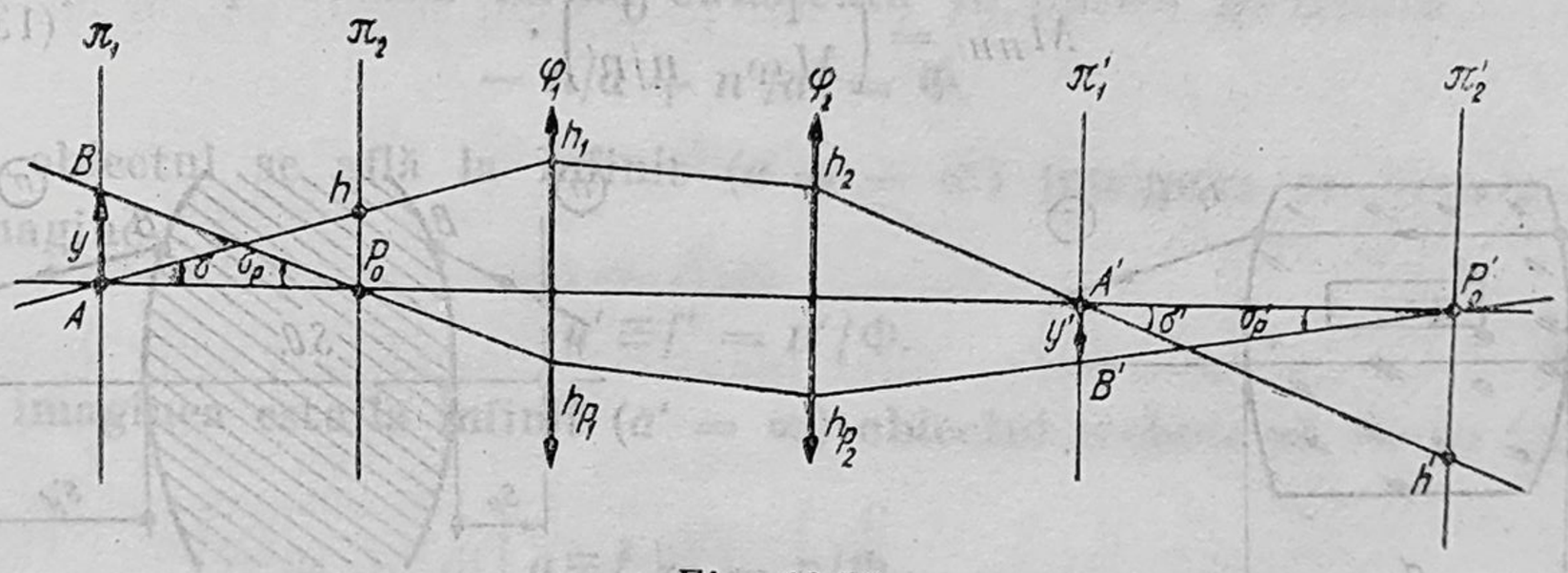


Fig. 13.53

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\Phi_1 d}{n_2} & -\dfrac{nd}{n_2} \\ \dfrac{\Phi_2}{n'} - \dfrac{\Phi_1\Phi_2 d}{n_2 n'} + \dfrac{\Phi_1}{n} & \dfrac{n}{n'}\left(1 - \dfrac{\Phi_2 d}{n_2}\right) \end{pmatrix} \qquad (13.103)$$

unde n_2 este indicele de refracție al sticlei lentilei, iar $\Phi_1 = (n_2 - n)\rho_1$ și $\Phi_2 = (n' - n_2)\rho_2$ sînt puterile dioptrilor.

În cazul particular al unei lentile subțiri, se ia limita expresiei (13.103), cînd $d \to 0$

$$\check{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi/n' & n/n' \end{pmatrix} \tag{13.104}$$

unde $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ reprezintă puterea lentilei.

De notat că matricea $\check{\mathfrak{M}}$ a unei lentile subțiri are aceeași formă ca și pentru o singură suprafață de refracție (13.91). Prima linie la ambele matrice fiind formată din elementele 1 și 0, aceasta înseamnă că $h' = h$ independent de σ. Deci $B' = I_2$ este imaginea lui $B = I_1$ formată cu mărirea unitară (fig. 13.54).

b) Matricea de transformare pentru un sistem general (fig. 13.55). Fie, în cazul general, matricea transformării de forma

$$\check{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \tag{13.105}$$

despre care știm, deocamdată, că $\det \check{\mathfrak{M}} = n'/n$.

Cunoscînd analogia unui sistem optic centrat cu o lentilă subțire, se calculează matricea transformării de la planul principal H la planul principal imagine H', în funcție de $\check{\mathfrak{M}}$ și de matricele de translație $\check{\mathfrak{T}}$ și $\check{\mathfrak{T}}'$

$$\check{\mathfrak{M}}_{HH'} = \check{\mathfrak{T}}'\check{\mathfrak{M}}\check{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -s'_{H'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_H \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} M_{11} - M_{21} \cdot s'_{H'} & M_{11}s_H + M_{12} - (M_{21}s_H + M_{22})s'_{H'} \\ M_{21} & M_{21}s_H + M_{22} \end{pmatrix}. \tag{13.106}$$

Se pune condiția ca $\beta = 1$ ($h' = h$ pentru planele principale); așadar, elementele primei linii a matricei $\check{\mathfrak{M}}_{HH}$ trebuie să fie 1 și 0, ceea ce duce la

$$M_{HH'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M_{21} & n/n' \end{pmatrix}. \tag{13.107}$$

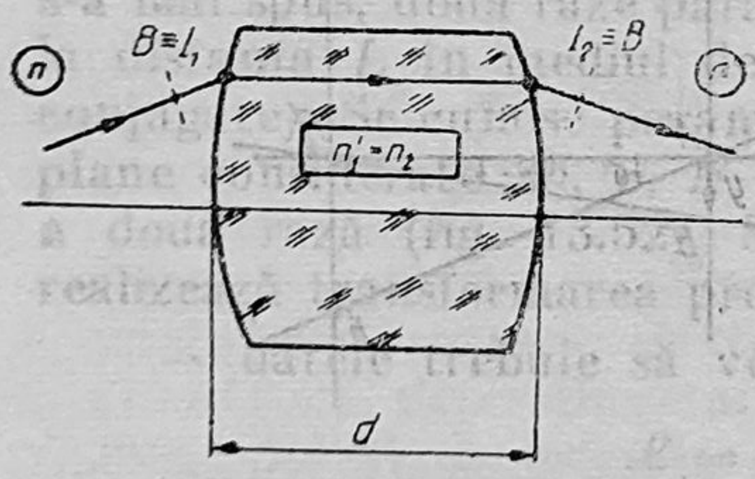


Fig. 13.54

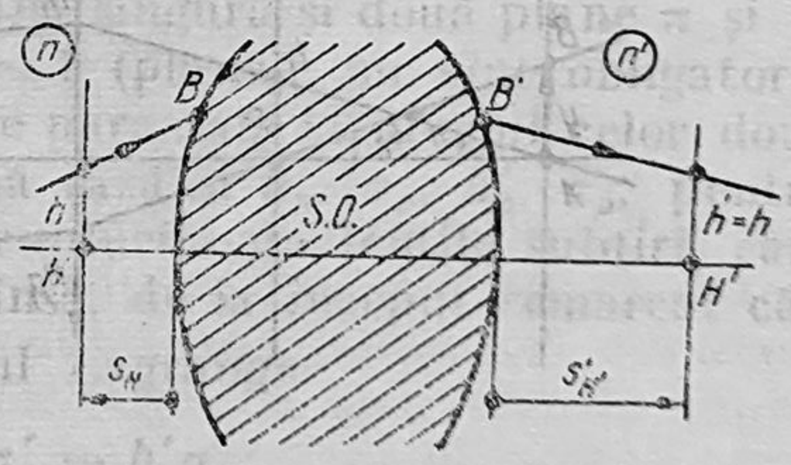


Fig. 13.55

Am scris elementul 22 ca n/n' ținînd seama de condiția $\det \check{\mathfrak{M}}_{HH'} = n/n'$. Identificînd (13.106) și (13.107) se obține

$$\begin{aligned} 11: &\quad s'_{H'} = -(1 - M_{11})/M_{21} \\ 22: &\quad s_H = (n/n' - M_{22})M_{21} \end{aligned} \tag{13.108}$$

cu condiția $M_{21} \neq 0$. Identificarea elementului 12 nu duce decît la verificarea ecuațiilor (13.108) și a condiției (13.94). Pentru a completa echivalența formală între sistemul general și lentila subțire mai rămîne de făcut identificarea

$$M_{21} = \Phi/n'. \tag{13.109}$$

Așadar, condiția $M_{21} \neq 0$, de formare a imaginii prin sistem, garantează că puterea sistemului considerat nu este nulă. Matricea transformării printr-un sistem optic între planele principale obiect și imagine poate fi scrisă, deci :

$$\hat{\mathfrak{M}}_{HH'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi/n' & n/n' \end{pmatrix}. \tag{13.110}$$

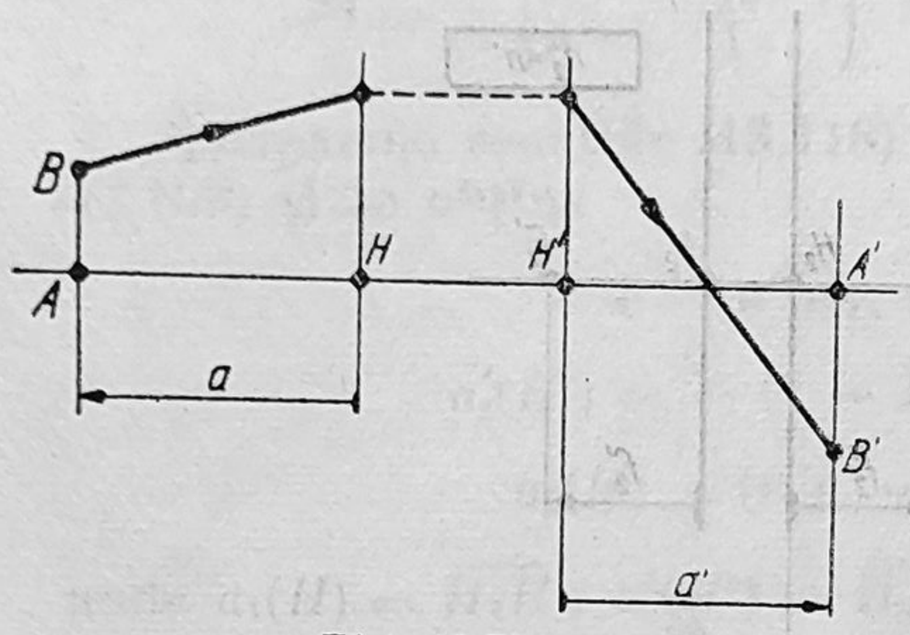


Fig. 13.56

c) Procesul formării imaginii (fig. 13.56). Pentru a obține relațiile de transformare între două plane conjugate obiect și imagine, situate la distanțele a și respectiv a' față de planele principale, se aplică două „translații" matricei $\hat{\mathfrak{M}}_{HH'}$

$$\check{\mathfrak{M}}_{AA'} = \begin{pmatrix} 1 & -a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi/n' & n/n' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a'\Phi/n' & a - aa'\Phi/n' - a'n/n' \\ \Phi/n' & a\Phi/n' + n/n' \end{pmatrix}. \tag{13.111}$$

Condiția de formare a imaginii este ca elementul 12 să fie nul, adică

$$a - aa'\Phi/n' - a'n/n' = 0,$$

ceea ce se poate pune sub forma cunoscută în optica gaussiană :

$$-n/a + n'/a' = \Phi.$$

Cînd obiectul se află la infinit ($a = -\infty$) imaginea se formează în focarul imagine

$$a' \equiv f' = n'/\Phi.$$

Cînd imaginea este la infinit ($a' = \infty$) obiectul trebuie să fie în focarul obiect

$$a \equiv \bar{f} = -n/\Phi.$$

Ecuația de transformare între planele A și A' poate fi scrisă sub forma

$$\begin{pmatrix} y' \\ \sigma \end{pmatrix} = \check{\mathfrak{M}}_{AA'} \begin{pmatrix} y \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad \check{\mathfrak{M}}_{AA'} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \Phi/n' & \gamma \end{pmatrix} \tag{13.112}$$

unde în expresia (13.111) a matricei $\check{\mathfrak{M}}_{AA'}$ am notat :

— mărirea transversală

$$\beta = 1 - a'\Phi/n' = 1 - a'/f' = -z'/f' = na'/n'a \tag{13.113}$$

— mărirea unghiulară

$$\gamma = a\Phi/n' + n/n' = a/a'. \tag{13.114}$$

Elemente date de ecuația (13.112) sînt

$$y' = \beta y \tag{13.115}$$

$$\sigma' = \gamma\sigma + y\Phi/n'.$$

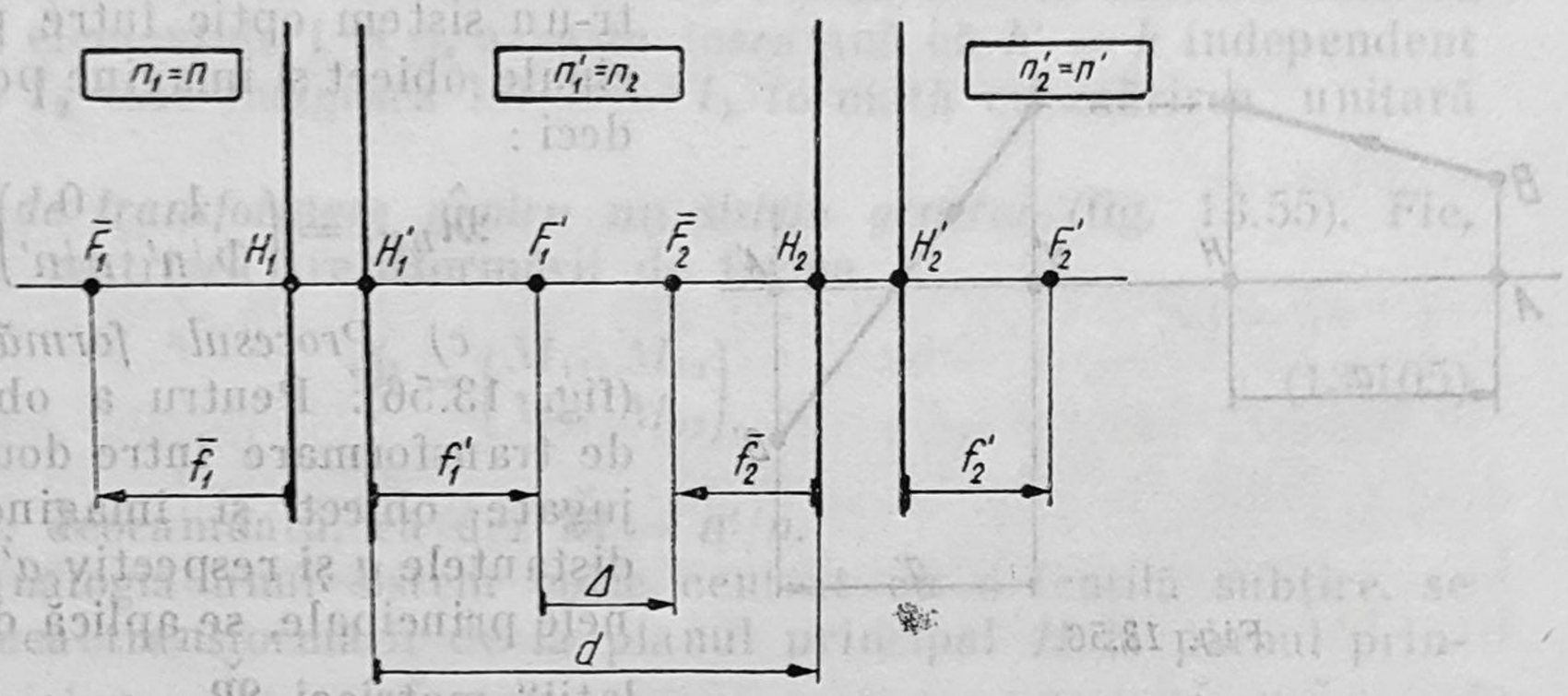


Fig. 13.57

Din (13.113) și (13.114) se observă că $\beta \cdot \gamma = n/n'$, ceea ce reprezintă și condiția det $\check{\mathfrak{M}}_{AA'} = n/n'$. Dacă se introduc notațiile $\beta = y'/y$; $\gamma = \Delta\sigma'/\Delta\sigma$ se ajunge la invariantul Lagrange sau Smith-Helmholtz pentru un sistem general

$$ny \cdot \Delta\sigma = n'y' \cdot \Delta\sigma'. \tag{13.116}$$

d) Combinarea a două sisteme optice (fig. 13.57). Se caută relațiile care reprezintă comportarea a două sisteme ca a unui singur sistem optic global. Puterile celor două sisteme sînt

$$\Phi_1 = -n_1/\bar{f}_1 = n_1'/f_1' \tag{13.117}$$

$$\Phi_2 = -n_2/\bar{f}_2 = n_2'/f_2'$$

Matricele transformărilor între planele principale ale celor două sisteme sînt

$$\check{\mathfrak{M}}_{H_1H_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_1/n_1' & n_1/n_1' \end{pmatrix}; \quad \check{\mathfrak{M}}_{H_2H_2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi_2/n_2' & n_2/n_2' \end{pmatrix}.$$

Matricea transformării globale, între planul principal obiect H_1 al primului sistem și planul principal imagine H_2' al celui de-al doilea sistem, este, ca formă, identică cu matricea $\check{\mathfrak{M}}$ dată de relația (13.103)

$$\check{\mathfrak{M}}_{H_1H_2'} = \check{\mathfrak{M}}_{H_2H_2'} \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \check{\mathfrak{M}}_{H_1H_1'} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Phi_1 d}{n_2} & -\frac{nd}{n_2} \\ \frac{\Phi_2}{n'} - \frac{\Phi_1\Phi_2 \cdot d}{n_2 n'} + \frac{\Phi_1}{n'} & \frac{n}{n'}\left(1 - \frac{\Phi_2 d}{n_2}\right) \end{pmatrix}$$

sau sub forma generală

$$\breve{\mathfrak{M}}_{H_1H_2'} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}.$$

Se aplică două „translații" pentru a obține matricea $M_{HH'}$ a transformării între planele principale H și H' ale sistemului global, matrice a cărei formă generală este cunoscută :

$$\breve{\mathfrak{M}}_{HH'} = \begin{pmatrix} 1 & -a_2'(H') \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \breve{\mathfrak{M}}_{H1H_2'} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_1(H) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Phi/n' & n/n' \end{pmatrix}. \quad (13.118)$$

Comparînd ecuațiile (13.118) și (13.106) se face apel la relațiile (13.108), (13.109) și se obține

$$\Phi = n'M_{21} = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2/n_2 \quad (13.119)$$

$$a_2'(H') = -(1 - M_{11})/M_{21} = -(d\Phi_1 n')/(\Phi\ n_2) \quad (13.120)$$

$$a_1(H) = (n/n' - M_{22})/M_{21} = (d\Phi_2 n)/(\Phi n_2) \quad (13.121)$$

unde $a_1(H) = \overline{H_1H}$; $a_2'(H') = \overline{H_2'H'}$.

c) Proprietățile punctelor nodale pot fi studiate folosind matricea transformării între două plane conjugate (13.111), în care vom nota distanța de la planele principale la planele nodale cu l, respectiv l'.

Ținînd seama că $\gamma = 1$, ecuațiile deduse devin

$$-n/l + n'/l' = \Phi$$

$$(l\Phi + n)/n = 1$$

sau, din combinarea acestora

$$l' = l = (n' - n)/\Phi = -\bar{f}(n' - n)/n = f'(n' - n)/n'.$$

Observație. Dacă $n > n'$, N se află la stînga lui H ;

$n = n'$, $N \equiv H$;

$n < n'$, N la dreapta lui H.

În cazul $n < n'$, reprezentat în figura 13.58, un fascicul paralel este transformat într-un fascicul convergent, poziția vîrfului fiind determinată de raza care trece prin N și iese prin N' sub același unghi ; coordonatele punctului Q (originea axelor în N') sînt $z' = f' - l'$

$$y' = z' \operatorname{tg} \sigma = (f' - l') \operatorname{tg} \sigma$$

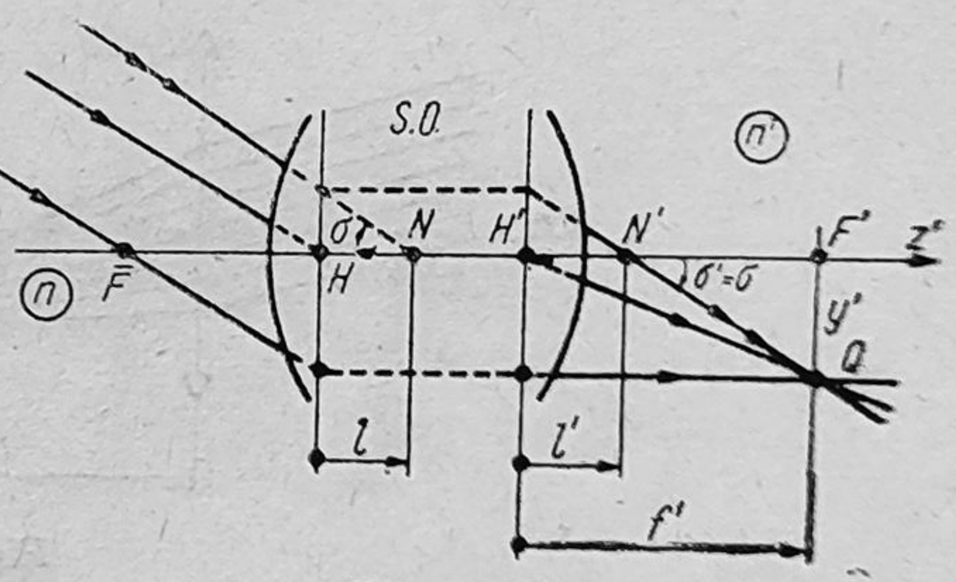


Fig. 13.58

Dacă sistemul optic se rotește în jurul punctului nodal, fasciculul paralel este focalizat în Q^* (fig. 13.59).

Coordonatele punctului Q^* sînt

$$z' + \delta z' = (f' - l')\cdot[\cos\alpha + \operatorname{tg}(\sigma + \alpha)\sin\alpha]$$

$$y' + \delta y' = -(f' - l')\cdot[\operatorname{tg}(\sigma + \alpha)\cos\alpha - \sin\alpha]$$

Dacă unghiul α este mic, atunci $\delta y' \to 0$; $\delta z' \to 0$, deci fasciculul rămîne focalizat în același punct Q.

Această proprietate este foarte importantă în construcția sistemelor optice, fiind aplicată sub numele de principiul Eppenstein : se montează astfel sistemul optic încît înclinările datorate erorilor de ghidare să nu influențeze asupra preciziei de măsurare sau de citire.

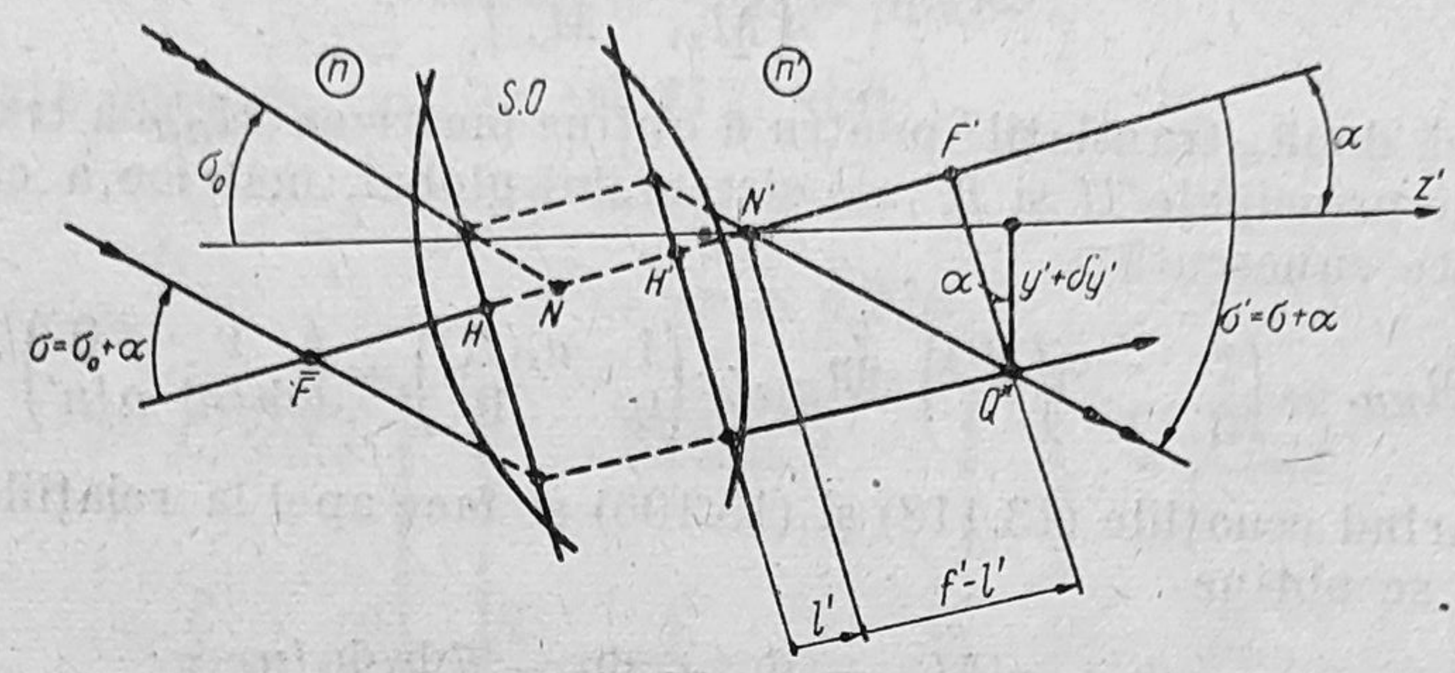


Fig. 13.59

f) Sistemele telescopice pot fi caracterizate de o matrice de forma (13.112) în care $M_{21} = 0$. Această proprietate face ca relația $\sigma' = \sigma$. M_{22} să fie independentă de y. Unul dintre cele mai simple sisteme telescopice îl constituie combinarea a două lentile astfel încît $F_1' \equiv \bar{F}_2$ (fig. 13.60).

Lentila L_1 se numește obiectiv, iar lentila L_2 ocular. Puterea totală a sistemului este, conform relației (13.119) unde ținem seama că sistemul este scăldat în aer : $\Phi = 1/f_1' - 1/\bar{f}_2 + d/(f_1'\bar{f}_2) = 0$, deoarece $d = f_1' - \bar{f}_2$.

Matricea transformării între L_1 și L_2 se poate scrie folosind $\breve{\mathfrak{M}}_{H1H_2'}$ de la combinarea sistemele optice în care înlocuim $\Phi_1 = 1/f_1'$; $\Phi_2 = -1/\bar{f}_2$; $n = n_2 = n' = 1$

$$\breve{\mathfrak{M}}_{L_1L_2} = \begin{pmatrix} \bar{f}_2/f_1' & -f_1' + \bar{f}_2 \\ 0 & f_1'/\bar{f}_2 \end{pmatrix}. \qquad (13.122)$$

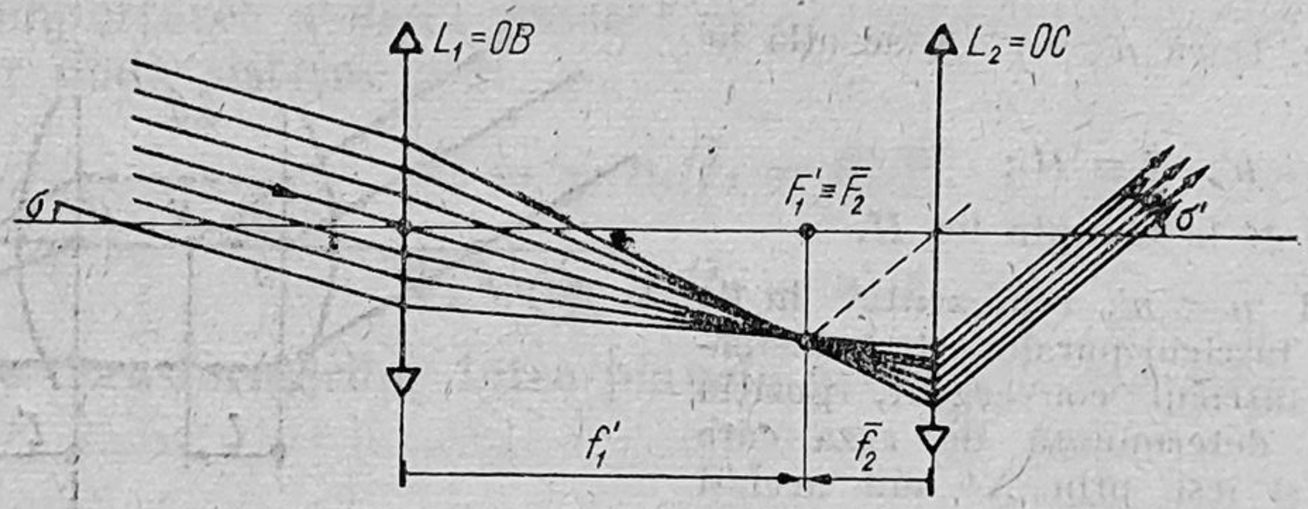


Fig. 13.60

Aplicînd transformarea (13.122), aceasta duce la

$$y' = y\bar{f}_2/f_1' - (f_1' - \bar{f}_2)\sigma = -yf_2'/f_1' - (f_1' + f_2')\sigma$$

$$\sigma' = \sigma f_1'/\bar{f}_2 = -\sigma f_1'/f_2'. \qquad (13.123)$$

Noțiunea de putere de mărire unghiulară se definește prin raportul

$$P = \sigma'/\sigma = -f_1'/f_2'. \qquad (13.124)$$

Matricea transformării se mai poate scrie

$$\mathfrak{M}_{L_1L_2} = \begin{pmatrix} 1/P & -f_1' - \frac{f_2'}{P} \\ 0 & \end{pmatrix} \tag{13.125}$$

Metoda de studiu matriceală poate fi aplicată pentru studiul în domeniul paraxial la orice sistem optic.

13.8. Aberațiile cromatice ale sistemelor optice

Fenomenul de dispersie a luminii (descompunerea luminii albe în radiațiile componente) este descris, din punct de vedere tehnic, de variația indicelui de refracție al mediului (cel mai frecvent sticla optică) în funcție de lungimea de undă a radiației. Deoarece marea majoritate a aparatelor optice utilizate în construcția de mașini lucrează în domeniul vizibil, vom considera radiația de referință : radiația e ($\lambda_e = 546{,}074$ mm), indicele de refracție n_e îl vom nota cu n, iar ca variație a indicelui de refracție vom considera dispersia medie $dn = n_{F'} - n_{C'}$. Mărimile referitoare la radiația e nu vor purta nici un indice. În limitele aproximării opticii de ordinul întîi, vom determina variațiile de poziție și de mărire a imaginii unui obiect $AB \perp$ axa optică, printr-un sistem optic centrat.

Observație. Variațiile imaginii se măsoară față de radiația C' ; variațiile indicelui de refracție sînt pozitive pentru $\lambda < \lambda_e$, ceea ce cuprinde cea mai mare parte a spectrului vizibil.

13.8.1. Cromatismul axial (sau de poziție)

Să considerăm cazul unei lentile subțiri convergente, rezultatul putînd fi extins la un sistem optic centrat oarecare (fig. 13.61). Un fascicul de lumină albă, paralel cu axa optică, traversează o lentilă subțire, fiind des-

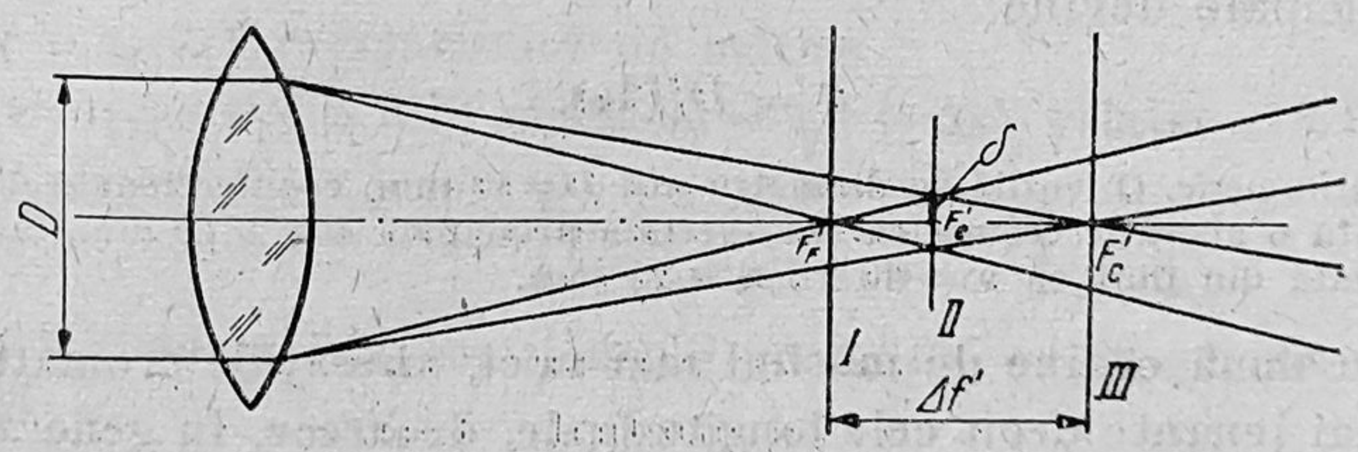


Fig. 13.61

compus în fascicule convergente de culori diferite. Un ecran perpendicular pe axă pune în evidență :

— în planul I : un cerc luminos cu marginile roșii,

— în planul II : o pată luminoasă cu marginile purpurii,

— în planul III : o pată luminoasă cu marginile violete (albastre).

Dacă se interpune un filtru roșu, verde sau albastru, se obțin focarele imagine F_C', F_e' sau, respectiv, $F_{F'}'$.

Observații analoge pot fi făcute cu lentile divergente, furnizînd imagini virtuale ale unor obiecte cu contrast foarte bun, iluminate puternic. Scriind puterea lentilei subțiri $\varphi' = 1/f' = (n-1)\cdot(1/r_1 - r/r_2)$ pentru radiațiile e, C' și F' se obține

$$\frac{\varphi'_F - \varphi'_C}{\varphi'} = \frac{n_F - n_C}{n-1} = \frac{1}{\nu} \tag{13.126}$$

unde φ', n, ν se referă, repetăm, la radiația e. Relația (13.126) mai poate fi scrisă și sub forma

$$f' \cdot \frac{f'_C - f'_F}{f'_C \cdot f'_F} \simeq \frac{f'_C - f'_F}{f'} = \frac{1}{\nu}. \tag{13.127}$$

Aberația cromatică de poziție (sau cromatismul axial), în cazul obiectului situat la infinit, este așadar

$$\Delta f' = f'/\nu \tag{13.128}$$

și se numește aberație cromatică longitudinală principală.

Exemplu numeric. Pentru o distanță focală $f' = 1$ m și sticlă crown cu $\nu = 60$, rezultă $\Delta f' \approx 16$ mm, iar pentru sticlă flint cu $\nu = 40$ rezultă $\Delta f' = 25$ mm.

Aberația cromatică longitudinală principală se dublează dacă considerăm dispersia între radiațiile marginale ale spectrului vizibil, A' (roșu extrem) și H (violet extrem). Raza secțiunii minime (II) a fasciculului reprezintă aberația cromatică transversală principală 2δ. Din asemănarea triunghiurilor rezultă

$$\frac{2\delta}{D} \simeq \frac{\Delta f'}{2f'} \tag{13.129}$$

unde am considerat $\overline{F'_F F'_e} \simeq \overline{F'_e F'_C} = \Delta f'/2$; $f'_F \simeq f'$.

Ținînd seama de relația (13.128), expresia aberației cromatice transversale principale devine

$$\delta = D/(4\nu). \tag{13.130}$$

Exemplu numeric. O lentilă cu diametru util $D = 40$ mm, coonfecționată din crown avînd $\nu = 60$ prezintă o aberație cromatică transversală principală $\delta \approx 0{,}17$ mm, iar în cazul cînd este confeționată din flint cu $\nu = 40$: $\delta \approx 0{,}25$ mm.

Deși cu două ordine de mărimi mai mici, aberațiile cromatice transversale sînt mai jenante decît cele longitudnale, deoarece, în general, imaginile sînt privite transversal.

13.8.2. Cromatismul de mărire

Dacă obiectul nu este axial, variația măririi transversale în funcție de lungimea de undă a radiației reprezintă cromatismul de mărire (fig. 13.62).

Mărirea : $\beta = y'/y = s'/s$.

Cromatismul de mărire : $d\beta/\beta = dy'/y' = ds'/s'$. (13.131)

De fapt, în cele mai frecvente cazuri cromatismul de mărire nu se manifestă direct, ci sub forma diferențelor de focalizare între fascicule de diferite culori pe o suprafață de observare frontală : placă fotografică, ecran, retină...

Fie planul de punere la punct (ecranul de observare) prin A'_C (fig. 13.63). Pata imagine $F'_{F(C)}$ obținută cu razele de culoare albastră (F') este dată de intersecția razei cu vîrful în B'_F, care se sprijină pe pupila de intrare, cu planul de punere la punct. Această pată nu coincide cu B'_C (imaginea lui B

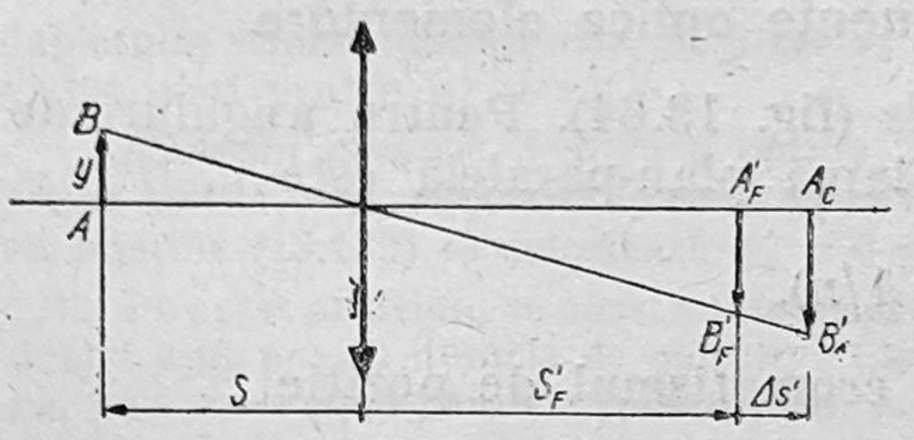


Fig. 13.62

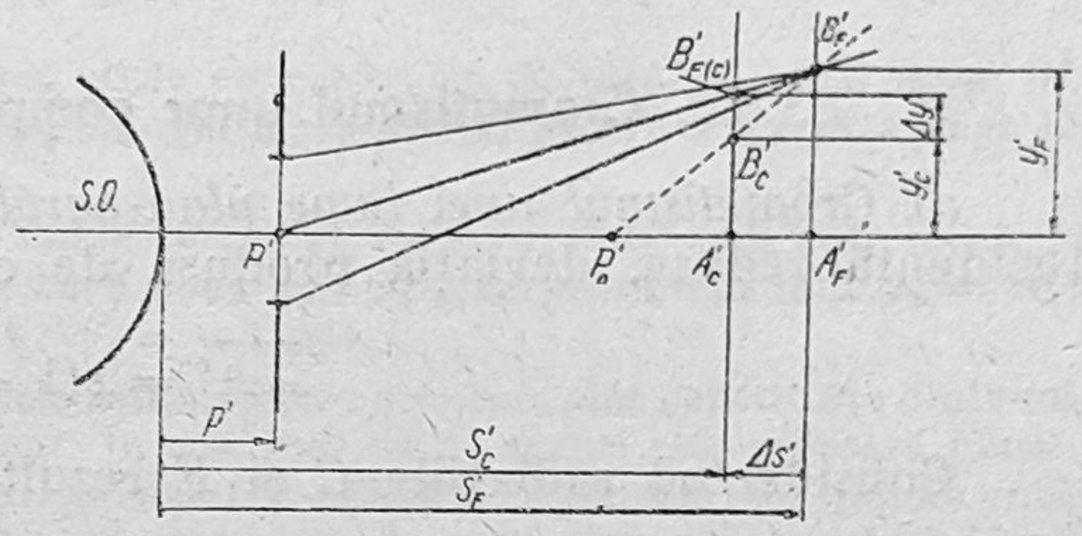


Fig. 13.63

obținută cu razele de culoare roșie C'), astfel că diferitele radiații nu dau naștere unor pete concentrice care să reducă la recombinarea luminii; se spune că imaginea prezintă cromatism lateral sau aparent, avînd ca măsură distanța $\overline{B'_C B'_{F(C)}} = \Delta y'$.

Considerînd relațiile geometrice (de asemănare) și notațiile adoptate, rezultă

$$\Delta y' = A'_C B'_{F(C)} - A'_C B'_C = y'_F \cdot \frac{s'_C - p'}{s'_F - p'} - y'_C. \qquad (13.132)$$

Aplicînd relația (13.131) rezultă că

$$y'_F = y'_C + \Delta y' = y'_C(1 + \Delta\beta/\beta) \qquad (13.133)$$

unde $\Delta\beta/\beta$ reprezintă cromatismul de mărire.

Ținînd seama de (13.133) și că $s'_F = s'_C + \Delta s'$, relația (13.132) devine

$$\Delta y' = y'_C \left[\frac{1 + \Delta\beta/\beta}{1 + \Delta s'/(s'_C - p')} - 1 \right]$$

sau, aducînd la același numitor și neglijînd $\Delta s'/(s'_C - p') \ll 1$, rezultă cromatismul lateral

$$\Delta y' \approx y'_C[\Delta\beta/\beta - \Delta s'/(s'_C - p')] \qquad (13.132')$$

care afectează calitatea imaginii, în timp ce cromatismul de mărire nu o influențează în mod obligatoriu. Pentru a evita cromatismul lateral este necesar ca

$$\Delta y' = 0 \rightarrow d\beta/\beta = \Delta s'/(s'_C - p')$$

ceea ce duce la determinarea precisă a poziției pupilei la ieșire : în $P'_0 \in \overline{B'_C B'_F}$. Această condiție este satisfăcută, de exemplu, de o lentilă subțire la care montura joacă rol de pupilă ; în acest caz, deși imaginile obținute cu raze de

diferite culori au mărimi diferite, proiecţiile lor pe un ecran se suprapun. Dacă cromatismul de poziţie este nul, $\Delta s' = 0$, atunci, din relaţia (13.132′) rezultă

$$\Delta y'/y'_c = \Delta\beta/\beta$$

adică cromatismul lateral se confundă cu cel de mărire şi nu mai depinde de poziţia pupilei de ieşire, imaginile $\overline{A'_C B'_C}$ şi $\overline{A'_F B'_F}$ fiind situate în acelaşi plan.

13.8.3. Cromatismul unor componente optice elementare

a) Cromatismul unei lame plan-paralele (fig. 13.64). Pentru unghiuri de incidenţă reduse, deviaţia produsă de o lamă plan-paralelă este

$$\overline{AA'} = e(1 - 1/n).$$

Considerînd radiaţiile C şi F rezultă cromatismul de poziţie

$$\Delta s' = \overline{A'_F A'_C} = e(1/n_F - 1/n_c) \simeq -e(n_F - n_C)/n^2 \qquad (13.134)$$

unde $n = n_e$ (radiaţia de referinţă).

Exemplu numeric. Pentru o lamă plan-paralelă de grosime $e = 5$ mm, confecţionată din sticlă crown cu $dn = n_F - n_C = 0{,}0087$ şi $n_e \simeq 1{,}515$ rezultă o aberaţie cromatică de poziţie $\Delta s' \simeq -0{,}02$ mm.

b) Dubletul acromat (fig. 13.65). Două lentile de puteri φ'_1 şi φ'_2 şi de coeficienţii de dispersie ν_1 şi ν_2, sînt aşezate foarte aproape una de alta, puterea rezultată fiind dată de relaţia pentru combinarea a două sisteme optice

$$\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2. \qquad (13.135)$$

Această relaţie se mai numeşte şi ecuaţia de lipire, în cazul în care lentilele prezintă aceeaşi curbură pentru suprafeţele din interior, putînd fi lipite.

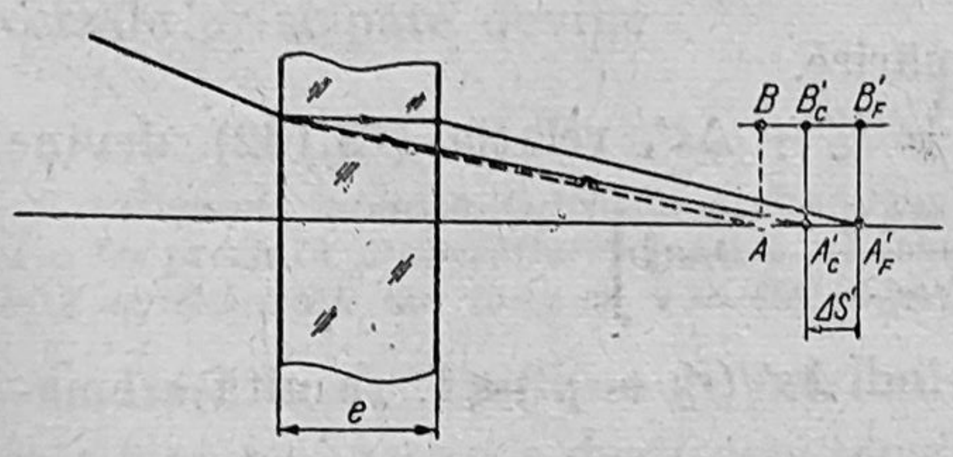


Fig. 13.64

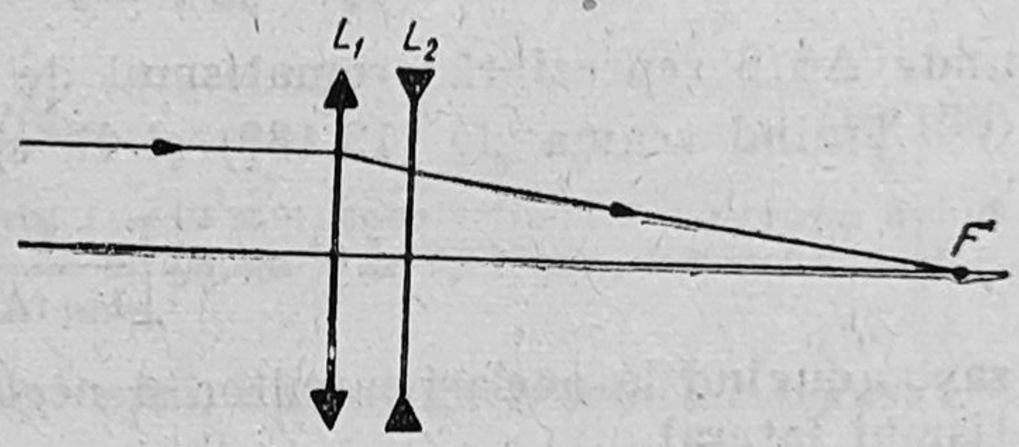


Fig. 13.65

Din (13.135) rezultă, prin diferenţiere

$$\Delta\varphi' = \Delta\varphi'_1 + \Delta\varphi'_2 \qquad (13.136)$$

care, utilizînd expresia (13.126) devine

$$\Delta\varphi' = \varphi'_1/\nu_1 + \varphi'_2/\nu_2. \qquad (13.137)$$

Punînd condiţia de acromatizare (axială) a dubletului rezultă relaţia între puteri şi coeficienţii de dispersie

$$\varphi'_1/\varphi'_2 = -\nu_1/\nu_2 \qquad (13.138)$$

ceea ce arată că puterile celor două lentile trebuie să fie de semne contrare. Ecuațiile (13.135) și (13.138) formează un sistem care dă puterile celor două lentile, componente ale dubletului lipit acromat

$$\varphi_1' = \varphi' \nu_1/(\nu_1 - \nu_2)\,;\ \varphi_2' = \varphi' \nu_2/(\nu_2 - \nu_1) \qquad (13.139)$$

Observație. Din (13.135) se poate determina raportul :

$$\varphi'/\varphi_1' = 1 + \varphi_2'/\varphi_1' = 1 - \nu_2/\nu_1 \qquad (13.140)$$

Dacă $\nu_1 > \nu_2$ rezultă că $\varphi'/\varphi_1' > 0$, adică sticla cu coeficient de dispersie mai mare dă dubletului semnul puterii sale. Se alege $\nu_1 - \nu_2$ cît mai mare posibil pentru a nu se ajunge la valori mari pentru φ_1' și φ_2'.

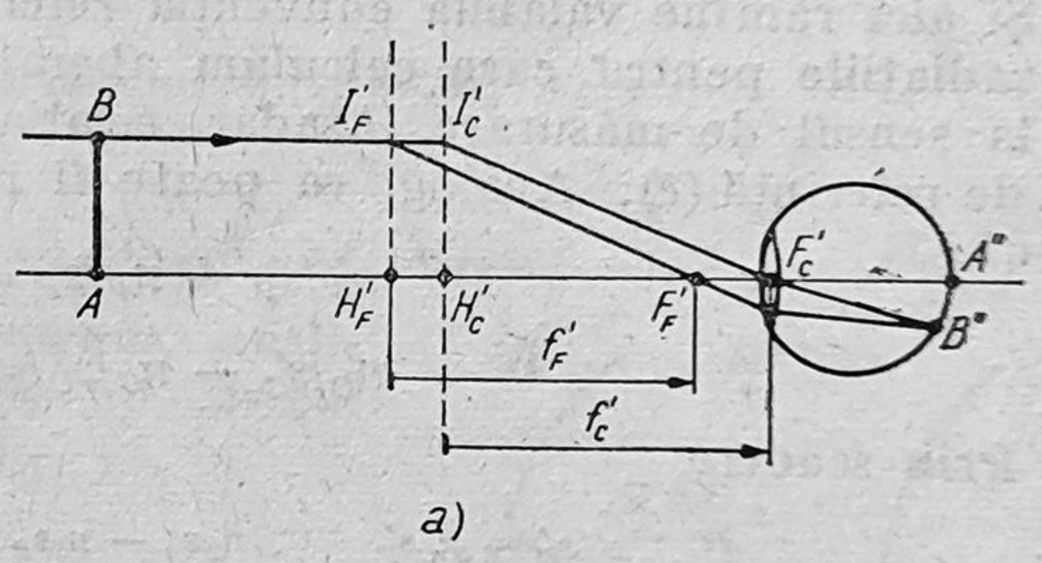
Exemplu numeric. Pentru a obține un dublet acromat convergent $\varphi' = 2$ dpt, se alege prima lentilă convergentă din crown $\nu_1 = 60$, iar a doua lentilă, divergentă, din flint $\nu_2 = 40$: cu relațiile (13.139) se calculează $\varphi_1' = 6$ dpt : $\varphi_2' = -4$ dpt.

Pe acest principiu se construiesc obiectivele astronomice ; cele care sînt constituite dintr-un dublet lipit poartă numele de obiective Clairaut. În cele mai multe cazuri este necesară plasarea unei lame plan-paralele (reticul) sau a unei prisme (de exemplu la binoclu) în spatele unui obiectiv de lunetă ; pentru ca imaginea finală să fie corectată de cromatism axial trebuie lăsat obiectivul cu o supracorecție convenabilă pentru a compensa subcorecția (13.134) a lamei plan-paralele.

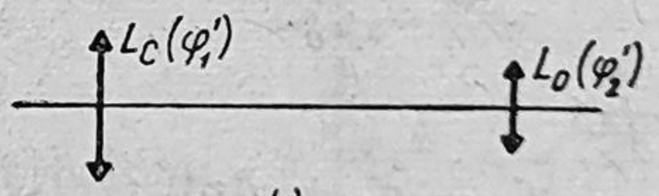
c) Ocularul de tip Huygens. Ocularul reprezintă subansamblul optic utilizat în aparate optice, care permite ochiului să vizeze la infinit un obiect sau imaginea acromatică AB (fig. 13.66, a). Pentru o rază de lumină albă paralelă cu axa optică, provenind din B, corespund, pentru radiațiile F și C, două raze convergente către focarele F'_F și F'_C. Condiția ca pe retină aceste raze să fie convergente în același punct B'' este ca razele convergente din ocular $I'_F\,F'_F$ și $I'_C\,F'_C$ să fie paralele între ele, ceea ce implică condiția de acromatism aparent :

$$f'_F = f'_C \qquad (13.141)$$

Un mod de rezolvare a acestei condiții îl constituie ocularul de tip Huygens, care este format din două lentile subțiri din același sort de sticlă optică (fig. 13.66, b).



a)



b)

Fig. 13.66

Puterea ocularului este dată de relația

$$\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2' - e\varphi_1'\varphi_2' \qquad (13.142)$$

Condiția (13.141) poate fi tradusă în

$$d\varphi' = 0 \qquad (13.143)$$

ceea ce, diferențiind relația (13.142), duce la

$$d\varphi_1' + d\varphi_2' - e(\varphi_1' \cdot d\varphi_2' + \varphi_2' \cdot d\varphi_1') = 0. \qquad (13.144)$$

Ținînd seama de relația (13.126)

$$\frac{d\varphi_1'}{\varphi_1'} = \frac{d\varphi_2'}{\varphi_2'} = \frac{1}{\nu}$$

obținem

$$\varphi_1' + \varphi_2' - 2e\varphi_1'\varphi_2^2 = 0 \qquad (13.145)$$

adică puterea φ' a ocularului trebuie să fie $e\varphi_1'\varphi_2'$. Împărțind prin $\varphi_1'\varphi_2'$ se obține condiția pentru distanțele focale ale celor două lențile

$$f_1' + f_2' = 2e, \qquad (13.146)$$

condiție care stă la baza proiectării ocularelor de tip Huygens.

Observație. În unele cazuri, de exemplu cînd se folosesc obiective de microscop cu aberații cromatice cunoscute, se folosesc oculare compensatoare care restabilesc superpoziția imaginilor, cel puțin aparentă.

13.8.4. Expresia aberației cromatice de poziție pentru un sistem optic centrat

Pentru calculele optice de proiectare este necesar să se cunoască expresia analitică a aberației cromatice de poziție, funcție de parametrii constructivi ai unui sistem centrat : raze de curbură, indici de refracție, grosimi.

Elementul de bază al unui sistem optic centrat îl constituie dioptrul de refracție, descris analitic de invariantul paraxial (Abbe)

$$Q_s \equiv n'(1/r - 1/s') = n(1/r - 1/s),$$

care poate fi scris și sub forma

$$n'/s' - n/s = (n' - n)/r \qquad (13.147)$$

Și aici rămîne valabilă convenția referitoare la radiația de referință (e), la radiațiile pentru care calculăm aberațiile cromatice (C' și F'), la notații și la sensul de măsurare. Așadar, relația (13.147) este scrisă pentru radiația de referință (e). Analog, ea poate fi rescrisă pentru radiațiile F' și C'

$$n_F'/s_F' - n_F/s_F = (n_F' - n_F)/r$$

$$n_C'/s_C' - n_C/s_C = (n_C' - n_C)/r.$$

Prin scădere

$$\frac{n_F's_C' - n_C's_F'}{s_F's_C'} - \frac{n_Fs_c - n_cs_F}{s_Fs_C} = \frac{n_F' - n_C' - (n_F - n_C)}{r} \qquad (13.148)$$

Se notează

$$n_F' - n_C' = \mathrm{d}n'$$

$$n_F - n_C = \mathrm{d}n\,;\ \mathrm{d}n'/n' - \mathrm{d}n/n = \Delta(\mathrm{d}n/n) \qquad (13.149)$$

$s_F' - s_C' = \Delta s'$ cromatismul axial imagine

$s_F - s_C = \Delta s$ cromatismul axial obiect

și se fac următoarele aproximări :

$$s_F' \simeq s' + \Delta s'/2$$

$$s_C' \simeq s' - \Delta s'/2\,;\ s_F's_C' \approx s'^2. \qquad (13.150)$$

Analog

$$s_F \simeq s + \Delta s/2$$

$$s_c \simeq s - \Delta s/2\,;\; s_F s_C \simeq s^2.$$

Introducînd (13.149) și (13.150) în (13.148) se obține

$$\mathrm{d}n'/s' - n' \cdot \Delta s'/s'^2 - (\mathrm{d}n/s - n \cdot \Delta s/s^2) = (\mathrm{d}n' - \mathrm{d}n)/r \qquad (13.151)$$

sau

$$n' \cdot \Delta s'/s'^2 - n \cdot \Delta s/s^2 = -(1/r - 1/s') \cdot \mathrm{d}n' + (1/r - 1/s) \cdot \mathrm{d}n. \qquad (13.152)$$

Ținînd seama de expresia invariantului paraxial obiectiv, aberația cromatică de poziție dată de un dioptru sferic de refracție capătă forma

$$n' \cdot \Delta s'/s'^2 - n \cdot \Delta s/s^2 = -Q_s \cdot \Delta(\mathrm{d}n/n). \qquad (13.153)$$

În cazul unui sistem optic centrat format din k dioptri, se scrie relația (13.153) pentru fiecare dioptru în parte, amplificată cu h_j^2 ($j = 1, 2, \ldots, k$)

$$n_1'(h_1/s_1')^2 \cdot \Delta s_1' - n_1(h_1/s_1)^2 \cdot \Delta s_1 = -h_1^2 Q_{s1} \cdot \Delta(\mathrm{d}n/n)_1$$

$$n_2'(h_2/s_2')^2 \cdot \Delta s_2' - n_2(h_2/s_2)^2 \cdot \Delta s_2 = -h_2^2 \Delta_{s2} \cdot \Delta(\mathrm{d}n/n)_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n_k'(h_k/s_k')^2 \cdot \Delta s_k' - n_k(h_k/s_k)^2 \cdot \Delta s_k = -h_k^2 \cdot (Q_{sk} \cdot \Delta(\mathrm{d}n/n)_k.$$

Adunăm membru cu membru relațiile scrise pentru k dioptri, și ținînd seama că (fig. 13.67)

$$n_j' \equiv n_{j+1}\,;\; \Delta s_j' \equiv \Delta s_{j+1}\,;\; h_j/s_j' = h_{j+1}/s_{j+1}$$

rezultă

$$n_j'(h_j/s_j')^2 \cdot \Delta s_j' = n_{j+1}(h_{j+1}/s_{j+1})^2 \cdot \Delta s_{j+1}. \qquad (13.154)$$

În urma adunării, rezultă expresia analitică a cromatismului axial pentru un sistem optic centrat format din k dioptri:

$$\Delta s_k' = \frac{n_1}{n_k'}\left(\frac{h_1}{h_k}\frac{s_k'}{s_1}\right)^2 \cdot \Delta s_1 -$$

$$\left(\frac{h_1}{h_k}\right)^2 \frac{s_k'^2}{n_k'} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{h_j'}{h_1}\right)^2 Q_{sj} \cdot \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)_j. \qquad (13.155)$$

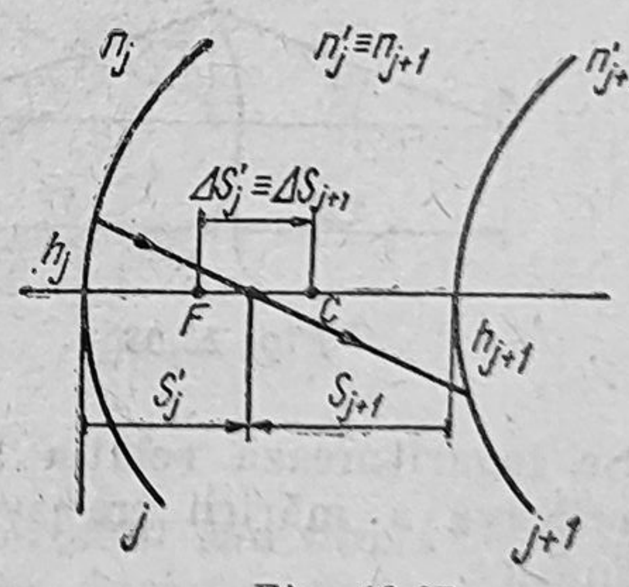


Fig. 13.67

Majoritatea aparatelor optice lucrează în aer (cel puțin mediul care scaldă ultimul dioptru), astfel încît $n_k' = 1$. De asemenea, obiectul a cărui imagine se formează prin sistemul optic este lipsit de aberații cromatice (în afara cazurilor cînd obiectul îl constituie imaginea dată de un sistem optic anterior) deci $\Delta s_1 = 0$. În acest caz, expresia cromatismului axial devine

$$\Delta s_k' = -(s_k' h_1/h_K)^2 S_{Icr} \qquad (13.156)$$

unde

$$S_{Icr} = \sum_{j=1}^{k} (h_j/h_1)^2 Q_{sj} \cdot \Delta(\mathrm{d}n/n)_j \qquad (13.157)$$

care reprezintă prima sumă cromatică (sau coeficientul aberației cromatice de poziție).

13.8.5. Expresia cromatismului de mărire pentru un sistem optic centrat

Invariantul Lagrange-Helmholtz pentru un dioptru de refracție $ny\sigma = n'y'\sigma'$ permite scrierea măririi transversale

$$\beta = y'/y = (n\sigma)/(n'\sigma') \qquad (13.158)$$

sau, utilizînd notațiile din figura 13.68

$$\sigma \simeq h/s\,;\ \sigma' \simeq h/s' \Rightarrow \beta = (n/n')(s'/s). \qquad (13.159)$$

Mărirea totală produsă de un sistem optic format din k dioptri este dată de produsul măririlor fiecărui dioptru

$$\beta = \prod_{j=1}^{k} \beta_j = \frac{n_1 \cdot n_2 \ldots n_k}{n'_1 \cdot n'_2 \ldots n'_k} \cdot \frac{s'_1 \cdot s'_2 \ldots s'_k}{s_1 \cdot s_2 \ldots s_k}.$$

După simplificare ($n'_j = n_{j+1}$)

$$\beta = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \frac{s'_1 \cdot s'_2 \ldots s'_k}{s_1 \cdot s_2 \ldots s_k}. \qquad (13.160)$$

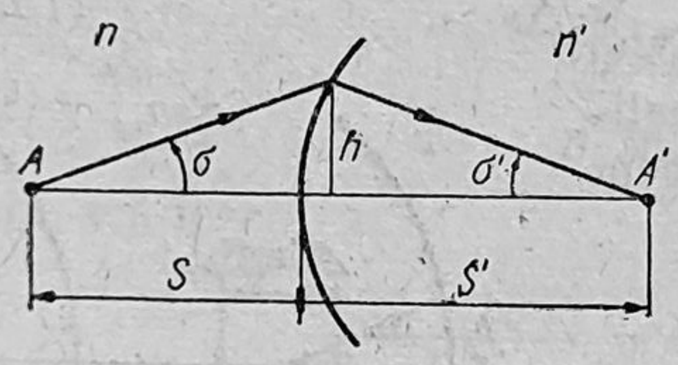


Fig. 13.68

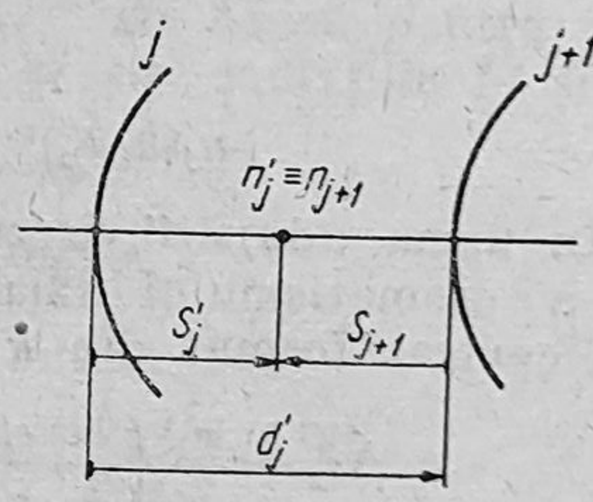


Fig. 13.69

Se logaritmează relația (13.160) și se diferențiază, obținîndu-se variația relativă a măririi transversale care este măsura aberației cromatice de mărire

$$\Delta\beta/\beta = \mathrm{d}n_1/n_1 - \mathrm{d}n'_k/n'_k + \sum_{j=1}^{k} \Delta s'_j/s'_j - \sum_{j=1}^{k} \Delta s_j/s_j. \qquad (13.161)$$

Relațiile de trecere de la un dioptru la altul sînt (fig. 13.69)

$$s'_j - s_{j+1} = d'_j \qquad (13.162)$$

$$\Delta s'_j = \Delta s_{j+1}.$$

UNIV. „AL. I. CUZA" BIBL. DE FIZICĂ

Ținînd seama de aceste relații, expresia aberației cromatice de mărire se poate scrie

$$\Delta\beta/\beta = \mathrm{d}n_1/n_1 - \mathrm{d}n'_k/n'_k + \Delta s'_k/s'_k - \Delta s_1/s_1 - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{d}'_j/(s'_j s_{j+1}) \cdot \Delta s'_j. \tag{13.163}$$

Această expresie capătă o formă mai simplă în cele mai frecvente cazuri, anume sistemul optic scăldat în aer : $n_1 = n'_k = 1$; $\mathrm{d}n_1 = \mathrm{d}n'_k = 0$ și obiectul lipsit de aberații cromatice $\Delta s_1 = 0$

$$\Delta\beta/\beta = \Delta s'_k/s'_k - \sum_{j=1}^{k-1} (d'_j \cdot \Delta s'_k)/(s'_j \cdot s_{j+1}). \tag{13.164}$$

Pentru sisteme subțiri ($d'_j \simeq 0$) rezultă

$$\Delta\beta/\beta = \Delta s'_k/s'_k \tag{13.165}$$

ceea ce reprezintă relația (13.132) în care $p' = 0$. Pentru sistemele subțiri anularea cromatismului de poziție implică anularea aberației cromatice de mărire.

13.8.6. **Aberații cromatice secundare. Apocromatismul**

Dacă o condiție de acromatism este îndeplinită pentru două radiații, C și F de exemplu, nu rezultă că această condiție este îndeplinită pentru toate

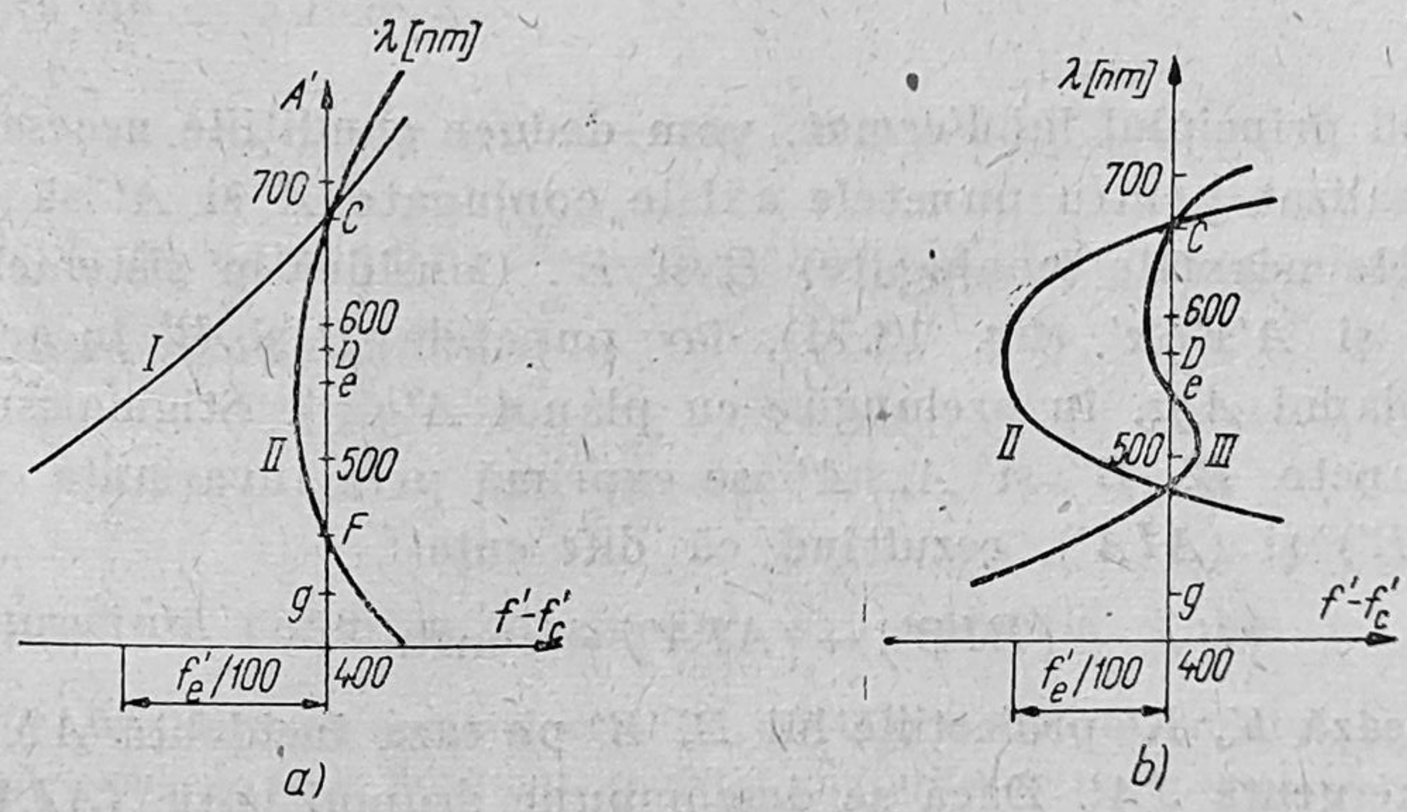


Fig. 13.70

radiațiile : sistemul optic prezintă un cromatism rezidual sau aberație cromatică secundară (fig. 13.70, a). Curba I reprezintă variația distanței focale $f' - f'_C$ pe abscisă pentru diferite lungimi de undă λ pe ordonată, în cazul unei lentile subțiri, iar curba II în cazul unui dublet acromatizat pentru radiațiile C și F. Se spune că dubletul prezintă pe axa optică un spectru repliat sau secundar. Ordinul de mărime al aberației cromatice secundare $f'_C - f'_e \simeq f'_e/1000$, față de aberația cromatică a unei lentile subțiri din crown $f'_C - f'_F \simeq f'_e/60$.

Sistemele optice pentru care s-a realizat reducerea cromatismului secundar se numesc *apocromatice*. Pentru aceasta este necesar ca opticianul care proiectează sistemul optic să aibă la dispoziție o varietate cît mai mare de sticle optice: apariția unor „sticle optice noi", cu proprietăți particulare, au condus la obținerea unor remarcabile succese în acest sens.

În reprezentarea din figura 13.70, b, a variației $f' - f'_C$ pentru diferite lungimi de undă, curba II se referă la un dublet acromatizat pentru radiațiile C și F, iar curba III la un triplet lipit (trei lentile lipite) care prezintă aceeași distanță focală pentru trei radiații (condiția pentru spectru dublu repliat)

$$f'_C = f'_e = f'_F. \tag{13.166}$$

Observație: Condiția $f'_C = f'_F$ reprezintă acromatizarea vizuală (maximul de sensibilitate a ochiului situîndu-se între radiațiile C și F). Dar pentru un obiectiv foto cu o punere la punct vizuală se urmărește obținerea acromatismului actinic-vizual, făcînd să coincidă imaginile pentru radiațiile D și g, deoarece maximul de sensibilitate a emulsiilor neortocromatice se află între aceste radiații.

13.9. Determinarea condițiilor pentru un stigmatism riguros, într-un element de volum din vecinătatea axei unui sistem optic centrat

Utilizînd principiul lui Fermat, vom deduce condițiile necesare ca stigmatismul realizat pentru punctele axiale conjugate A și A' să se extindă și la punctele neaxiale (conjugate) B și B'. Considerăm sistemele de referință $Axyz$ și $A'x'y'z'$ (fig. 13.71), iar punctele B și B' în același plan meridian (planul Ayz, în prelungire cu planul $A'y'z'$). Stigmatismul cuplurilor de puncte B, B' și A, A' se exprimă prin invarianța drumurilor optice (BIB') și (AIA'), rezultînd că diferența

$$(BIB') - (AIA') = \text{const.} \tag{13.167}$$

Se notează K, K' proiecțiile lui B, B' pe raza incidentă AI, respectiv, pe raza emergentă JA'. Dacă se descompune drumul optic (AIA') pe porțiuni și se ține seama de teorema lui Malus-Dupin, atunci condiția (13.167) se poate scrie

$$(BIB') - (AIA') = n' \cdot \overline{A'K'} - n \cdot \overline{AK} = \text{const.} \tag{13.168}$$

Segmentele $\overline{AK}$ și $\overline{A'K'}$ se pot exprima ca produse scalare

$$\overline{AK} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{u}\,; \quad \overline{A'K'} = \overrightarrow{\mathbf{A'B'}} \cdot \mathbf{u'},$$

unde $\mathbf{u}$ și $\mathbf{u'}$ sînt vectorii unitari ai razelor AI, respectiv JA', care au cosinușii directori ($\sin \tilde{\sigma} \sin \varphi$, $\sin \tilde{\sigma} \cos \varphi$, $\cos \tilde{\sigma}$) și, respectiv, ($\sin \tilde{\sigma}' \sin \varphi$,

sin $\tilde{\sigma}'$ cos φ, cos $\tilde{\sigma}'$) ; φ este unghiul planului meridian AIz cu Ayz. După efectuarea produselor scalare condiția (13.168) devine

$$(n'z' \cos \tilde{\sigma}' - nz \cos \tilde{\sigma}) + (n'y' \sin \tilde{\sigma}' - ny \sin \tilde{\sigma}) \cdot \cos \varphi = \text{const.} \tag{13.169}$$

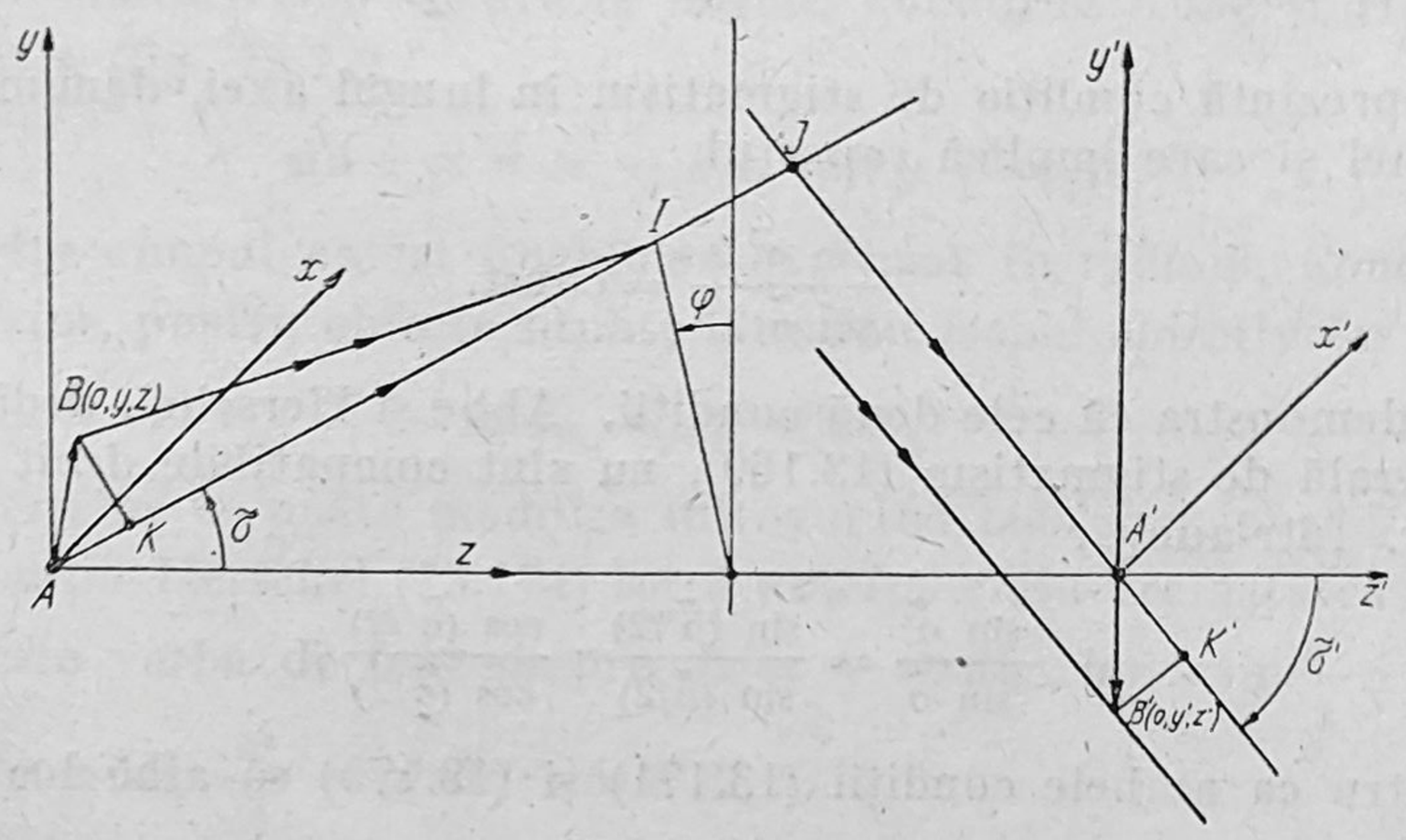


Fig. 13.71

Pentru ca această expresie să fie constantă este necesar mai întîi să fie independentă de φ, adică

$$n'y' \sin \tilde{\sigma}' - ny \sin \sigma = 0. \tag{13.170}$$

Ținînd seama de condiția $\frac{y'}{y} = \beta$=constant și de omogenitatea mediilor n și n', această relație devine

$$\frac{\sin \sigma'}{\sin \tilde{\sigma}} = \text{const.}, \tag{13.171}$$

ceea ce reprezintă condiția sinusurilor, sau condiția Abbe.

Observație. În domeniul paraxial condiția (13.170) devine invariantul Lagrange-Helmholtz și, ținînd seama de acest invariant, condiția sinusurilor se poate scrie

$$\frac{\sin \tilde{\sigma}'}{\sin \tilde{\sigma}} = \frac{\sigma'}{\sigma} = \text{const.} \tag{13.172}$$

Vom vedea că această condiție este fundamentală în construcția aparatelor optice, în cazul reprezentării obiectelor plane perpendiculare pe axă ; aceste sisteme optice se numesc *aplanetice.*

Dacă se presupune că $y = y' = 0$, adică segmentele $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ sînt în lungul axei optice, atunci expresia (13.169) se reduce la

$$n'z' \cos \tilde{\sigma}' - nz \cos \tilde{\sigma} = \text{const.}, \tag{13.173}$$

pentru orice valoare a unghiului $\tilde{\sigma}$. Făcînd $\sigma = \sigma' = 0$ se obţine

$$n'z' \cos \tilde{\sigma}' - nz \cos \tilde{\sigma} = n'z' - nz$$

deci

$$n'z' \sin^2 \frac{\tilde{\sigma}'}{2} = nz \sin^2 \frac{\tilde{\sigma}}{2} \qquad (13.174)$$

ceea ce reprezintă condiţia de stigmatism în lungul axei, denumită condiţia lui Herschel şi care implică raportul

$$\frac{\sin \tilde{\sigma}'/2}{\sin \tilde{\sigma}/2} = \text{const.} \qquad (13.175)$$

Se poate demonstra că cele două condiţii, Abbe şi Herschel, deduse din condiţia generală de stigmatism (13.169), nu sînt compatibile decît într-un caz particular. Într-adevăr

$$\frac{\sin \tilde{\sigma}'}{\sin \tilde{\sigma}} = \frac{\sin (\tilde{\sigma}'/2)}{\sin (\tilde{\sigma}/2)} \cdot \frac{\cos (\tilde{\sigma}'/2)}{\cos (\tilde{\sigma}/2)}$$

deci, pentru ca ambele condiţii (13.171) şi (13.175) să aibă loc este necesar ca

$$\frac{\cos (\tilde{\sigma}'/2)}{\cos (\tilde{\sigma}/2)} = \text{const.} = 1, \qquad (13.176)$$

raport determinat din relaţiile (13.170) şi (13.174) şi ţinînd seama de relaţia între măririle axială $\alpha = \frac{dz'}{dz}$ şi transversală $\beta = \frac{dy'}{dy}$. Remarcăm că întrucît B şi B' se află în vecinătatea punctelor axiale A şi, respectiv, A', coordonatele y, z pot fi înlocuite prin dy, dz şi y', z' prin dy', dz'. Rezultă că $|\tilde{\sigma}'| = |\tilde{\sigma}|$

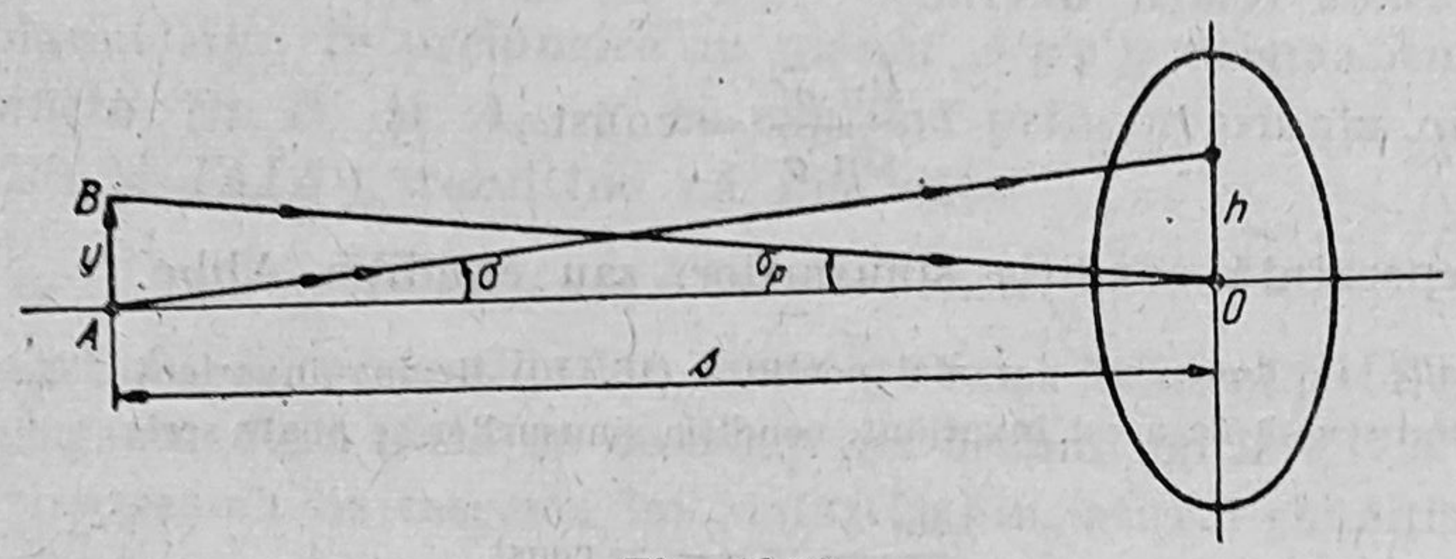


Fig. 13.72

(proprietatea planelor nodale şi antinodale) astfel încît condiţiile Abbe şi Herschel să fie îndeplinite simultan.

În afară de acest caz particular, condiţiile Abbe şi Herschel nu sînt compatibile: pentru unghiuri $\tilde{\sigma}$ şi $\tilde{\sigma}'$ mari este în general imposibil să se construiască un sistem optic perfect, adică stigmatic pentru un element de volum în jurul lui A. Proiectantul va trebui, aşadar, să respecte condiţia care pare cea mai utilă pentru aparatul optic proiectat:

— dacă aparatul este destinat formării imaginii unui obiect plan perpendicular pe axă este necesar ca să se respecte condiția Abbe (sisteme optice aplanetice); exemple: obiective de microscop, obiective de proiecție etc.

— dacă aparatul este destinat să vizeze un punct mobil pe axă, trebuie să se satisfacă condiția lui Herschel; de exemplu: binoclu, telemetru etc.

În cazul obiectivelor situate la infinit, condițiile Abbe și Herschel iau forme speciale (fig. 13.72)

$$\sin\sigma \approx \sigma \approx -h/s, \text{ iar } y = s\sigma_p,$$

unde $2\sigma_p$ este cîmpul obiect unghiular exprimat în radiani. Condiția Abbe (13.170) devine, pentru obiecte situate la infinit (cazul obiectivelor de lunete)

$$-nh\sigma_p = n'y' \sin\sigma', \tag{13.177}$$

Condiția Herschel se poate modifica introducînd mărimea inversă: $\xi = 1/z$. Cum în condiția Herschel (13.174) intră abscisa z din vecinătatea punctului obiect A, este vorba de fapt despre $dz = -z^2 \cdot d\xi$, iar: $\sin^2\frac{\sigma'}{2} \simeq \left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4z^2}$

$$(13.174) \rightarrow -n \cdot d\xi \cdot \frac{h^2}{4} = n' \cdot dz' \cdot \sin^2\sigma'/2, \tag{13.178}$$

ceea ce duce la condiția

$$\frac{h}{\sin\sigma'/2} = \text{const.} \tag{13.179}$$

În cazul imaginii situate la infinit (de exemplu: obiectiv de colimator sau obiectiv de microscop cu tubul „infinit") se procedează analog, modificînd membrul ce reprezintă spațiul imagine în condițiile respective.

Concluzie asupra studiului opticii de ordinul I (aproximarea lui Gauss). Subliniem încă o dată că studiul făcut este valabil în domeniul paraxial, pentru unghiuri mici ale razelor cu axa optică a sistemelor centrate. Am demonstrat existența, în aceste condiții, a planelor principale, a planelor nodale etc., dar nu putem vorbi de aceste plane dacă deschiderile sistemelor sînt mari: condițiile de stigmatism riguros (Abbe și Herschel) devin incompatibile pentru înclinări $\tilde{\sigma}$ mari.

Există tentația de a defini o reprezentare stigmatică a spațiului obiect în spațiul imagine, extinzînd rezultatele obținute în optica de ordinul întîi; este suficient, pentru aceasta, de a uita condiția de menținere în domeniul paraxial și a prespune că stigmatismul se menține, ca și ortoscopia (asemănarea imaginii cu obiectul), oricare ar fi deschiderea sistemului optic și cîmpul acestuia. Se obține astfel o transformare ideală denumită deseori omografie optică, deși această omografie este în contradicție cu legile fundamentale ale opticii geometrice. Este de ajuns să extindem invariantul Lagrange-Helmholtz în domeniul extraaxial

$$n\tilde{y} \cdot \operatorname{tg}\tilde{\sigma} = n'\tilde{y}' \cdot \operatorname{tg}\tilde{\sigma}' \tag{13.180}$$

și să observăm că pentru a menține mărirea transversală $\beta = \tilde{y}'/\tilde{y} = \text{const.}$ este ncesar să avem $\text{tg}\ \tilde{\sigma}'/\text{tg}\ \tilde{\sigma} = \text{const}$, ceea ce contrazice condiția sinusurilor pentru realizarea stigmatismului $\sin \tilde{\sigma}'/\sin \tilde{\sigma} = \text{const.}$ (13.171). Omografia optică este deci irealizabilă, sistemele optice reale fiind în mod necesar imperfecte; se consideră satisfăcător (chiar foarte bun) un sistem optic care realizează reprezentarea stigmatică a unei suprafețe-obiect plane perpendiculare pe axa optică.

13.10. **Aberațiile geometrice**

S-a văzut că în domeniul opticii de ordinul I aberațiile cromatice afectează calitatea imaginii date de un aparat optic. În acest paragraf vom studia formarea imaginilor prin sisteme optice, fără a ne limita la domeniul paraxial, dar limitîndu-ne la cazul în care lumina este monocromatică. Nerespectarea condițiilor de stigmatism, planeitate, ortoscopie, care caracterizează formarea imaginilor prin sistemele optice ideale, duce la apariția aberațiilor geometrice ale sistemelor optice reale, aberații care se datorează în principal formei sferice (sau plane) a suprafețelor optice utilizate la realizarea lentilelor, oglinzilor etc. (tehnologiile actuale nu permit obținerea unor suprafețe asferice avînd proprietăți optice comparabile cu cele ale suprafețelor sferice). Pentru a pune în evidență apariția principalelor aberații geometrice vom întreprinde un studiu experimental asupra formării imaginilor prin sisteme optice reale.

13.10.1. **Aberația de sfericitate**

Considerăm o lentilă convergentă subțire de mare deschidere ($f' = 100$ mm, $D = 50$ mm), figura 13.73. Se poate constata experimental că nu există nici o poziție a ecranului pentru care imaginea unui punct obiect îndepărtat

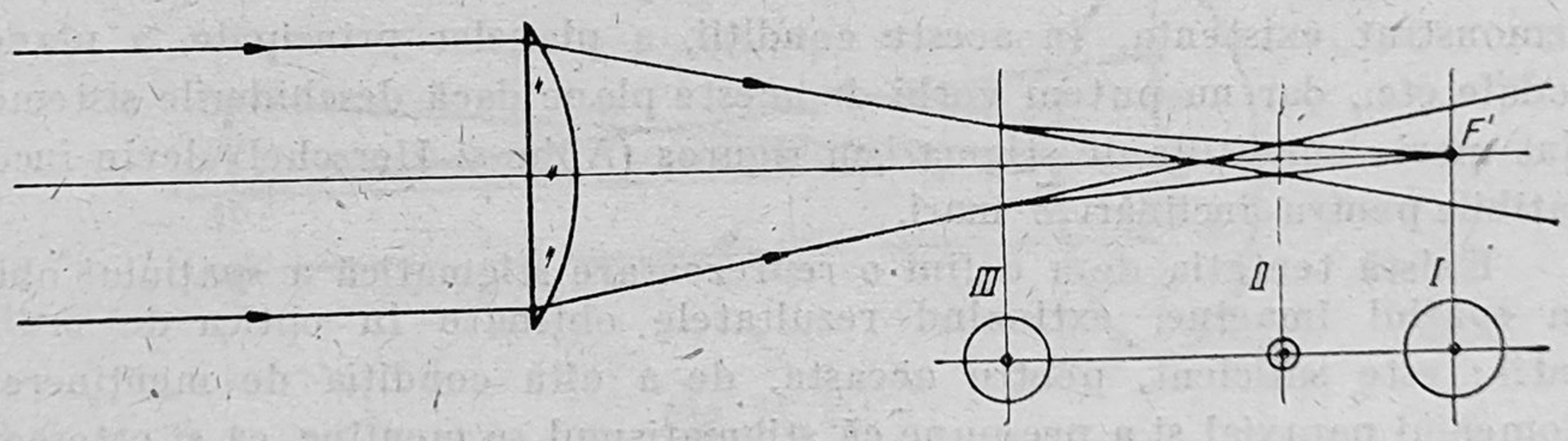


Fig. 13.73

devine punctiformă : dacă ecranul este plasat în planul imagine gaussian (I) fasciculul care traversează lentila în regiunea paraxială converge în F', dar razele care traversează lentila în regiuni îndepărtate de axă produc în jurul lui F' o regiune luminoasă difuză (*halo*) ; dacă ecranul se plasează în planul II nu prea îndepăratat de I, imaginea constă dintr-un punct luminos central înconjurat de un inel luminos a cărui rază crește cu cît ecranul se depăr-

tează de planul imagine gaussian. Ansamblul fenomenului poate fi pus în evidență dacă experiența are loc într-o încăpere obscurizată, iar în spațiul imagine se difuzează un fum fin : se observă în acest caz, o suprafață iluminată mai puternic (înfășurătoarea razelor emergente, numită *suprafață caustică*). De fapt suprafața caustică are două pînze : cea menționată, care se numește suprafața tangențială și o a doua pînză, în cazul de față degenerată într-un segment de dreaptă (pe axa optică), numită suprafață caustică sagitală.

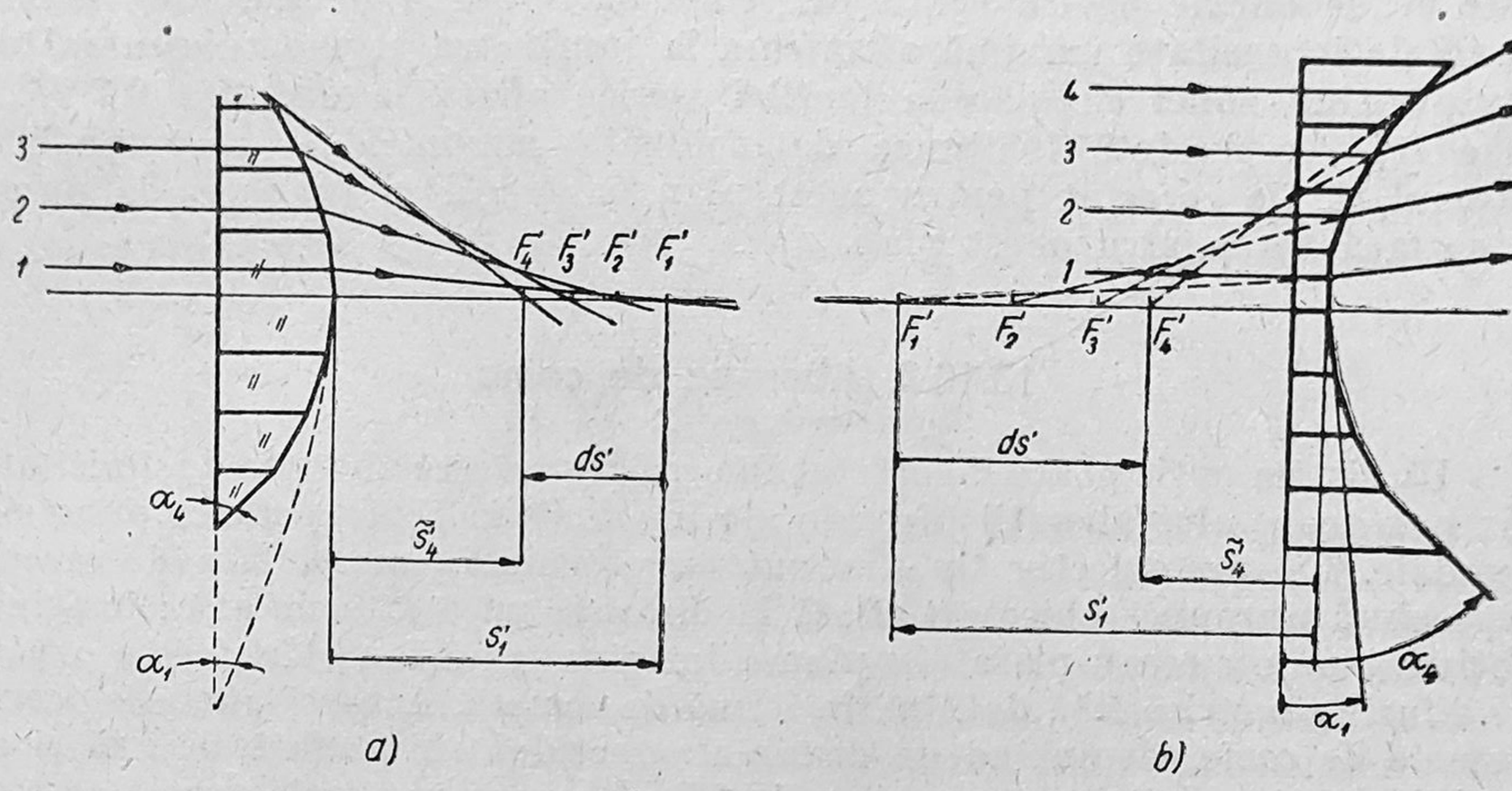


Fig. 13.74

Se constată, așadar, că fiecare zonă a lentilei dă naștere unui focar particular a cărui poziție depinde de diametrul zonei respective. Această aberație a sistemului optic poartă numele de *aberație sferică* sau aberație de sfericitate.

Apariția aberației de sfericitate a lentilelor se explică prin efectul prismatic al acestora, deoarece o secțiune meridiană a unei lentile, de exemplu plan-convexă sau plan-concavă, poate fi asimilată cu o sumă de secțiuni prin prisme (fig. 13.74).

Fie o prismă confecționată din sticlă optică cu indicele de refracție n, aflată în aer. Scriind legea refracției în punctul I_2 (în I_1 raza este normală la fața plană a prismei) se obține: $n \sin \alpha = \sin i'$, unde $i' = \alpha + \delta$ (fig. 13.75). Pentru unghiuri α mici, rezultă deviația produsă de prismă, către baza ei

$$\delta = \alpha(n - 1). \qquad (13.181)$$

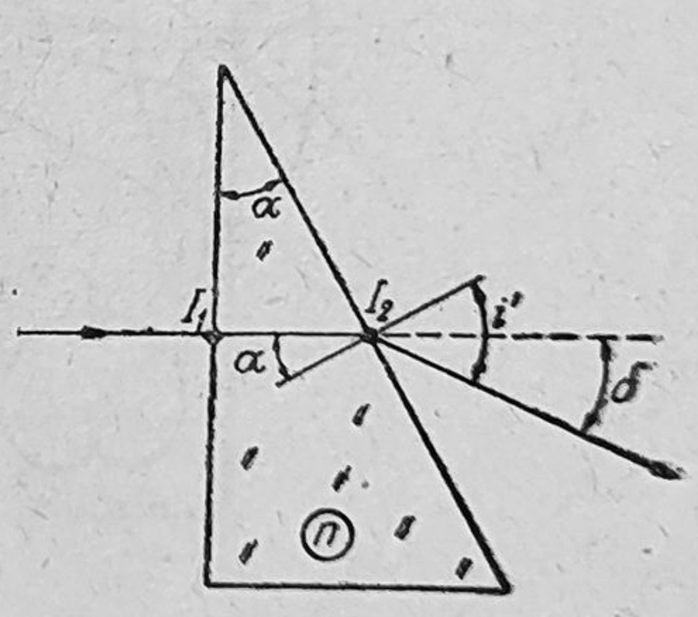


Fig. 13.75

Cum unghiul la vîrf al prismei crește către marginea lentilei, pentru ambele tipuri considerate, ($a_4 > \alpha_1$), deviația produsă razelor crește cu depărtarea față de axa optică. Considerînd aberația sferică (axială sau longitudinală) exprimată ca diferența absciselor față de abscisa în domeniul paraxial :

$$ds' = \tilde{s}' - s' \qquad (13.182)$$

rezultă că $ds' < 0$ pentru lentila convergentă (subcorectată) și $ds' > 0$ pentru lentila divergentă (supracorectată).

Efectul asupra imaginilor constă în neclaritatea centrului cîmpului imagine. Corectarea aberației de sfericitate se poate realiza fie prin diafrag. marea fasciculelor (utilizarea numai a domeniului apropiat de axa optică)- fie prin combinarea a două lentile (una convergentă, cealaltă divergentă)-

Aberația sferică transversală este reprezentată de raza cercului de di, fuzie ce se obține pe un ecran perpendicular pe axa optică. Se remarcă cercul de intensitate maximă aflat cam la jumătatea segmentului axial ds', corespunzînd zonei circulare a lentilei sferice aflată la distanța 0,7 H_{max}, unde H_{max} reprezintă înălțimea de incidență maximă. Se recomandă ca sistemul să fie corectat pentru acest plan, iar reglarea (punerea la punct) să se facă tot pentru acest plan.

13.10.2. Aberația de coma

Un sistem optic poate fi corectat în ceea ce privește aberația de sfericitate, dar pot apare alte aberații (defecte ale imaginii) la reprezentarea punctelor neaxiale. Fie un obiectiv tip Clairaut cu deschidere mare, față de care se reprezintă un punct obiect B aflată la distanță mică față de axă : imaginea obținută pe un ecran plasat în planul imagine gaussian $A'x'y'$ este o pată de difuzie simetrică față de $A'y'$, în formă de cometă. Această aberație poartă numele de *coma*, depinzînd de distanța punctului obiect față de axă și de deschiderea pupilei de intrare (fig. 13.76). Dacă se pot izola razele ce trec

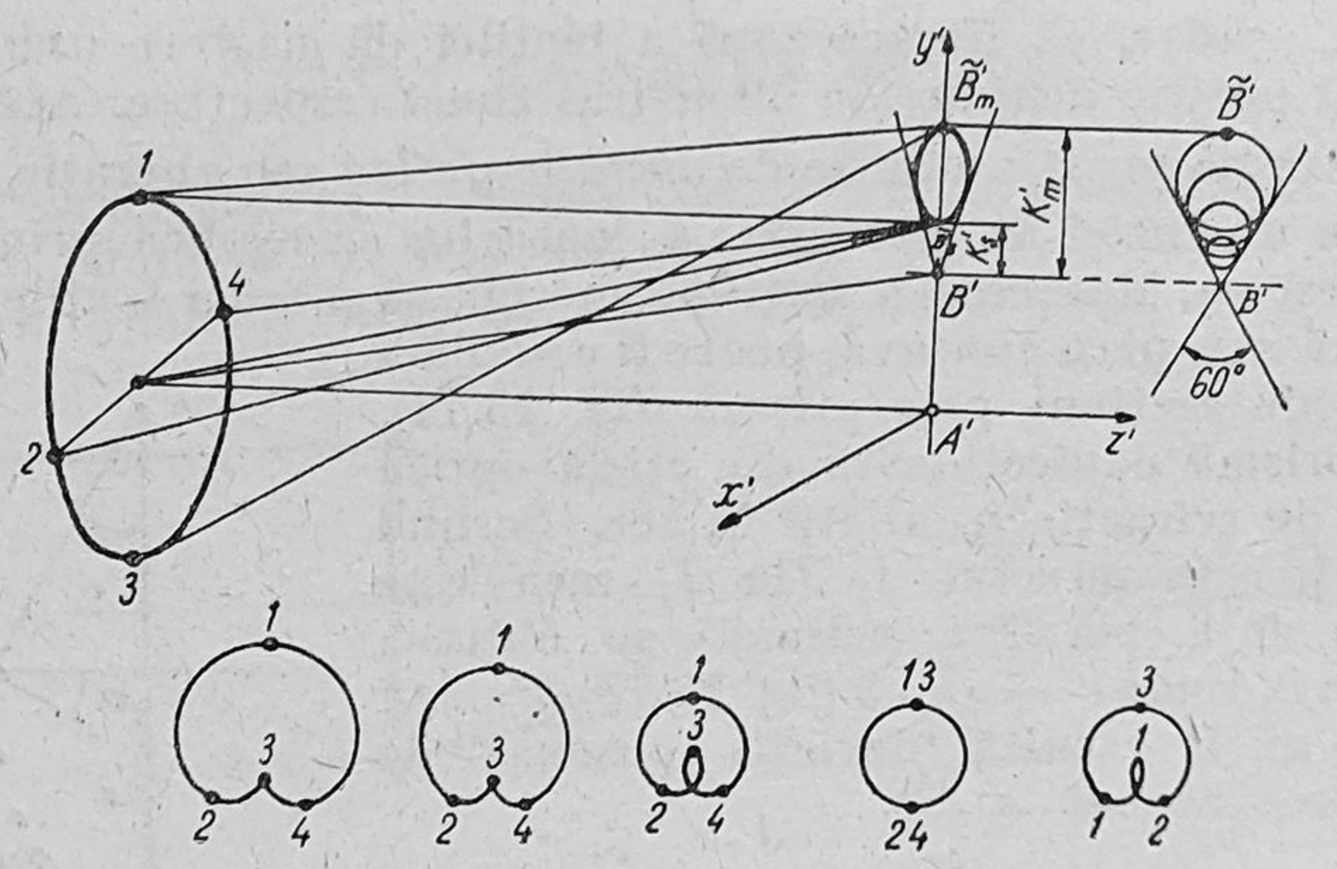


Fig. 13.76

printr-o zonă circulară a sistemului optic (raze care în cazul unui sistem optic ideal ar forma un fascicul emergent conic cu vîrful în B) se observă pe un ecran mobil perpendicular pe axa optică diferite curbe care prezintă mai întîi o cavitate, apoi un punct de întoarcere, o buclă, pentru ca în planul imagine gaussian să se transforme într-un cerc descris de două ori. Dacă se continuă deplasarea ecranului se regăsesc formele curbelor prezentînd o

buclă, un punct de întoarcere etc. Pata de difuzie din planul $A'x'y'$ reprezintă mulțimea cercurilor duble provenind de la diferitele zone ale sistemului optic, calculul aberației de coma demonstrînd că toate aceste cercuri admit două tangente comune ce fac un unghi de 60°.

Observație. Experimental se observă arareori aberația de coma pură, izolată; de obicei, coma este însoțită de sfericitate sau de astigmatism (o altă aberație geometrică principală). Apariția aberației de coma se explică prin același efect prismatic al lentilelor sferice, lipsa simetriei de revoluție datorîndu-se reprezentării punctelor extraaxiale. Mărimea aberație de coma primară se exprimă prin : $B'\tilde{B}'_m = k'_m$ (*coma meridiană*) și $B'\tilde{B}'_s = k'_s$ (*coma sagitală*), unde $\tilde{B}'_m$ se obține cu razele trecînd prin marginile 1, 3 ale pupilei, situate în planul meridian determinat de raza pupilară principală și de axa sistemului, iar $\tilde{B}'_s$ se obține cu razele trecînd prin marginile 2, 4 ale pupilei, situate în planul sagital, trecînd prin raza pupilară principală, perpendicular pe planul meridian. Se observă că $k'_s < k'_m$. În calculele optice, influența aberației de coma se măsoară prin variația relativă a măririi transversale $d\beta/\beta$, datorată efectului prismatic al lentilelor sferice față de fasciculele puțin înclinate.

13.10.3. Astigmatismul

Se consideră aceeași lentilă simplă utilizată în studiul experimental al aberației de sfericitate; îndepărtînd din ce în ce mai mult punctul obiect față de axa sistemului, se constată că suprafața caustică (înfășurătoarea razelor emergente care provin de la punctul obiect B) se modifică, prezentînd două pînze distincte, care corespund suprafețelor tangențială și sagitală de la aberația de sfericitate (fig. 13.77). Dacă deschiderea unghiulară a fasciculului emergent este foarte mică (diafragmare puternică), porțiunile mici ale causticii

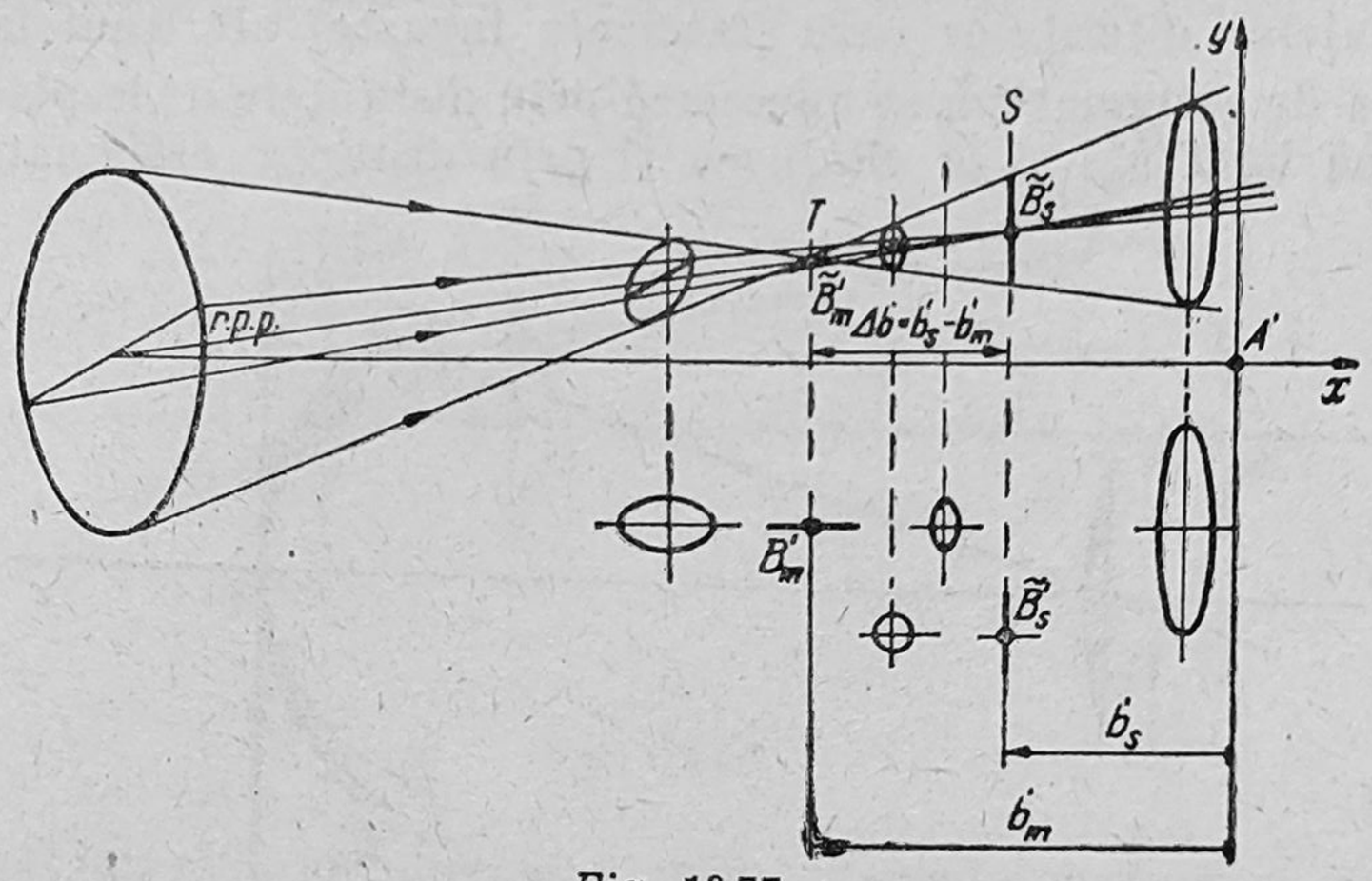


Fig. 13.77

pot fi asimilate cu planele lor tangente. Unul din aceste plane este confundat cu planul meridian determinat de raza pupilară principală și axa optică, iar celălalt este planul sagital perpendicular pe planul meridian, conținînd, de asemenea, raza pupilară principală. Deplasînd un ecran, perpendicular pe raza pupilară principală, se determină două poziții pentru care secțiunea fasciculului emergent se reduce practic la un segment mic de dreaptă ; aceste

două segmente constituie focalele fasciculului (focalele lui Sturm), una dintre ele este perpendiculară pe planul meridian (focala tangențială T), iar alta este conținută de planul meridian (focala sagitală S). Această aberație a fasciculelor înguste și înclinate mult față de axa optică se numește astigmatism (nefocalizarea într-un singur punct imagine), distanța astigmatică $\Delta b'$ fiind egală cu distanța între focalele T și S.

Secțiunile transversale ale fasciculului emergent se modifică pornind de la o formă circulară (în apropierea suprafeței de ieșire din sistemul optic),

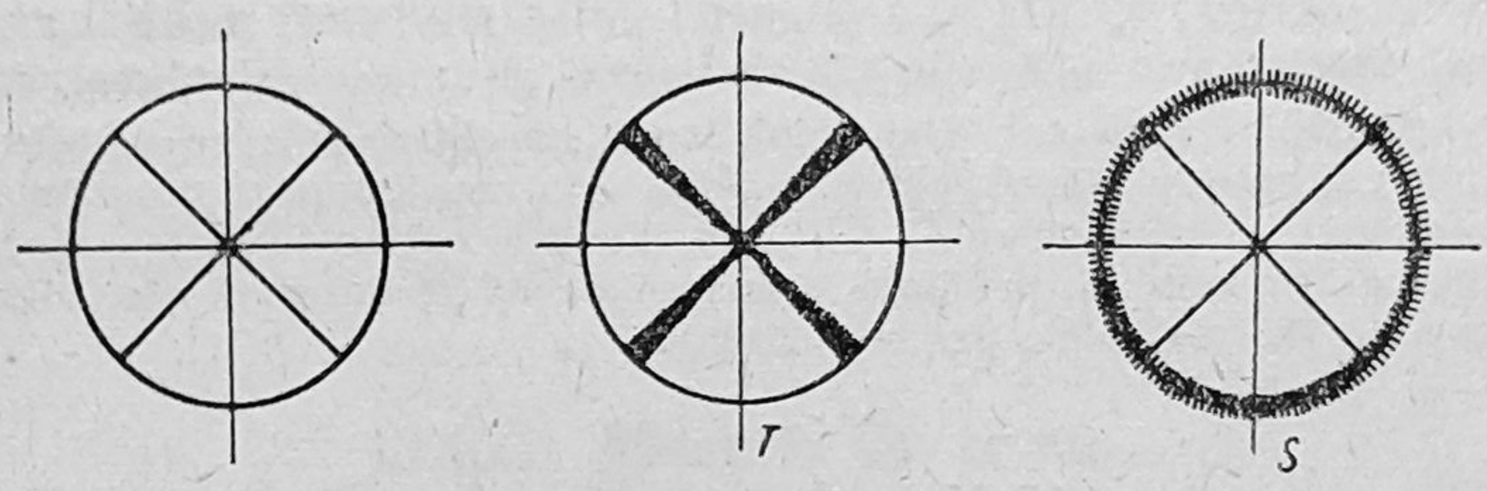


Fig. 13.78

apoi eliptică, care se aplatizează, reducîndu-se la un segment de dreaptă cînd secțiunea trece prin T; se obțin apoi elipse cu axa mare paralelă cu focala tangențială, iar, aproximativ la mijlocul distanței astigmatice, secțiunea transversală devine circulară (cercul de difuzie minimă), după care secțiunile sînt eliptice cu axa mare paralelă cu S, reducîndu-se din nou la o dreaptă cînd secțiunea trece prin S. Dacă se mărește deschiderea pupilei se observă că în jurul focalelor T și S apar două elemente ale suprafeței caustice ale căror dimensiuni cresc odată cu diametrul pupilei. Caustica apare, așadar, ca locul focalelor diferitelor raze (fascicule înguste) ale unui fascicul larg.

Aberația de astigmatism se apreciază prin distanțele de la planul imagine gaussian pînă la $T(b'_m)$ și la $S(b'_s)$, ca și prin distanța astigmatică : $\Delta b' = b'_s - b'_m$.

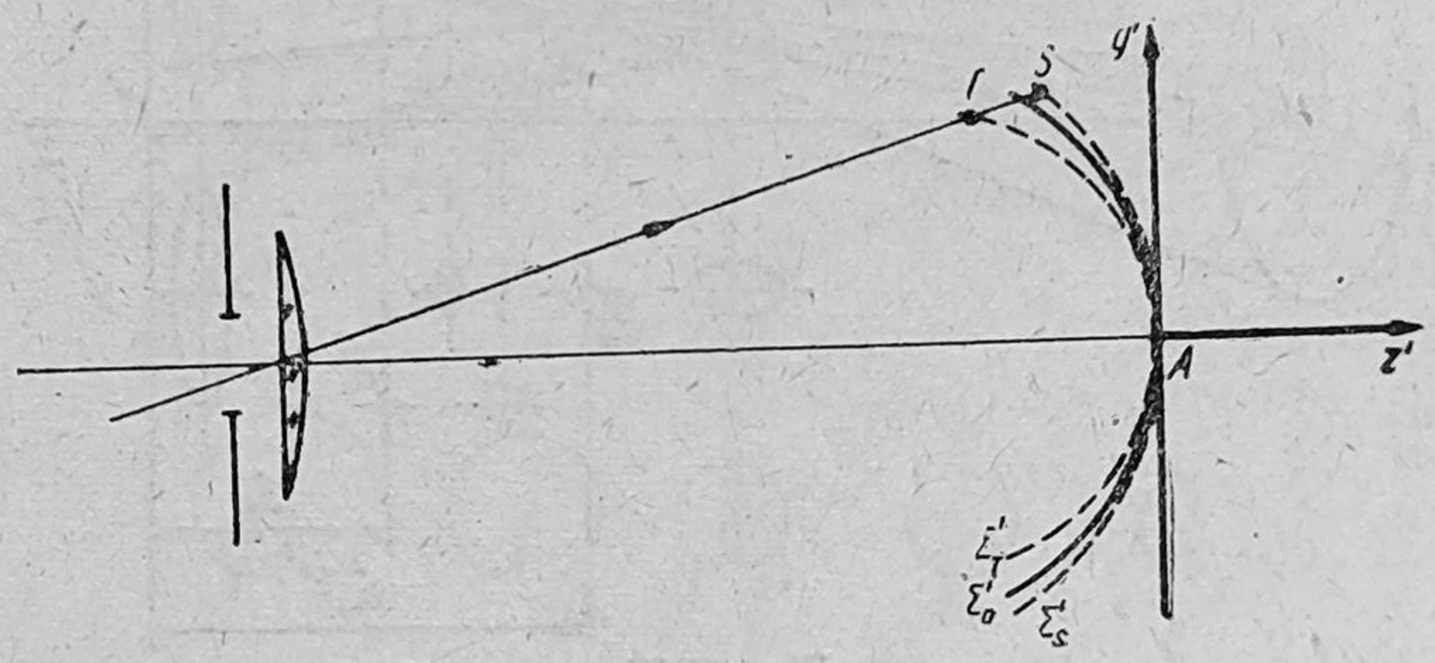


Fig. 13.79

S-a studiat efectul aberației de astigmatism în cazul imaginii unui punct extraaxial. Aberația de astigmatism este pusă în evidență în mod foarte sugestiv dacă se utilizează ca obiect un reticul format dintr-un cerc și fire radiale, iar pentru planul imagine un ecran perpendicular pe axa optică (fig. 13.78). Cînd ecranul se plasează în T apare netă imaginea cercului, iar firele reticulare sînt din ce în ce mai neclare spre margini ; cînd ecranul se

plasează în S firele reticulare apar clar, în timp ce imaginea cercului devine neclară. Ținînd seama de cele arătate, în construcția aparatelor optice de măsurat se recomandă utilizarea reticulelor prezentînd fire radiale, corectarea sistemului optic ca și punerea la punct făcîndu-se pentru planul imagine trecînd prin S.

Să urmărim acum efectul astigmatismului în cazul unui obiect plan perpendicular pe axă, foarte îndepărtat (la infinit) față de sistemul optic, care prezintă o diafragmă cu deschidere mică. Pentru fiecare punct obiect se obțin două focale T și S care descriu, cînd punctul obiect se deplasează în planul obiect, două suprafețe imagine de revoluție Σ'_T și Σ'_S tangente la planul focal imagine (fig. 13.79).

13.10.4. **Curbura cîmpului**

Așadar, dacă pupila unui sistem optic este mică, imaginea unui obiect plan este curbă, situată între suprafețele imagine tangențială și sagitală. Cea mai bună imagine (locul geometric al cercurilor de difuzie minimă Σ'_0) nu este nici ea plană : se spune că sistemul optic prezintă aberația de curbură a cîmpului. Apariția acestei aberații s-ar explica, după cum s-a văzut, pe baza aberației de astigmatism (fig. 13.79). Dar curbura cîmpului nu dispare chiar dacă astigmatismul este anulat.

Astfel, dacă se plasează o diafragmă de deschidere în fața unei lentile simple, la distanța $s \simeq \bar{f}/3$ față de lentilă, se constată că astigmatismul este practic suprimat, dar suprafața imagine Σ' păstrează o curbură importantă (fig. 13.80).

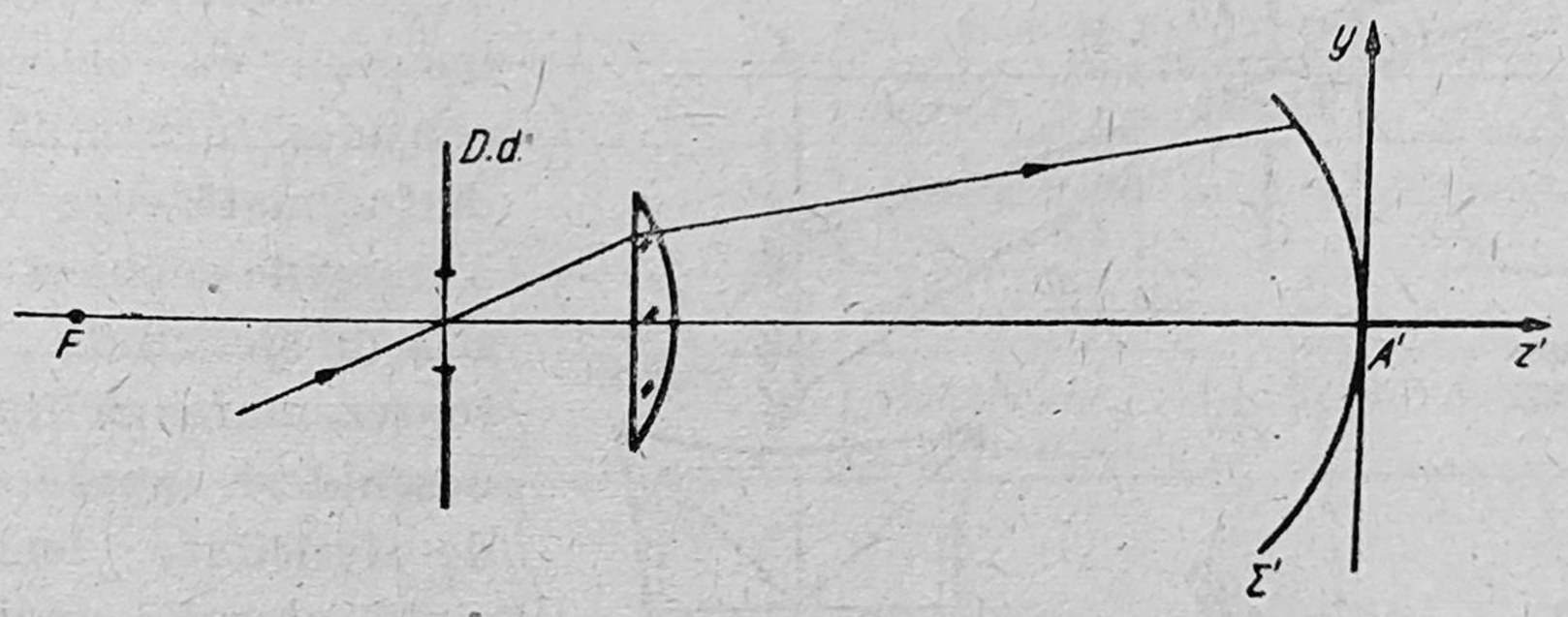


Fig. 13.80

Curbura cîmpului se apreciază prin diferența curburilor suprafețelor imagine și obiect :

$$C_m = \frac{1}{n' R'_T} - \frac{1}{nR} \text{ curcura meridiană}$$

$$C_s = \frac{1}{n' R'_T} - \frac{1}{nR} \text{ curbura sagitală}$$

$$C = \frac{1}{2}(C_m + C_s) \text{ curbura medie}$$

unde R'_T și R'_S sînt razele de curbură ale suprafețelor imagine $\sum'_T$ și $\sum'_S$, iar R este raza de curbură a suprafeței obiect. În cazul cel mai interesant pentru aparatele optice de măsurat, obiectul este plan ($R = \infty$), iar spațiul imagine are $n' = 1$ (aer), astfel încît curbura cîmpului reprezintă curbura suprafeței imagine

$$C_m = 1/R'_T\,;\; C_s = 1/R'_S\,;\; C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'_T} + \frac{1}{R'_S}\right). \qquad (13.183)$$

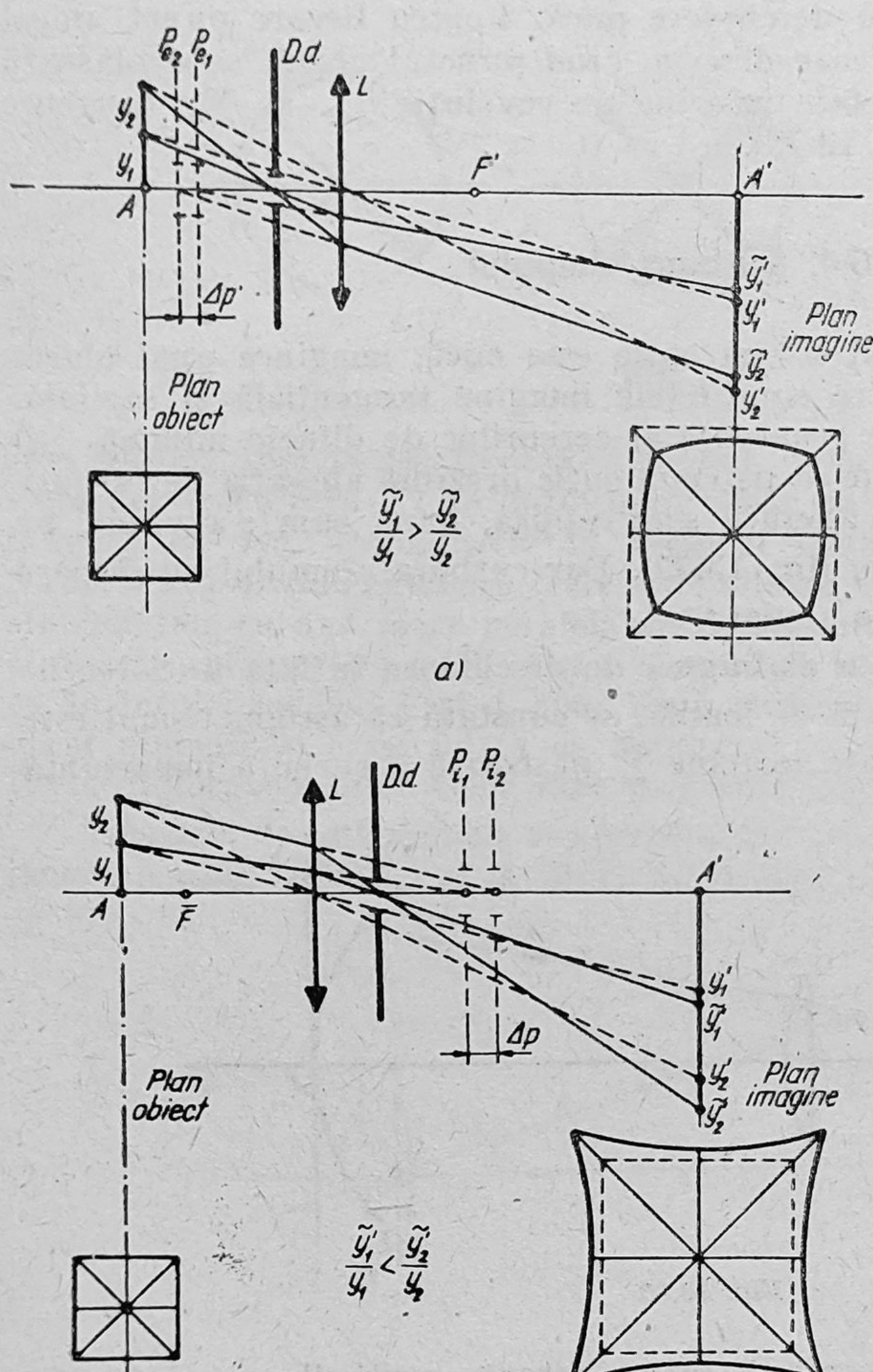


Fig. 13.81

Atunci cînd nu se poate elimina sau reduce curbura cîmpului, pentru a evita efectul acesteia asupra imaginii (pentru a obține o imagine netă) se folosesc receptori de forma suprafeței imagine $\sum'_0$. Exemple: ecranele panoramice de cinema, ecranele televizoarelor de dimensiuni mari; chiar retina ochiului constituie un exemplu.

13.10.5. **Distorsiunea**

Această aberație constă în nerespectarea condiției de ortoscopie (asemănarea imaginii cu obiectul). Se consideră o lentilă subțire diafragmată care formează o imagine a obiectului, lipsită de sfericitate. Însă, la reprezentarea diafragmei de deschidere, apare aberația de sfericitate: lentila prezintă *aberație pupilară*. Se constată că dacă diafragma de deschidere se află în fața lentilei (fig. 13.81, *a*) mărirea transversală β scade cu cît obiectul este mai mare; aberația se numește *distorsiune negativă*: $\Delta\tilde{\beta}/\beta < 0$. Mărimea distorsiunii se apreciază prin variația relativă a măririi sau a imaginii

$$\frac{\Delta\tilde{\beta}}{\beta} = \frac{\Delta\tilde{y}'}{y'} = \frac{\tilde{y}' - y'}{y'} = \frac{\tilde{y}'}{y'} - 1. \qquad (13.184)$$

Dacă diafragma de deschidere este situată după lentilă (fig. 13.81, *b*) mărirea transversală crește odată cu mărimea obiectului : lentila prezintă *distorsiunea pozitivă* : $\Delta\tilde{\beta}/\beta > 0$.

Apariţia distorsiunii se datorează aceluiași efect prismatic al lentilei, poziția diafragmei de deschidere înainte sau după lentilă modificînd intersecţiile razelor pupilare principale cu lentila (sub și respectiv deasupra axei optice), ceea ce duce la micșorarea, respectiv creșterea lui β.

Eliminarea distorsiunii se poate realiza utilizînd lentile subțiri, sau chiar groase, rolul diafragmei de deschidere fiind jucat de monturile acestora. O altă posibilitate este utilizarea unor sisteme optice simetrice față de planul diafragmei de deschidere (sînt realizate astfel obiective fotografice dublu anastigmate).

Aberaţiile geometrice principale descrise mai înainte nu afectează numai lentilele subțiri ci toate sistemele optice, ele neputînd fi anulate simultan datorită interdependenței complexe care există între ele și a influenţelor diferite ale parametrilor constructivi ai sistemului optic (indici de refracție, raze de curbură, grosimi, distanțe, poziția și mărimea diafragmei) asupra lor. Dealtfel, în funcție de felul sistemului optic, interesează reducerea mai mult sau mai puțin a unor anumite aberaţii, după cum se indică în tabelul 13.1. Pentru toate aparatele de măsurat, distorsiunea trebuie redusă pentru a nu influența rezultatele măsurătorilor. În schimb, aberaţiile cromatice nu interesează deoarece se pot utiliza filtre monocromatoare. La un sistem optic aberaţiile geometrice sînt însoțite și influențate de aberaţiile cromatice.

Tabelul 13.1

Tipul sistemului optic	Aberaţiile care se corectează
Obiectivul microscopului de măsurare	Astigmatism, sfericitate, coma
Obiectiv de lunetă	Sfericitate, cromatism
Ocular de măsurare	Astigmatism, curbura cîmpului, distorsiune și cromatism
Obiectiv pentru proiector de profile	Distorsiune, astigmatism, curbura cîmpului
Obiectiv foto	Distorsiune, astigmatism, curbura cîmpului, cromatism

13.10.6. **Proprietăţile aberaţiilor geometrice**

Cînd aberaţiile unui sistem optic sînt mici este mai comod să se studieze *aberaţia de undă* : depărtarea între suprafața echifază reală, transmisă prin sistem, și suprafața echifază ideală, o sferă de referinţă centrată în punctul imagine gaussian ; principiul lui Fermat și teorema Malus-Dupin permit stabilirea unei relaţii între variațiile drumului optic de la punctul obiect la punctul imagine și aberaţia de undă. Vom evita să dezvoltăm sub o formă foarte generală studiul drumuirilor optice (teoria bazată pe ecuaţia eiconalului, dedusă din legile propagării radiației electromagnetice) și ne vom limita la proprietăți direct utilizabile în aparatele optice.

1° *Diferența de drum optic între două trasee vecine ale luminii.* Fie razele obiect și imagine, de vectori unitari **u** și **u**′ (fig. 13.82), trecînd prin punctele conjugate obiect B și imagine B'; deplasările elementare ale lui B și B' sînt **dB**, **dB**′. În acest caz, ținînd seama de teorema lui Malus-Dupin variația drumului optic între traseele vecine (BB') și $(B_1'B_1')$ este

$$(BB') - (B_1B_1') = \mathrm{d}(l) = n\overline{Bb} - n'\overline{B'b'} = n(\mathbf{u}\cdot\mathbf{dB}) - n'(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{dB}') \tag{13.185}$$

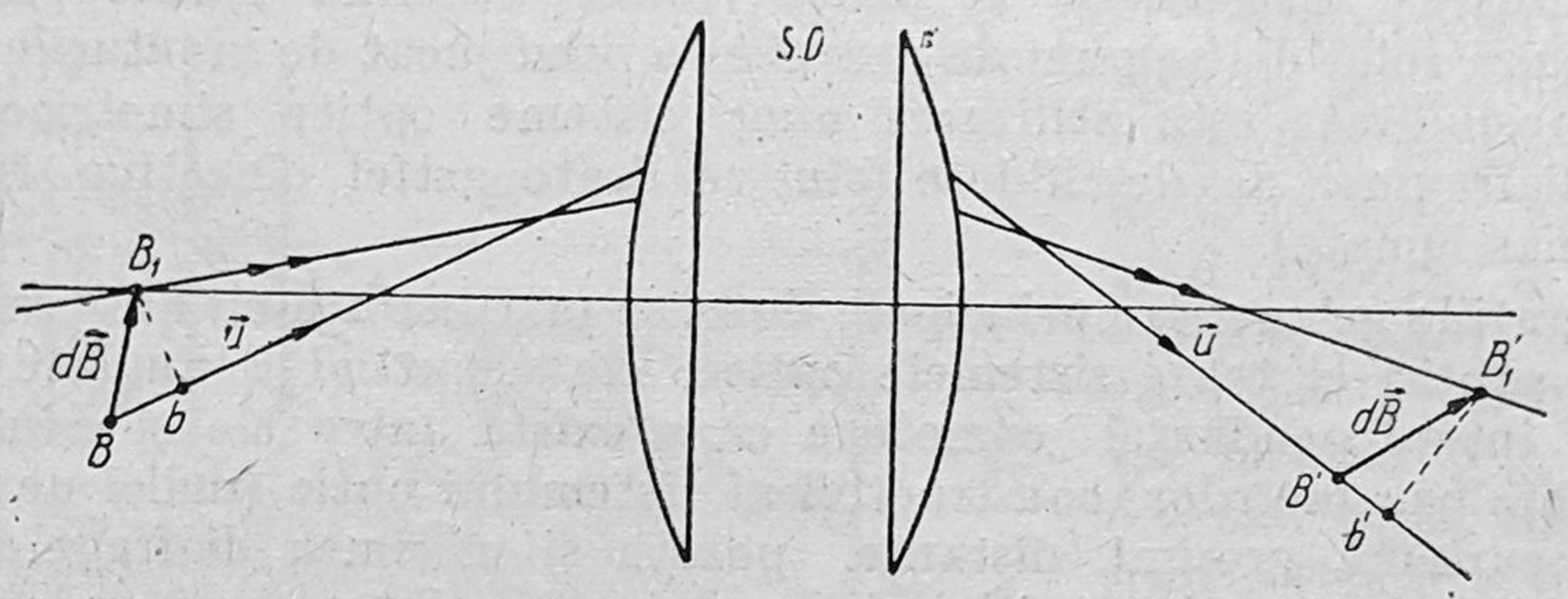


Fig. 13.82

2° *Teorema lui Gouy :* o deformație mică a undei se poate transfera din spațiul obiect în spațiul imagine cu relația

$$n'\Delta' = n\Delta. \tag{13.186}$$

Fie suprafața echifază incidentă S și suprafața echifază transmisă prin sistemul optic S'. Dacă suprafața S suferă o deformație devenind Σ, atunci S' devine Σ'. Cum drumul optic este legat de timpul de propagare a luminii între două suprafețe echifaze rezultă că $(II') = (JJ')$, unde I, I' sînt punctele în care două raze trec prin S și S', iar J și J' sînt punctele de pe noile suprafețe de unde Σ și Σ', analogele lui I și I' (fig. 13.83). Ținînd seama de teorema

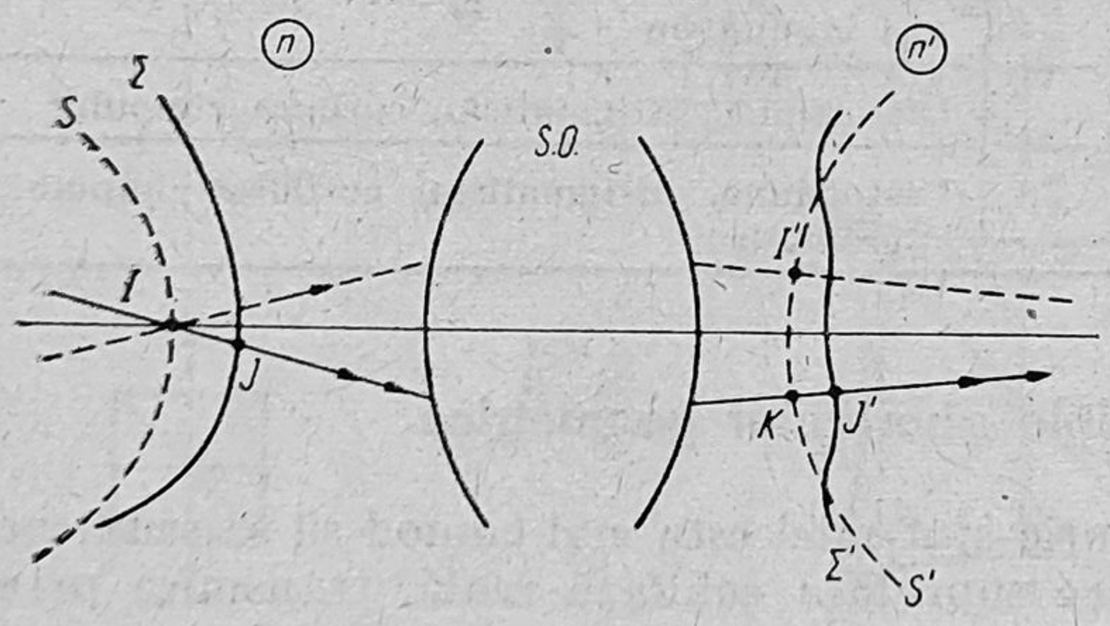


Fig. 13.83

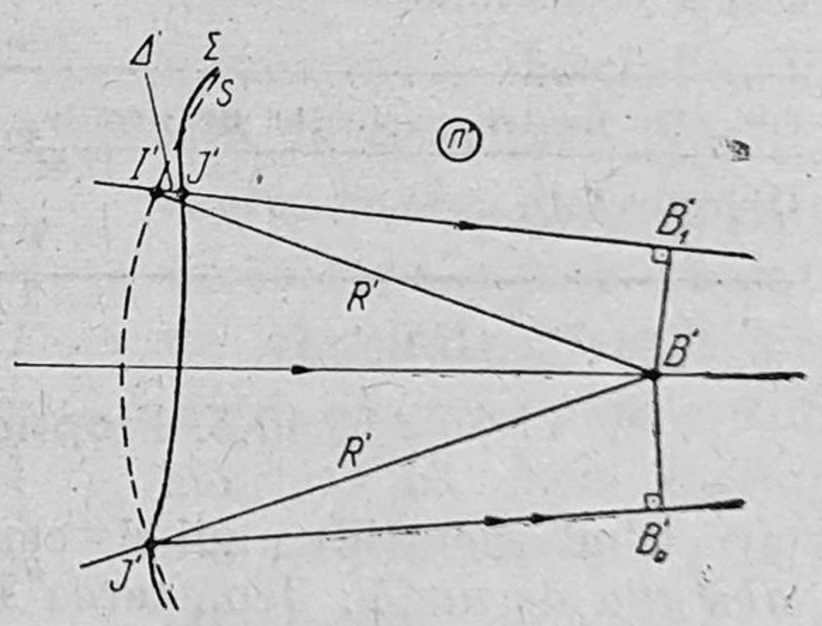


Fig. 13.84

Malus-Dupin, rezultă că $(II') = (IK')$ deoarece I' și K' sînt situate pe aceiași suprafață de undă S'. Rezultă de asemenea imediat, că $(IK') = (JJ')$ de unde scăzînd drumul optic comun (JK), deducem că $(IJ) = (K'J')$, adică $n\Delta = n'\Delta'$, relație care reprezintă teorema lui Gouy enunțată mai înainte.

Aplicații : Aberația de undă a unui sistem optic se poate determina adunînd contribuțiile fiecărui dioptru ; în afară de aceasta, dacă o undă luminoasă se propagă în același mediu rezultă că o deformație a sa se conservă : $\Delta' = \Delta$.

3° *Expresia aberației de undă în funcție de variațiile drumului optic.* Fie punctul obiect B și imaginea sa gaussiană B' (centrul sferei de referință). Forma suprafeței echifază transmisă prin sistemul optic este Σ (fig. 13.84). Aberația de undă reprezintă distanța între suprafața echifază și sfera de referință S măsurate pe raza acesteia din urmă. Drumul optic între B și B' se poate aprecia cu ajutorul teoremei Malus-Dupin, ca fiind egal cu drumul optic (BB_1'), unde B_1' este proiecția centrului sferei de referință pe raza puțin aberantă venind din B. Deci

$$(l) = (BB_1') = (BJ') + n'(\overline{J'I'} + \overline{I'B_1'}) = (BJ') + n'(R' - \Delta'). \quad (13.187)$$

Dacă J_0' este un punct comun între Σ și S, iar B_0' proiecția lui B' pe raza care vine din B și trece prin J_0', atunci

$$(l_0) = (BB_0') = (BI_0') + n' \cdot \overline{J_0'B_0'},$$

sau, ținînd seama de teorema Malus-Dupin, (l_0) mai poate fi scris sub forma

$$(l_0) = (BJ') + n'R'. \quad (13.188)$$

Eliminînd (BJ') și $n'R'$ între relațiile (13.187) și (13.188) se obține expresia aberației de undă

$$n'\Delta' = (l_0) - (l) \quad (13.189)$$

Această relație este extrem de utilă pentru calcularea aberației de undă a unui sistem optic oarecare.

4° *Relațiile între aberația de undă și componentele aberației transversale* Vom raporta suprafața de undă la un sistem de axe cu centrul în B'. Fie $\tilde{B}'(\delta x' ; \delta y')$ punctul de intersecție al unei raze aberante $I'B'$ provenind din B, iar dB' variația acestei intersecții pentru o rază în vecinătatea celei precedente. Fie B_1' proiecția centrului sferei de referință (imaginea gaussiană a punctului obiect B) pe raza aberantă $I'\tilde{B}'$ (fig. 13.85).

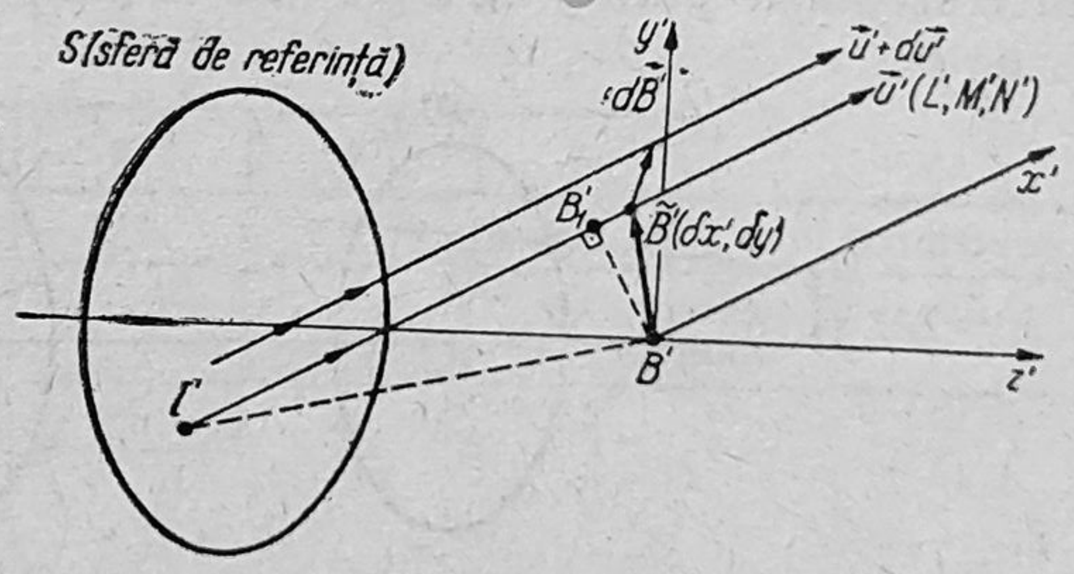


Fig. 13.85

Observație : $\delta x'$, $\delta y'$, coordonatele punctului $\tilde{B}'$ reprezintă componentele aberației transversale $\overrightarrow{B'\tilde{B}'}$. Fie L', M', N', cosinușii directorii ai vectorului unitar al razei $I'\tilde{B}'$. Evaluăm drumul optic de la B la $\tilde{B}'$.

$$(B\tilde{B}') = (l)_{BB_1'} + n' \cdot \overline{B_1'\tilde{B}'} = (l) + n'(L'\delta x + M'\delta y') \quad (13.190)$$

deoarece $\overline{B_1'\tilde{B}'} = \mathbf{u}' \cdot \overrightarrow{B'\tilde{B}'} = L' \cdot \delta x' + M' \cdot \delta y'$.

Diferența de drum optic față de traseul razei învecinate (avînd vectorul unitar $\mathbf{u}' = \mathrm{d}\mathbf{u}'$) se obține diferențiind expresia (13.190) sau utilizînd relația (13.185)

$$(13.190) \rightarrow \mathrm{d}(B\tilde{B}') = \mathrm{d}(l)^{\circ} + n'(L'\cdot \mathrm{d}\delta x' + M'\cdot \mathrm{d}\delta y' + \delta x'\cdot \mathrm{d}L' + \delta y'\mathrm{d}M') \qquad (13.191)$$

$$(13.185) \rightarrow \mathrm{d}(B\tilde{B}') = n'\mathbf{u}'\cdot dB' = n'(L'\cdot \mathrm{d}\delta x' + M'\cdot \mathrm{d}\delta y') \qquad (13.192)$$

unde variația vectorială a intersecției, dB', de componente ($\mathrm{d}\delta x'$, $\mathrm{d}\delta y'$, 0), reprezintă variația aberației transversale. Din relațiile (13.191) și (13.192) rezultă

$$\mathrm{d}(l) = -n'(\delta x'\cdot \mathrm{d}L' + \delta y'\mathrm{d}M'). \qquad (13.193)$$

Diferențiind relația (13.189) se obține

$$\mathrm{d}(n'\Delta) = -\mathrm{d}(l). \qquad (13.194)$$

Eliminînd $\mathrm{d}(l)$ între (13.193) și (13.194) se obține diferențiala aberației de undă

$$\mathrm{d}\Delta' = \delta x'\mathrm{d}L' + \delta y'\cdot \mathrm{d}M' \qquad (13.195)$$

Cum aberația de undă nu este funcție decît de L' și M' se identifică diferențiala totală cu expresia de mai sus, rezultînd :

$$\delta x' = \frac{\partial \Delta'}{\partial L'}; \quad \delta y' = \frac{\partial \Delta'}{\partial M'}\cdot \qquad (13.196)$$

Aceste relații exprimă componentele aberației transversale în funcție de aberația de undă și rămîn valabile și pentru $\delta x'$, $\delta y'$ destul de mari. Ele sînt foarte utile la calculul coordonatelor intersecției unei raze aberante cu planul imagine (în cazul studierii aberației de coma, de exemplu) sau, invers, la determinarea, prin integrare, a aberației de undă cînd se cunosc $\delta x'$ și $\delta y'$ (la studiul experimental al aberațiilor).

13.10.7. Clasificarea aberațiilor geometrice ale sistemelor optice centrate

Fie $AB = y$ un obiect, mic, perpendicular pe axa unui sistem optic centrat, iar A' imaginea paraxială a punctului A. Dacă β este mărirea transversală în domeniul paraxial, atunci imaginea va avea dimensiunea : $A'B' = y' = \beta\cdot y$. Considerînd o rază depărtată de domeniul paraxial, aceasta intersectează planul $A'x'y'z'$ în $B'(\delta x', y' + \delta y', 0)$. Vectorul $B'\tilde{B}'$ poartă

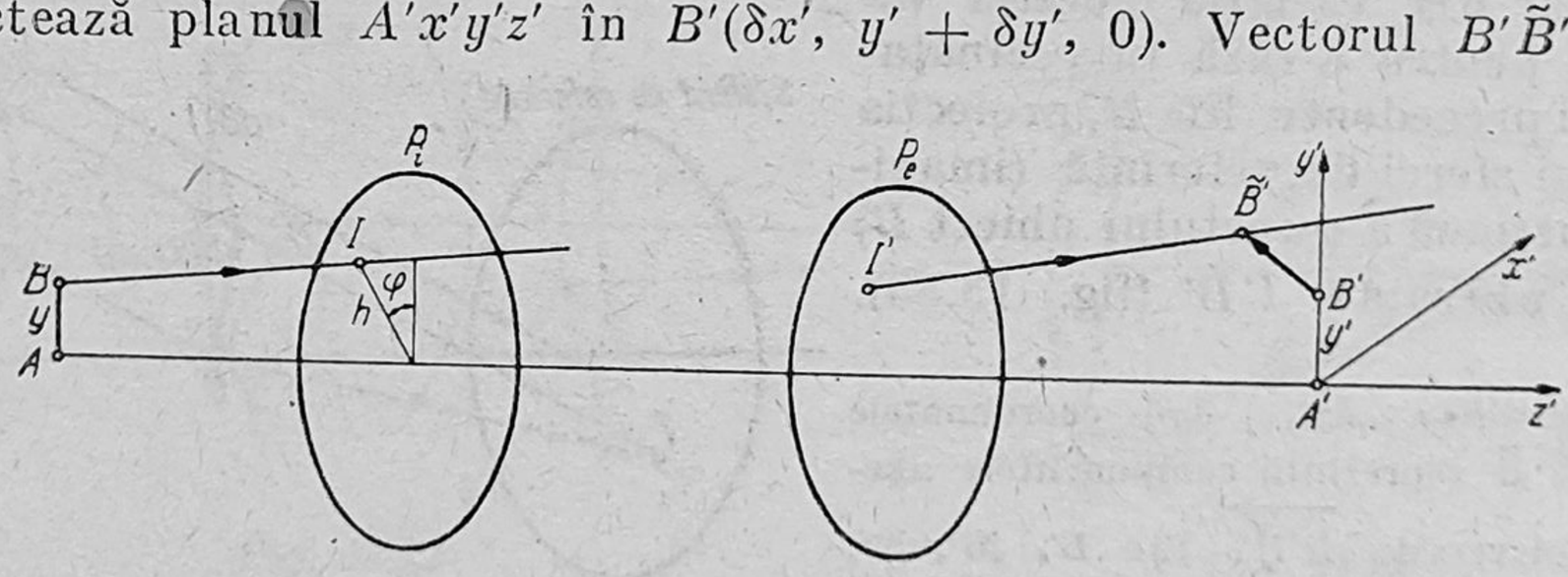


Fig. 13.86

numele de aberație transversală, avînd componentele $\delta x'$ și $\delta y'$ și este funcție de poziția punctului I (h, φ) în pupila de intrare (fig. 13.86). Presupunem că rotim figura în jurul axei optice zz', ceea ce înseamnă că se schimbă y' în $-y'$ și h în $-h$; este evident că, în acest caz, și $\delta x'$ și $\delta y'$ își vor schimba, de ase-

menea, semnul. Se deduce, aşadar, că $\delta x'$ şi $\delta y'$ sînt funcţii impare în raport cu ansamblul variabilelor h şi y', descompunerea lor în serii neconţinînd decît termeni de grade impare

$$\delta x' = A_1 h + B_1 y' + A_3 h^3 + B_3 h^2 y' + C_3 h y'^2 + D_3 y'^3 + A_5 h^5 + B_5 h^4 y' + \dots$$

$$\delta y' = \alpha_1 h + \beta_1 y' + \alpha_3 h^3 + \beta_3 h^2 y' + \gamma_3 h y'^2 + \delta_3 y'^3 + \alpha_5 h^5 + \beta_5 h^4 y' + \dots$$

(13.197)

Termenii de gradul I, proporţionali cu h şi y', sînt nuli, deoarece pentru $h \approx 0$; $y' \approx 0$, razele care provin din B vor intersecta planul imagine în apropierea lui B. Aşadar

$$A_1 = B_1 = \alpha_1 = \beta_1 = 0.$$

Termenii de gradul III reprezintă aberaţiile geometrice de ordinul III :
A_3, α_3 caracterizează aberaţia de sfericitate de ordinul III ;
B_3, β_3 caracterizează coma de ordinul III ;
C_3, γ_3 caracterizează astigmatismul şi curbura cîmpului de ordinul III ;
D_3, δ_3 caracterizează distorsiunea.

Observaţii. Optica de ordniul I sau aproximaţia lui Gauss se rezumă la termenii de gradul I, care am arătat că sînt nuli, deci neglijează existenţa aberaţiilor. Optica de ordinul III sau optica lui Seidel pune în evidenţă aberaţiile de ordinul III. Au fost calculaţi coeficienţii acestor aberaţii în funcţie de parametrii constructivi ai sistemului optic (indici de refracţie, curburi, grosimi, distanţe, poziţia şi raza diafragmei de deschidere) ; în proiectarea sistemului optic aceşti coeficienţi au o mare importanţă deoarece permit alegerea unor parametri astfel încît anumite aberaţii să fie reduse. Deşi au fost calculaţi şi coeficienţii aberaţiilor de ordinul V, VII, (s-a ajuns pînă la ordinul XI), utilizarea lor nu este practică datorită calculelor mult prea laborioase.

Pentru clasificarea aberaţiilor geometrice se utilizează un tablou în care figurează în coordonate puterile lui h şi, respectiv, y' (tabelul 13.2). În acest tablou diferitele aberaţii sînt reprezentate de următorii termeni :

— aberaţia de sfericitate, de termenii ce nu conţin y'^0 (prima coloană);
— aberaţia de coma, de termenii proporţionali cu y' (a doua coloană) ;
— astigmatismul şi curbura cîmpului de termenii proporţionali cu h (a doua linie) ;
— distorsiunea de termenii independenţi de h (prima linie).

Tabelul 13.2

	y'^0	y'^1	y'^2	y'^3	y'^4	y'^5	
h^0				y'^3		y'^5	distorsiune
h			hy'^2		hy'^4	astigmatism şi curbura cîmpului	
h^2		$h^2y'^1$		$h^2y'^3$			
h^3	h^3		$h^3y'^2$				
h^4		h^4y'					
h^5	h^5	coma					
	sferi-citate						

Pentru a separa astigmatismul de curbura cîmpului trebuie introdus şi unghiul φ în clasificare ; o astfel de clasificare a fost făcută de Nijboern în 1942 (curbura cîmpului nu depinde de φ).

14. COMPONENȚE ȘI INSTRUMENTE OPTICE FUNDAMENTALE

14.1. Lama plan-paralelă

Lama plan-paralelă constituie o combinație de doi dioptri plani și paraleli. Privită ca o particularizare a lentilei: lertilă cu razele de curbură infinite, rezultă că puterea lamei plan-paralele este nulă.

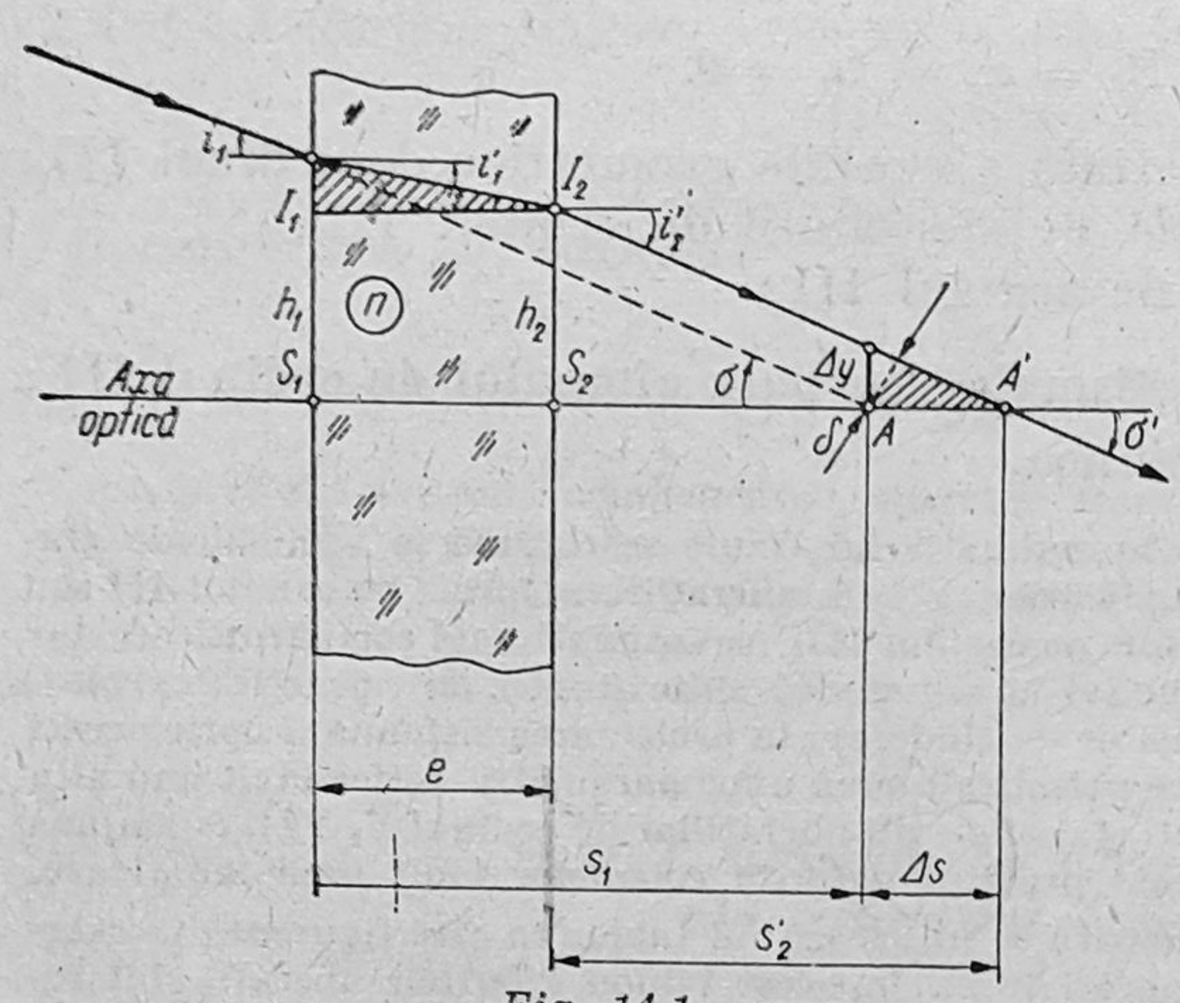


Fig. 14.1

Acțiunea lamei plan-paralele izotrope constă în modificarea drumului optic și în deplasarea axială și transversală a imaginii (fig. 14.1). Considerăm lama plan-paralelă scăldată în aer. Fie A punctul obiect și A' punctul imagine conjugat față de lama plan-paralelă. Din legea refracției scrisă în punctul I_1 și punctul I_2: $\sin i_1 = n \cdot \sin i_1'$; $n \cdot \sin i_2 = \sin i_2'$, ținînd seama că $i_1' = i_2$ (fețele lamei sînt paralele), rezultă: $i_1 = i_2'$. Cum $i_1 = \sigma$ și $i_2' = \sigma'$, rezultă că: $\sigma = \sigma'$. Așadar, lama plan-paralelă nu are nici o acțiune asupra înclinării fasciculelor de raze care o străbat. Deplasarea axială produsă imaginii este

$$\Delta s = e + s_2' - s_1 = e - (s_1 - s_2'), \tag{14.1}$$

unde

$$s_1 = h_1 \operatorname{ctg} \sigma$$

$$s_2 = h_2 \operatorname{ctg} \sigma' = h_2 \operatorname{ctg} \sigma$$

$$h_1 - h_2 = e \operatorname{tg} i_2 = e \sin i_2 (1 - \sin^2 i_2)^{-1/2}$$

$$\sin i_2 = \frac{1}{n} \cdot \sin \sigma \text{ (legea refracției).}$$

Rezultă deplasarea axială, funcție de înclinarea razei

$$\Delta s = e[1 - \cos \sigma (n^2 - \sin^2 \sigma)^{-1/2}] \tag{14.2}$$

sau, pentru incidență normală sau aproape normală ($\sigma \approx 0$),

$$\Delta s = e(n - 1)/n. \tag{14.3}$$

Deplasarea transversală (perpendiculară pe rază) produsă de lama plan-paralelă este

$$\delta = \Delta s \sin \sigma' = e \sin \sigma[1 - \cos \sigma(n^2 - \sin^2 \sigma)^{-1/2}]. \qquad (14.4)$$

Deplasarea transversală perpendiculară pe axa optică este

$$D_y = \Delta s \operatorname{tg} \sigma = e \operatorname{tg} \sigma[1 - \cos \sigma(n^2 - \sin^2 \sigma)^{-1/2}]. \qquad (14.5)$$

Lamele plan-paralele sînt utilizate în următoarele aplicații :

— elemente de măsurat deplasările axelor optice (la luneta de măsurare, de exemplu) ;

— elemente de compensare a drumului optic (la interferometru, de exemplu) ;

— suporturi pentru reticule și scări gradate ;

— filtre de absorbție sau filtre interferențiale ;

— lame sfert de undă sau jumătate de undă utilizate în aparatele care lucrează cu lumină polarizată (lame anizotrope) ;

— suporturi pentru rețele de difracție ;

— lame divizoare de fascicule (beam-splittere).

14.2. PRISMA OPTICĂ

Prisma optică cea mai simplă este compusă din doi dioptri plani care fac un unghi între ei, astfel că raza de lumină suferă cel puțin două refracții la trecerea prin prismă. Prismele optice pot fi clasificate, după rolul lor, în trei grupe mari :

— prisme acromatice (care sînt corectate de aberația de culoare, sau ale căror aberații sînt compensate de celelalte componente optice din sistem, sau care lucrează în lumină monocromatică). După modul cum lucrează prismele acromatice pot fi prisme deviatoare simple (prin transmisie) sau prisme deviatoare prin reflexie ;

— prisme dispersive, utilizate în refractometrie (metoda deviației minime) sau în construcția aparatelor spectrale ;

— prisme de polarizare, confecționate din materiale optice birefringente, utilizate pentru obținerea luminii polarizate liniar (prezentate la capitolul respectiv).

14.2.1. Deviația produsă de o prismă

Presupunem prisma în aer (fig. 14.2). Unghiul diedru cuprins între fețele active ale prismei se numește unghiul prismei A. Deviația produsă de prismă δ, unghi exterior triunghiului I_1MI_2, este :

$$\delta = (i_1 - i_1') + (i_2' - i_2).$$

Din triunghiul I_1NI_2 și din patrulaterul inscriptibil AI_1NI_2 rezultă că $i_1' + i_2 = A$.

Deci :

$$\delta = i_1 + i_2' - A \qquad (14.6)$$

Unghiul de emergență i_2' se poate determina, funcție de i_1, scriind legea refracției în punctele I_1, I_2 și eliminînd unghiurile interioare i_1', i_2

$$\sin i_1 = n \sin i_1' \,;\; n \sin i_2 = \sin i_2' \tag{14.7}$$

Condiția de emergență: pentru ca o rază care intră, să poată ieși din prismă este necesar ca unghiul de incidență la suprafața de ieșire din prismă să fie mai mic decît unghiul limită de reflexie totală, adică

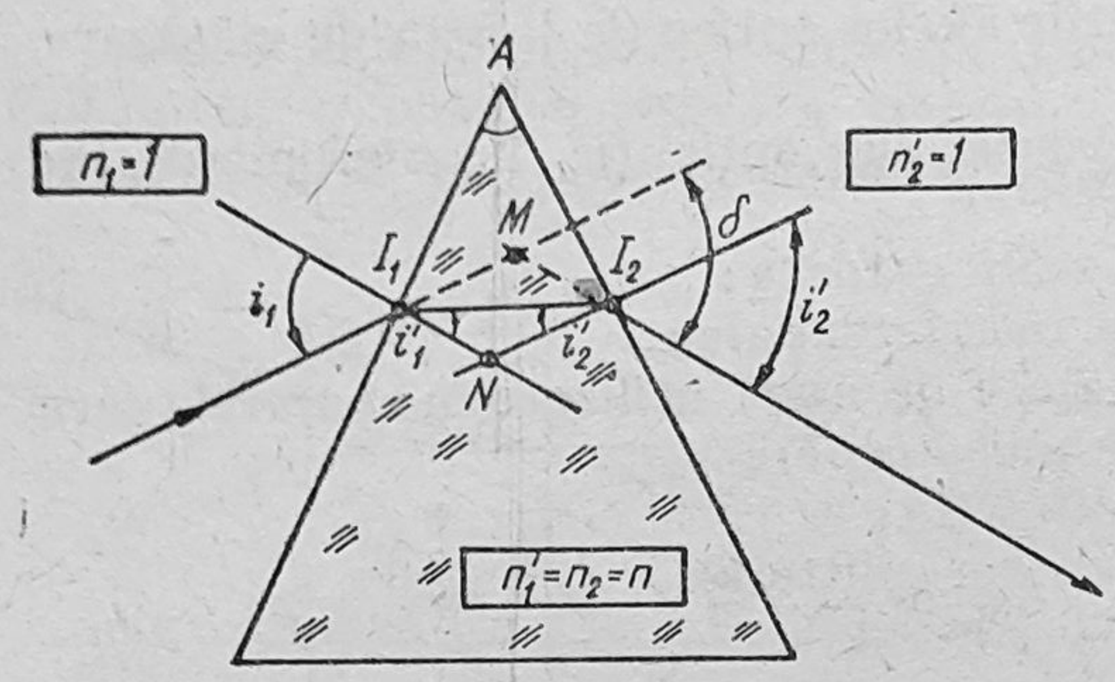


Fig. 14.2

$$i_2 < l, \text{ unde } n \sin l = 1.$$

$$i_1' + i_2 = A \rightarrow i_1' > A - l.$$

iar din legea refracției în I_1 rezultă condiția de emergență în cazul general

$$\sin i_1 > n \sin (A - l). \tag{14.8}$$

În cazul cel mai defavorabil ($i_1 = 90°$), ținînd seama că $1/n = \sin l$, condiția de emergență (14.8) devine

$$1/n > \sin (A - l) \rightarrow$$

$$\sin l > \sin (A - l) \rightarrow A < 2l.$$

Condiția ca prisma să poată transmite raze incidente de orice înclinare este ca unghiul prismei să nu depășească dublul unghiului limită de reflexie totală.

Deviația minimă δ_m. Se poate demonstra experimental (folosind un goniometru) că deviația produsă de o prismă optică are o valoare δ_m pentru un anumit unghi de incidență i_{1m}, pentru care raza emergentă face unghiul $i_{2m}' = i_{1m}$ cu normala la a doua suprafață a prismei.

Se derivează în raport cu i_1 relațiile pentru determinarea deviației

$$(14.7) \rightarrow \begin{cases} \cos i_1 = n \cdot \cos i_1' \dfrac{\mathrm{d}i_1'}{\mathrm{d}i_1} \\ n \cos i_2 \cdot \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_1} = \cos i_2' \cdot \dfrac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}i_1} \end{cases}$$

$$i_1' + i_2 = A \rightarrow \frac{\mathrm{d}i_1'}{\mathrm{d}i_1} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_1} = 0$$

$$(14.6) \rightarrow \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}i_1} = 1 + \frac{\mathrm{d}i_2'}{\mathrm{d}i_1}.$$

Eliminînd $\mathrm{d}i_1'/\mathrm{d}i_1$ și $\mathrm{d}i_2'/\mathrm{d}i_1$, se obține condiția de minim

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}i_1} = 1 - \frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos i_1' \cos i_2'} = 0 \text{ sau } \cos i_1 \cos i_2 = \cos i_1' \cos i_2'. \tag{14.9}$$

Ținînd seama și de legea refracției în punctele I_1 și I_2, înmulțim expresiile (14.7) membru cu membru

$$\sin i_1 \sin i_2 = \sin i_1' \sin i_2'. \tag{14.10}$$

Prin adunarea și scăderea relațiilor (14.9) și (14.10), obținem

$$\cos(i_1 - i_2) = \cos(i_2' - i_1'),\ i_2' > i_1'$$

$$\cos(i_1 + i_2) = \cos(i_2' + i_1').$$

În sfîrșit, se observă că

$$i_1 = i_2' \text{ și } i_1' = i_2 \tag{14.11}$$

adică raza emergentă este simetrică razei incidente față de bisectoarea unghiului prismei, iar raza din interiorul prismei este perpendiculară pe bisectoarea unghiului A. Pentru aceste condiții de minim formulele prismei devin

$$\begin{aligned} &(14.7) \rightarrow \sin i_1 = n \cdot \sin i_1' = n \cdot \sin i_2 = \sin i_2' \\ &i_1' + i_2 = A \rightarrow 2i_1' = 2i_2 = A \\ &(14.6) \rightarrow \delta_m = 2i_1 - A. \end{aligned} \tag{14.12}$$

Metoda deviației minime se utilizează în refractometrie, pentru determinarea indicelui sticlei optice din care este confecționată prisma. Din legea refracției în punctul I_1 rezultă

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin i_1'} = \frac{\sin \dfrac{\delta m + A}{2}}{\sin \dfrac{A}{2}} \tag{14.13}$$

unde i_1 și i_1' le-am exprimat folosind relațiile (14.12). Deci, dacă se determină unghiul prismei A și deviația minimă δ_m produsă de prismă unei radiații monocromatice (se pot măsura utilizînd goniometrul), cu relația (14.13) se calculează indicele de refracție al sticlei pentru radiația respectivă.

Cazul prismei cu unghi mic și incidență normală (pană optică). În cazul unui unghi al prismei mic și unghiuri de incidență de asemenea foarte mici, relațiile prismei devin

$$\begin{aligned} &(14.7) \rightarrow \begin{cases} i_2 = ni_1' \\ ni_1 = i_2' \end{cases} \rightarrow i_1 + i_2' = n(i_1' + i_2) = nA \\ &(14.6) \rightarrow \delta = (n-1)A. \end{aligned} \tag{14.14}$$

Așadar, deviația este cu atît mai mare cu cît indicele de refracție este mai mare și unghiul prismei mai mare. Astfel de prisme cu unghiul A mic sînt folosite la realizarea compensatorului format din două pene optice rotative, care intră în construcția aparatelor spectrale sau a aparatelor de măsurat.

14.2.2. Prisma acromatică

Această prismă este de fapt o combinație de două sau trei prisme care își compensează reciproc dispersiile parțiale pentru două sau, respectiv, trei radiații din spectrul vizibil. Condiția de acromatizare a unui sistem de două prisme, pentru două radiații (F și C, de exemplu), este ca variația deviației $\Delta\delta$

produsă de prima prismă $\Delta\delta_1 = \delta_{1(F)} - \delta_{1(C)}$ să fie conmpesată de cea de-a doua prismă, adică : $\Delta\delta_1 + \Delta\delta_2 = 0$. Pentru unghiuri mici de incidenţă condiţia de acromatizare se poate exprima astfel

$$[\delta_{1(F)} - \delta_{1(C)}] + [\delta_{2(F)} - \delta_{2(C)}] = (n_{1F} - n_{1C})A_1 + (n_{2F} - n_{2C})\cdot A_2 = 0$$

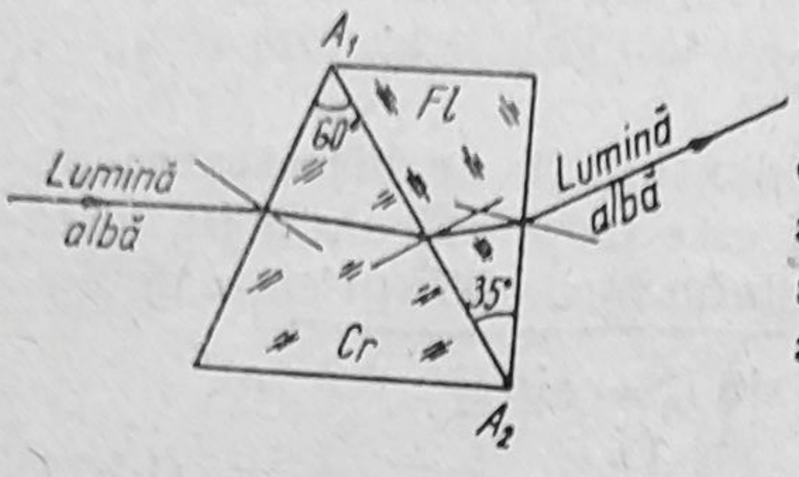


Fig .14.3

sau
$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{n_{2F} - n_{2C}}{n_{1F} - n_{1C}} = -\frac{dn_2}{dn_1} \qquad (14.15)$$

ceea ce arată că cele două prisme au muchiile aşezate în sens invers, iar valorile unghiurilor sînt invers proporţionale cu dispersiile medii ale sticlelor optice (fig. 14.3).

Deviaţia razei mijlocii, de exemplu a radiaţiei *d* din spectrul heliului, se calculează cu relaţia

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (n_1 - 1)A_1 + (n_2 - 1)A_2.$$

Dacă se introduce valoarea lui A_2 din condiţia de acromatizare (14.15), se obţine :

$$\delta = \left[(n_1 - 1) - (n_2 - 1)\frac{dn_1}{dn_2}\right]A_1 = \left(\frac{n_1 - 1}{dn_1} - \frac{n_2 - 1}{dn_2}\right)A_1 dn_1$$

unde $\frac{n-1}{n_F - n_C} = \frac{n-1}{dn} = \nu$ reprezintă coeficientul de dispersie vizual sau numărul lui Abbe. Deci, condiţia de acromatizare fiind îndeplinită, deviaţia produsă de prismă are expresia

$$\delta = A_1 dn_1(\nu_1 - \nu_2). \qquad (14.16)$$

Pentru acromatizarea a trei radiaţii sînt necesare trei prisme.

14.2.3. Sistem prismatic dispersor cu vizare directă

Acest sistem este o combinaţie de două prisme dispuse invers, din punct de vedere al devierii razei, astfel încît radiaţia mijlocie a spectrului vizibil (de exemplu, radiaţia *d* din spectrul heliului, *D* din spectrul sodiului, sau *e* din spectrul mercurului) să nu fie deviată faţă de direcţia fasciculului incident. Acest sistem produce dispersia luminii albe, obţinîndu-se un fascicul colorat, simetric faţă de radiaţia mijlocie (fig. 14.4). Condiţia de nedeviere a razei mijlocii este

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0.$$

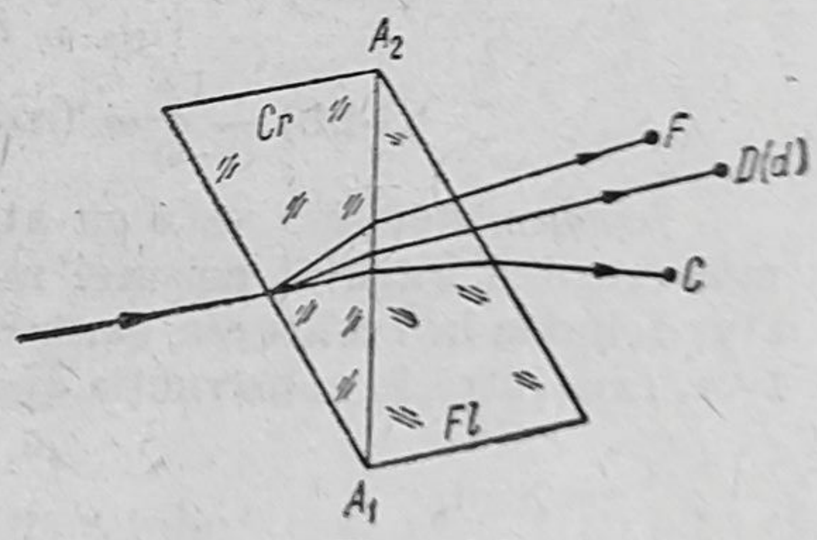


Fig. 14.4

Cum, pentru incidenţe mici şi unghiuri mici ale prismelor

$$\delta_1 \simeq (n_1 - 1)A_1 ; \quad \delta_2 \simeq (n_2 - 1)A_2,$$

condiţia de nedeviere devine : $A_1/A_2 = -(n_2 - 1)/(n_1 - 1)$. Rezultă că cele două prisme sînt aşezate invers una faţă de alta şi raportul unghiurilor este egal cu inversul raportului *refringenţelor* $(n - 1)$. Astfel de sisteme prismatice se utilizează în construcţia aparatelor spectrale cu prismă cu vizare directă.

14.2.4. Prismele cu deviație constantă

Pentru diferite radiații se utilizează în construcția spectrografelor cu prismă și monocromator, unde prisma produce aceeași deviație între raza incidentă provenind de la colimatorul fix și raza emergentă care merge către luneta fixă a spectrografului, singura piesă mobilă fiind prisma (fig. 14.5, a, b).

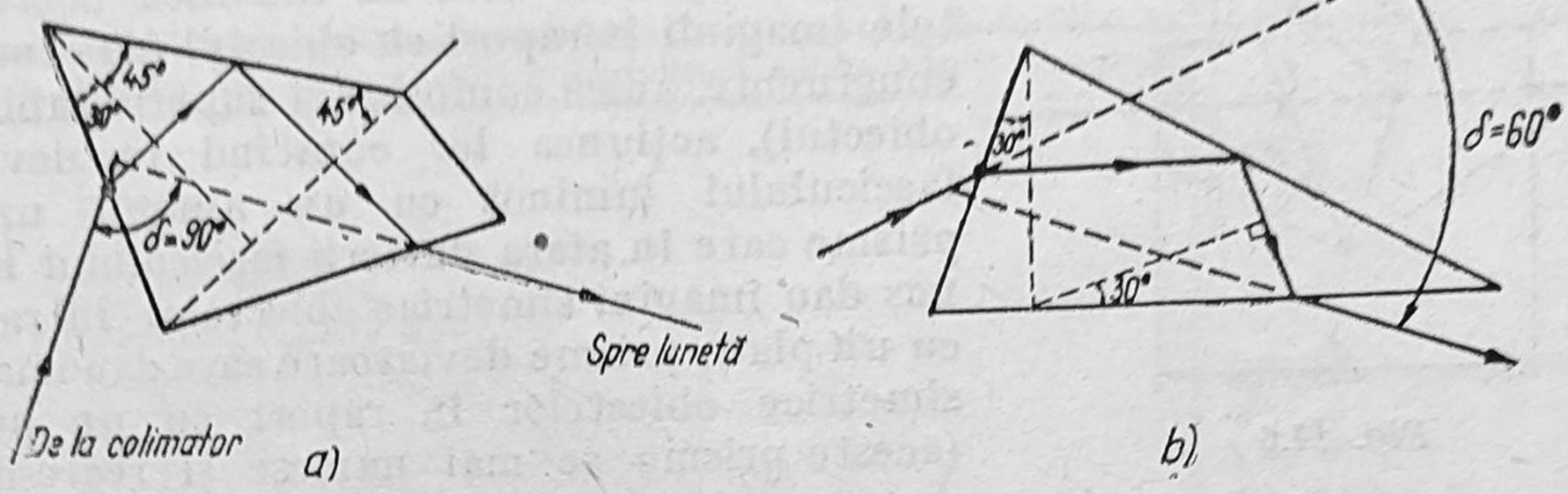


Fig. 14.5

14.2.5. Prisme deviatoare prin reflexie

Deși efectele produse asupra imaginii sînt similare, în general se preferă utilizarea unei prisme deviatoare prin reflexie, față de un sistem de oglinzi echivalent. Avantajele acestei alegeri constau în următoarele : prisma asigură un gabarit mai mic ; suprafețele prismelor formează unghiuri constante în timp, nesuferind dereglări ; suprafețele reflectante ale prismelor nu sînt alterabile sau oxidabile ca suprafețele oglinzilor de aluminiu sau argint; pierderile de flux luminos, datorate transmisiei, sînt anulate în cazul prismelor cu reflexie totală.

O suprafață reflectantă a prismei este simplu polisată dacă razele luminoase au un unghi de incidență mai mare decît unghiul limită al reflexiei totale (la sticle flint obișnuite unghiul limită este de aproximativ 41°). Dacă unghiul de incidență este inferior unghiului limită, suprafața reflectantă se acoperă cu un strat metalic de argint, aluminiu, rodiu, aur, protejat contra acțiunilor mecanice și chimice printr-un strat de vopsea sau metal.

Un sistem prismatic ale cărui componente sînt lipite se numește monobloc, suprafețele interioare în contact neproducînd nici un efect asupra propagării fasciculelor luminoase.

Din punctul de vedere al calculului optic, o prismă deviatoare prin reflexie este echivalentă cu o lamă plan-paralelă : o rază incidentă normală la suprafața de intrare iese din prismă normală la suprafața de ieșire. Determinarea drumului geometric parcurs de razele luminoase printr-o prismă, care reprezintă grosimea lamei plan-paralele echivalente, este esențială pentru definitivarea schemei optice (modificarea corespunzătoare a pozițiilor celorlalte componente ale sistemului optic în care se utilizează prisma), dar și pentru dimensionarea prismei în funcție de tubul luminos care o străbate.

De asemenea, drumul geometric prin prismă permite calculul absorbției și al supracorecției aberațiilor produse la trecerea fasciculelor luminoase care traversează prisma. Determinarea drumului geometric se poate face în două moduri: construind desfășurata prismei (ca în fig. 14.6) sau construind raza limită, teoretică, prin prismă (ca în tabelul 14.1).

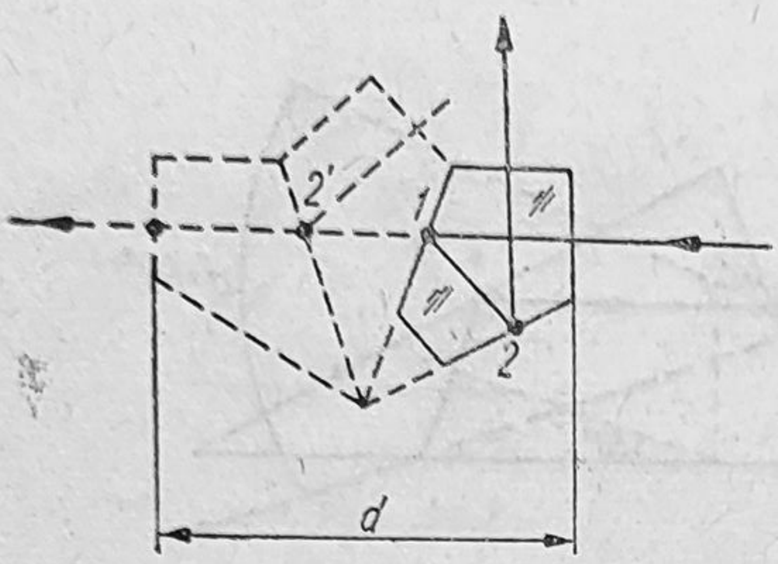


Fig. 14.6

Funcție de efectele produse imaginii, prismele deviatoare prin reflexie se împart în trei categorii: prisme care nu modifică coordonatele imaginii în raport cu obiectul (dau imagini congruente, adică conforme și superpozabile cu obiectul), acțiunea lor constînd în devierea fasciculului luminos cu un anumit unghi; prisme care în afara devierii fasciculului luminos dau imagini simetrice obiectelor în raport cu un plan; prisme deviatoare care dau imagini simetrice obiectelor în raport cu un punct (aceste prisme se mai numesc și redresoare, deoarece sînt utilizate în principal la redresarea imaginilor furnizate de obiectivele lunetelor). De menționat că prismele cu un număr par de reflexii într-un plan nu sînt sensibile la rotații mici, în timp ce prismele cu un număr impar de reflexii rotesc raza emergentă cu un unghi dublu celui de rotire a prismei în planul de reflexie.

a) *Prisme deviatoare prin reflexie care nu modifică coordonatele imaginii.* În tabelul 14.1 sînt prezentate principalele tipuri constructive din această categorie de prisme.

Prismele deviatoare cu 40°, 45° și 50° prezintă două suprafețe de reflexie totală; secțiunile lor drepte sînt constituite dintr-un trapez isoscel alăturat unui triunghi dreptunghic isoscel. Prismele deviatoare cu 40° și 50° sînt derivate din construcția prismei deviatoare cu 45°; modificînd unghiurile α și β în mod corespunzător se pot obține deviații diferite, însă construcția devine neavantajoasă în cazul îndepărtării de 45°.

Prisma deviatoare cu 60° are o construcție simplă, avînd la bază un triunghi dreptunghic cu cea de a doua suprafață de reflexie argintată, părțile neactive fiind eliminate.

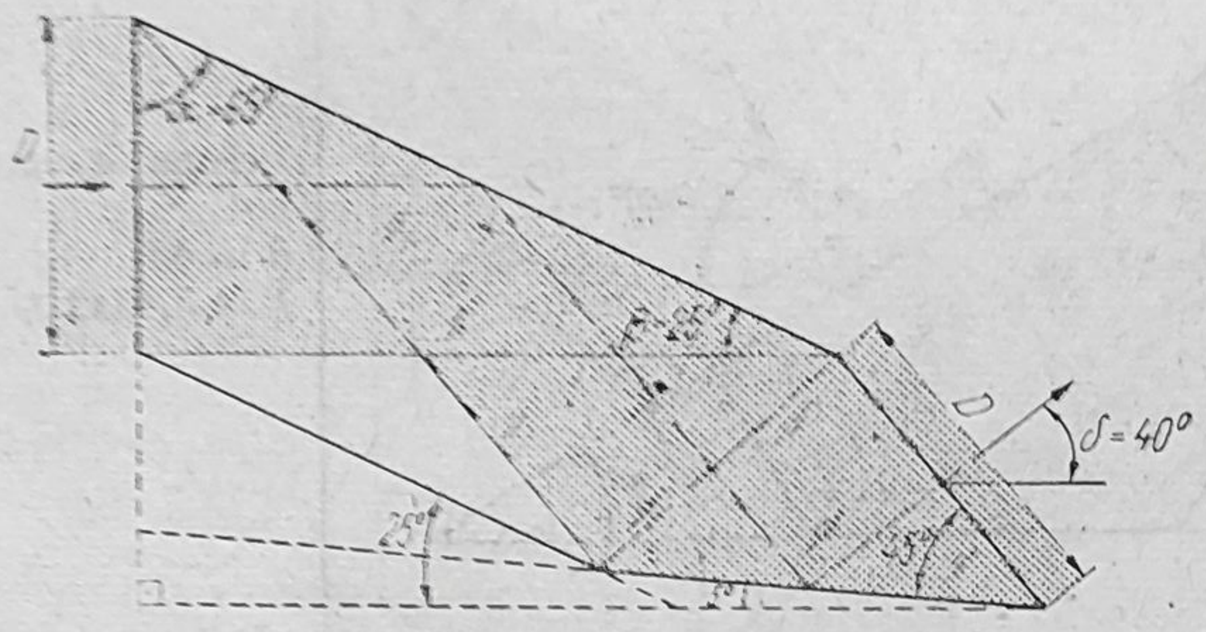
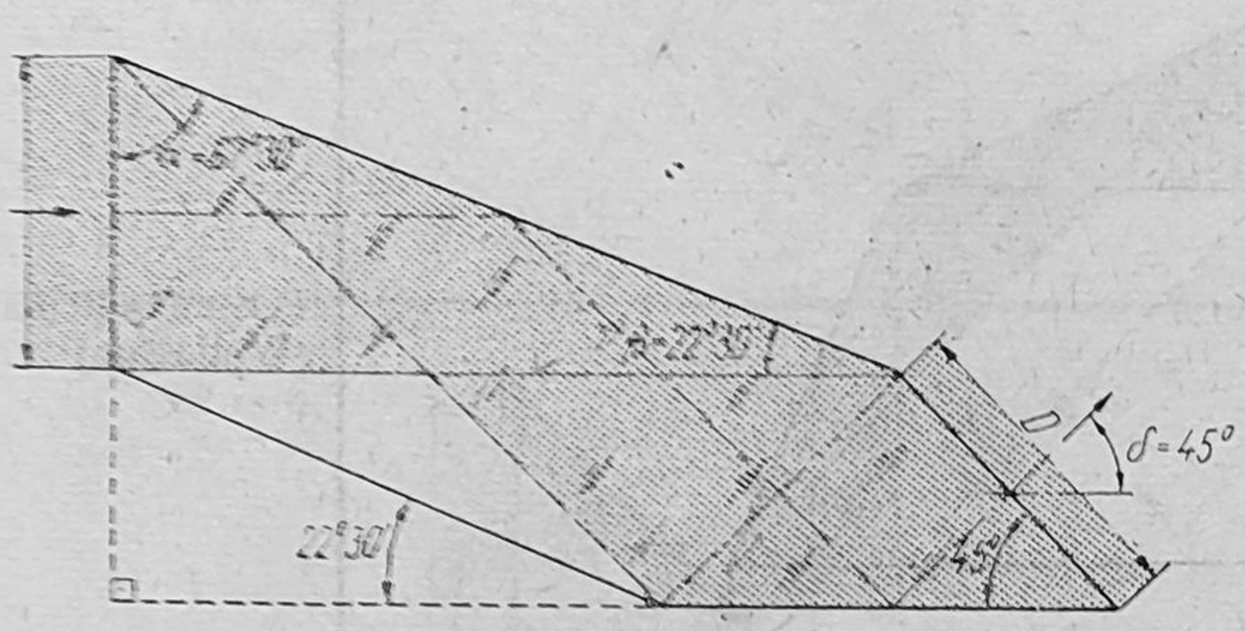
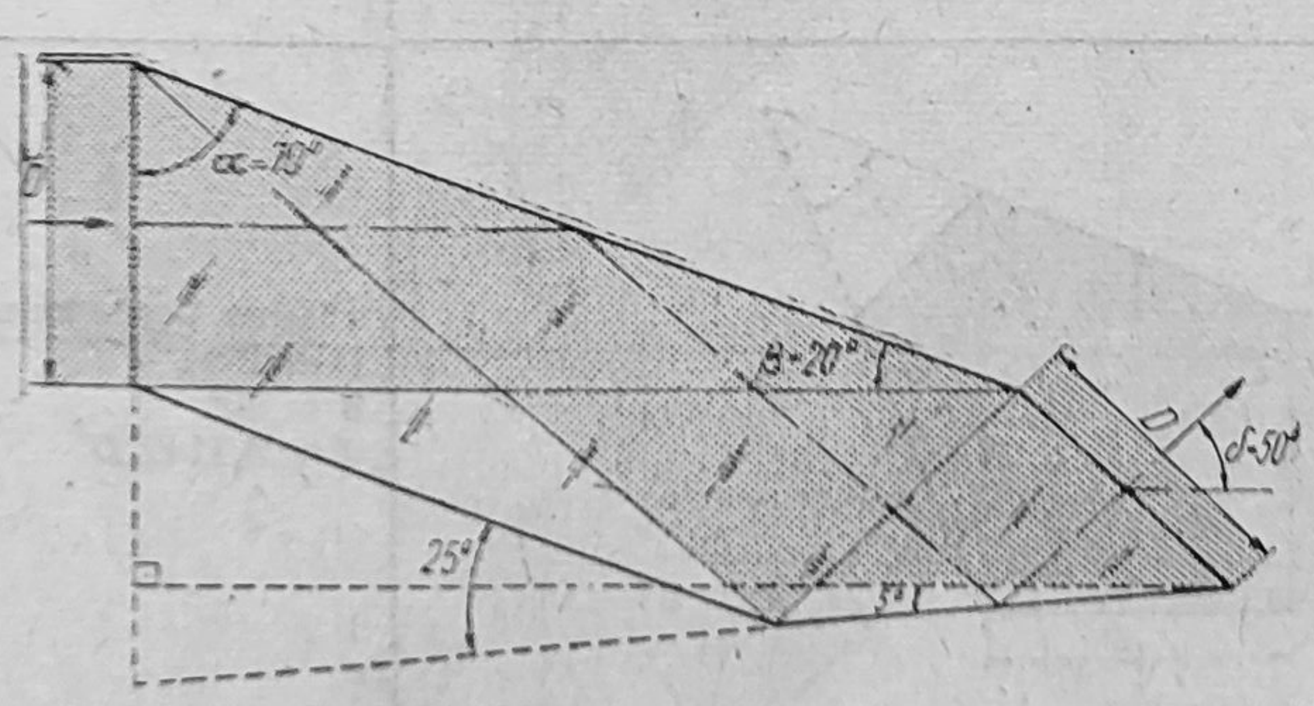
Prisma patrulateră (Wollaston) produce o deviere de 90° fasciculului luminos care suferă două reflexii totale. Figura de bază este un patrulater cu un unghi de 90° și două unghiuri opuse ascuțite egale (67°30'); și în cazul acestei prisme partea neactivă poate fi suprimată.

Mai utilizată decît prisma Wollaston este prisma pentagonală (Goulier) care asigură, la același diametru al fasciculului transmis, un gabarit mai redus. Prisma pentagonală are două fețe reflectante metalizate, formînd un unghi de 45°, iar fețele de intrare și ieșire din prismă la 90°. Cea de a cincea față provine din decuparea părții neactive a prismei, neavînd nici un efect asupra fasciculului transmis. Deviația produsă este de 90°, fapt pentru care prisma pentagonală este denumită ecner optic.

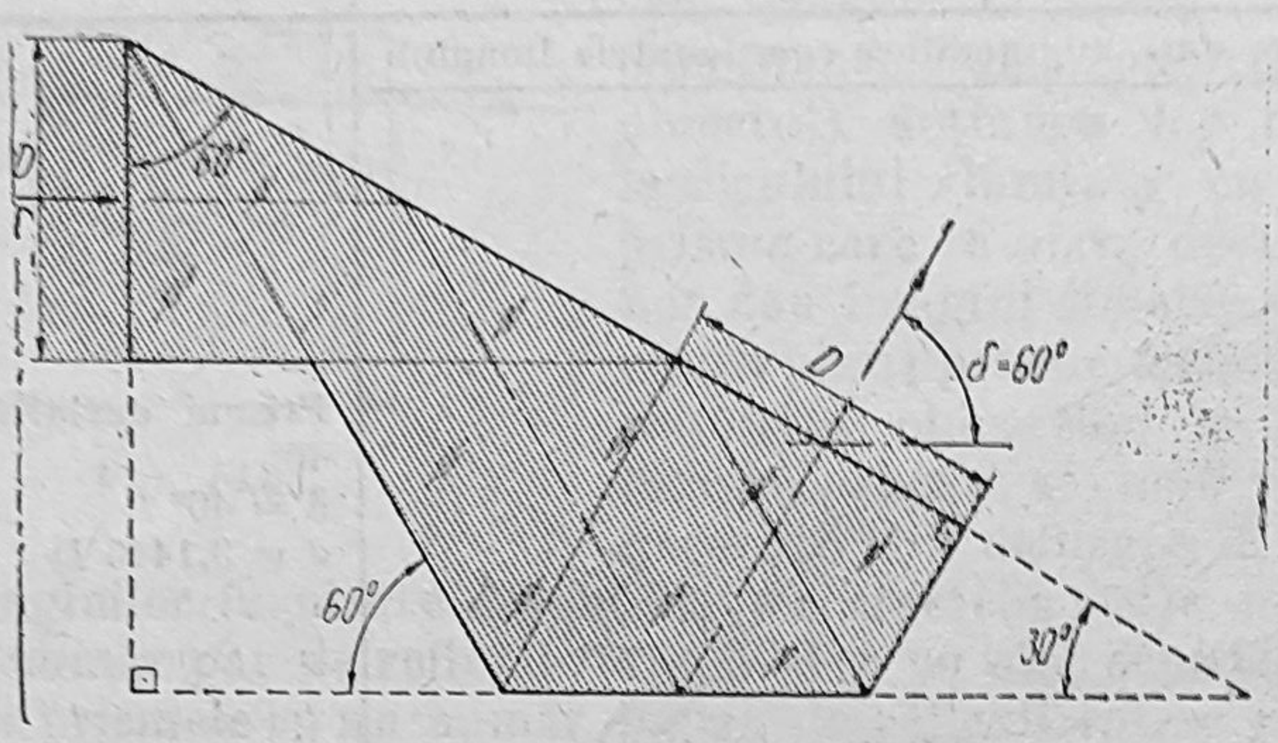
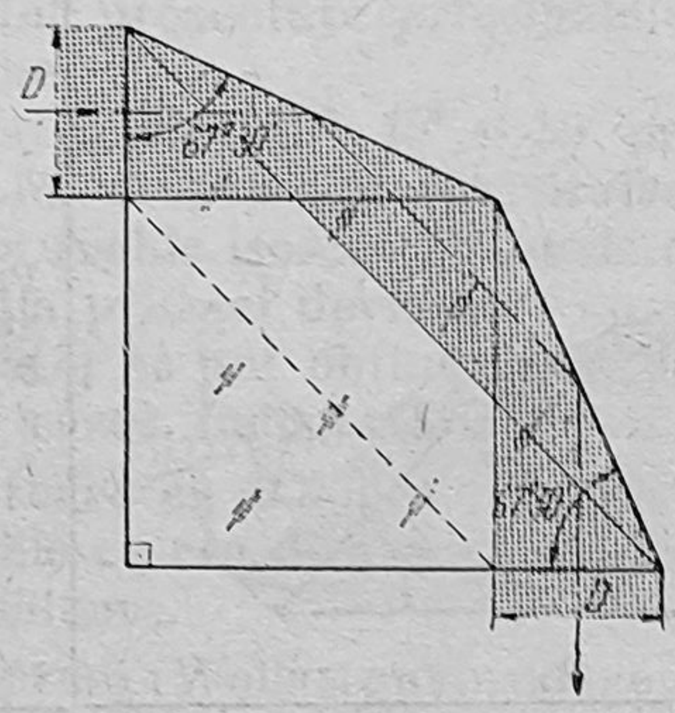
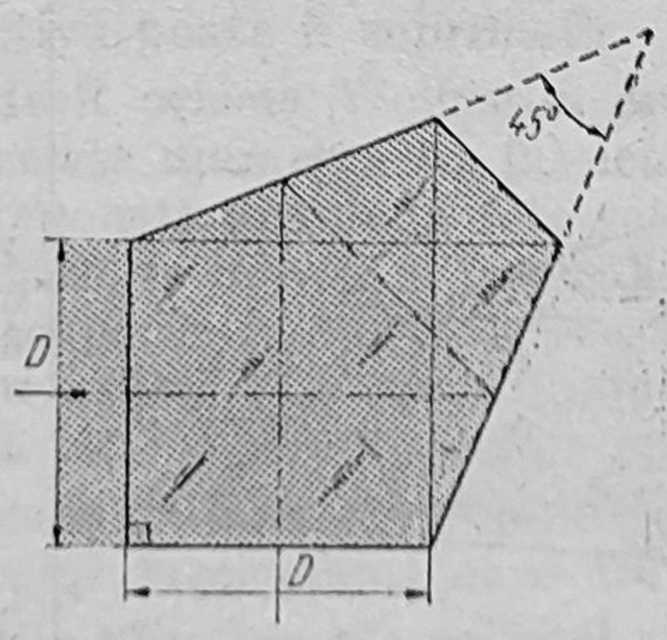
Prisma deviatoare cu 120° are figura de bază un romb cu latura egală cu dublul diametrului fasciculului care traversează prisma suferind două reflexii totale. Părțile neactive ale prismei sînt suprimate printr-o decupare circulară de rază egală cu diametrul fasciculului.

Tabelul 14.1

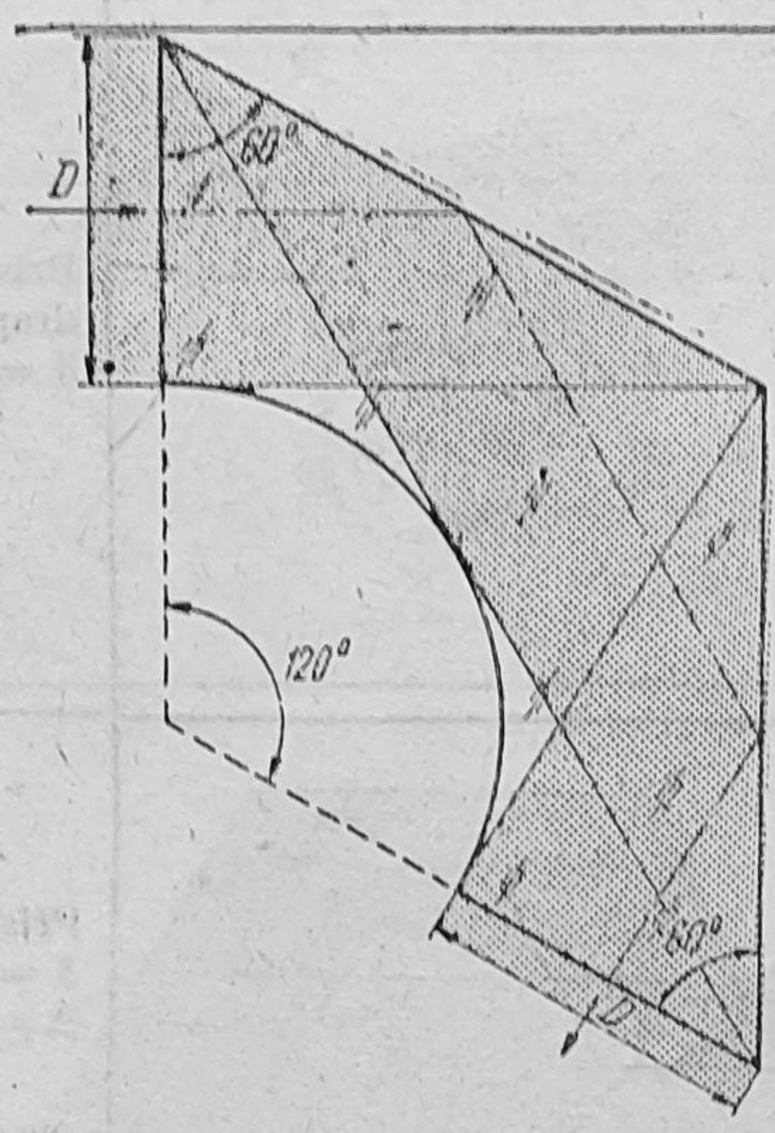
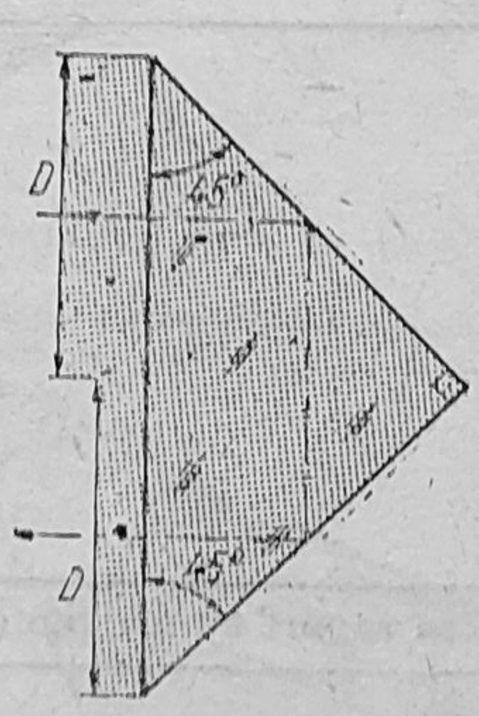
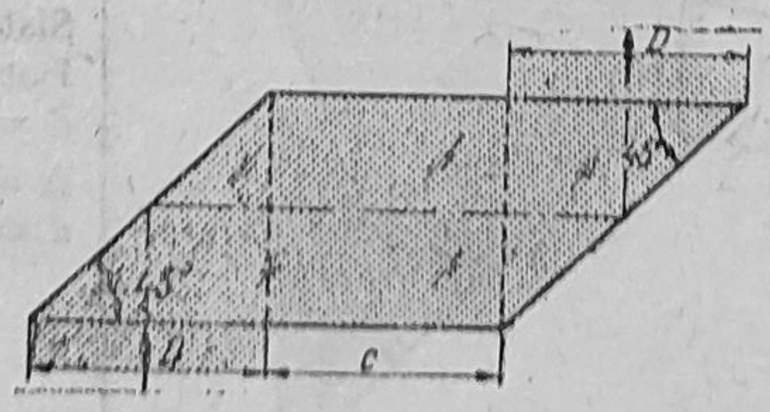
Tipuri de prisme deviatoare prin reflexie

Nr. crt.	Desenul prismei	Tipul prismei Deviația unghiulară (δ); Deplasarea axei fasciculului (Δ); Drumul geometric prin prismă (d)
	a. Prisme deviatoare care nu modifică coordonatele imaginii	
1		Prisma deviatoare cu 40° $\delta = 40°$ $d = 3{,}1445\ D$
2		Prisma deviatoare cu 45° $\delta = 45°$ $d = 3{,}4142$
3		Prisma deviatoare cu 50° $\delta = 50°$ $d = 3{,}7475\ D$

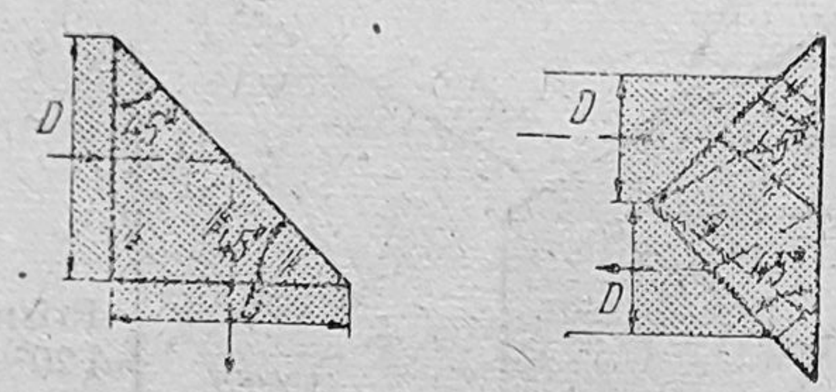
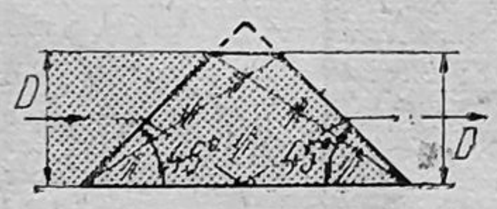
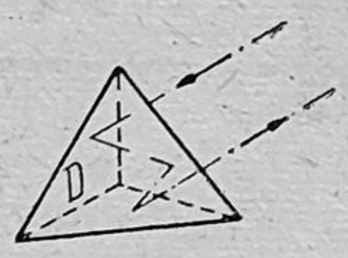
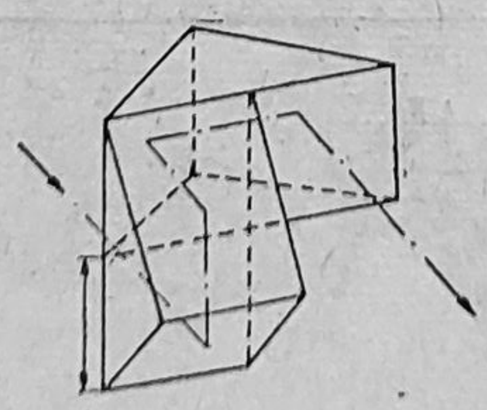
Tabelul 14.1 (continuare)

Nr. crt.	Desenul prismei	Tipul prismei Deviația unghiulară (δ); Deplasarea axei fasciculului (Δ); Drumul geometric prin prismă (d)
4		Prisma deviatoare cu 60° $\delta = 60°$ $d = 3{,}1642\ D$
5		Prisma patrulateră (Wollaston) $\delta = 90°$
6		Prisma pentagonală (Goulier) $\delta = 90°$ $d = 3{,}4142\ D$

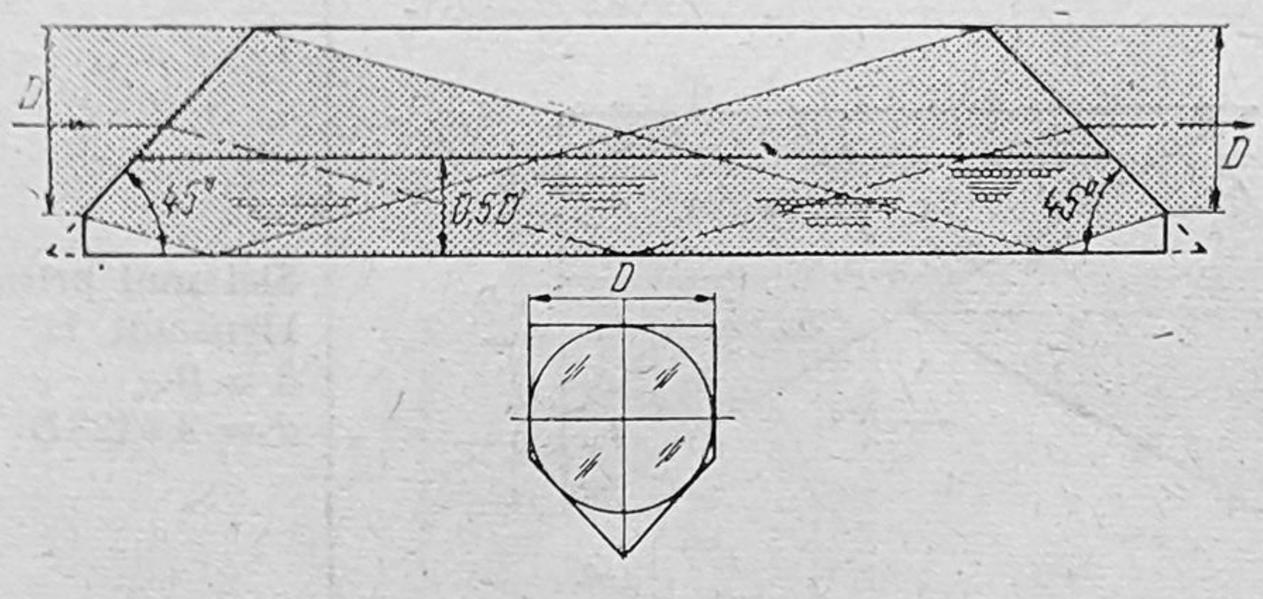
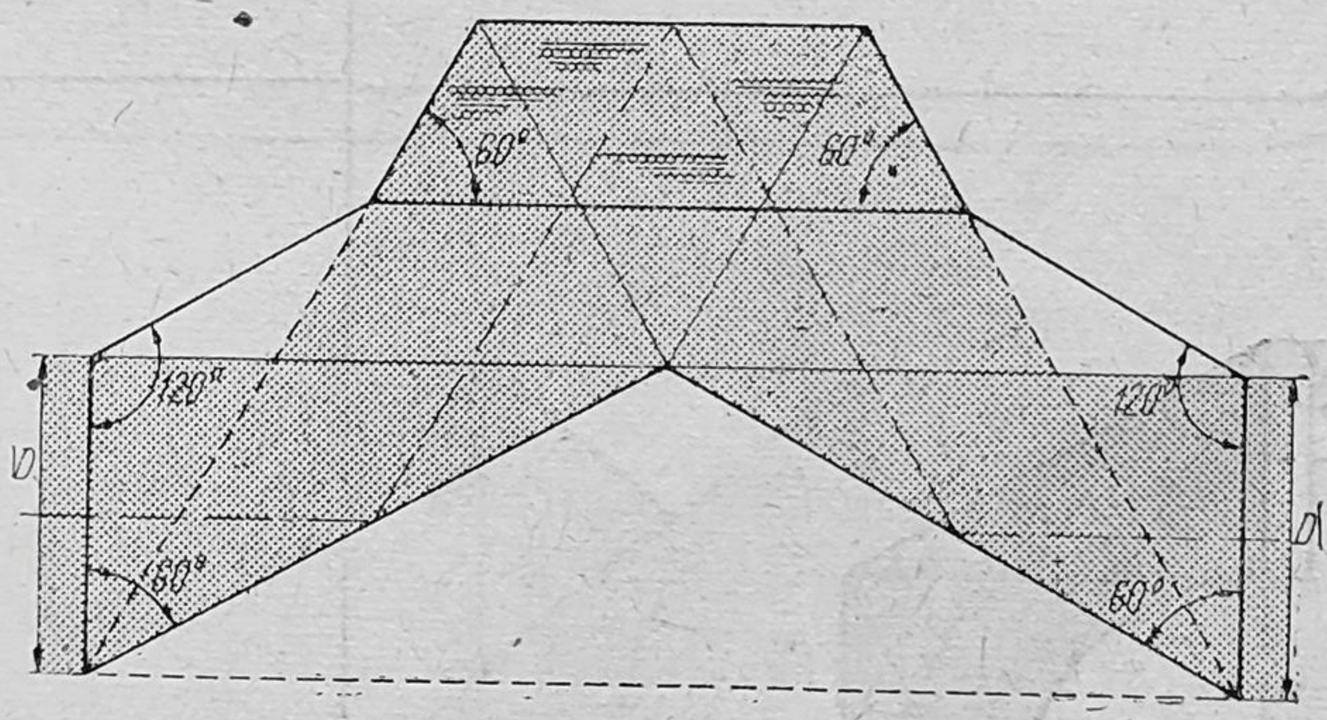
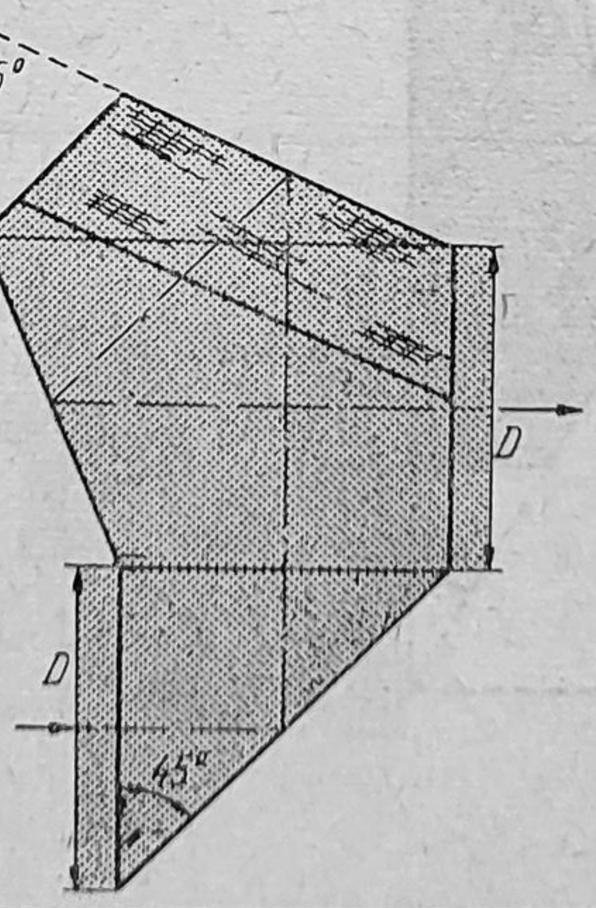
Tabelul 14.1 (continuare)

Nr. crt.	Desenul prismei	Tipul prismei Deviația unghiulară (δ); Deplasarea axei fasciculului (Δ); Drumul geometric prin prismă (d)
7		Prisma deviatoare cu 120° $\delta = 120°$ $d = 3{,}4641\ D$
8		Prisma triunghi dreptunghic isoscel $\delta = 180°$ $d = 2D$
9		Prisma paralelogram $\Delta = D + c$ $d = 2D + c$

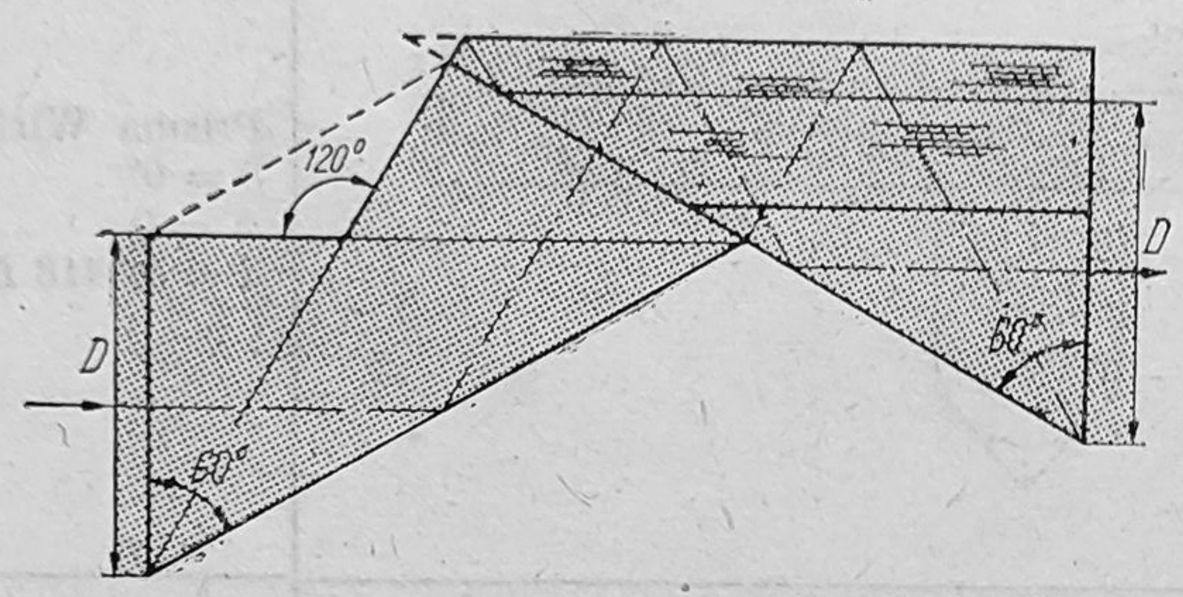
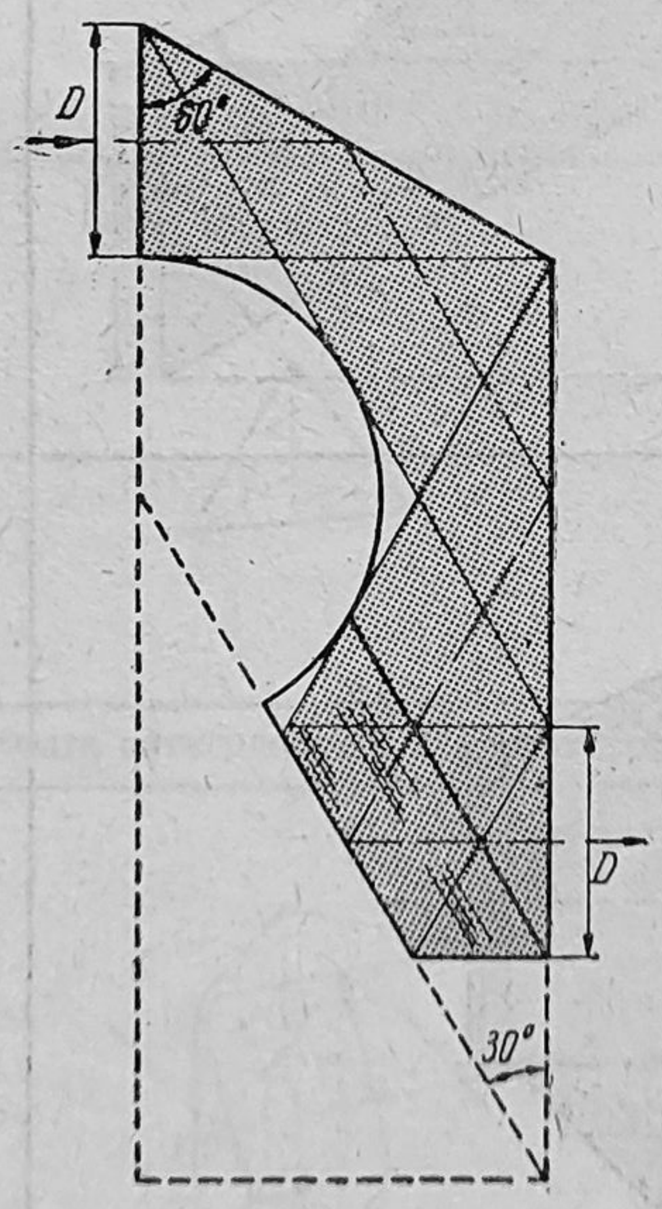
Tabelul 14.1 (continuare)

Nr. crt.	Desenul prismei	Tipul prismei Deviația unghiulară (δ); Deplasarea axei fasciculului (Δ); Drumul geometric prin prismă (d);
	b. Prisme deviatoare care produc simetrie în raport cu un plan	
10		Prisma triunghi dreptunghic isoscel $\delta = 90°$; $\delta = 180°$
11		Prisma Amici $\delta = 0°$ $\Delta = 0$
12		Prisma colț de cub $\delta = 180°$ $d = D\sqrt{3/2}$
	c. Prisme deviatoare care produc simetrie în raport cu un punct	
13		Sistemul prismatic Porro I $\delta = 0°$ $\Delta = D\sqrt{2}$ $d = 4D$

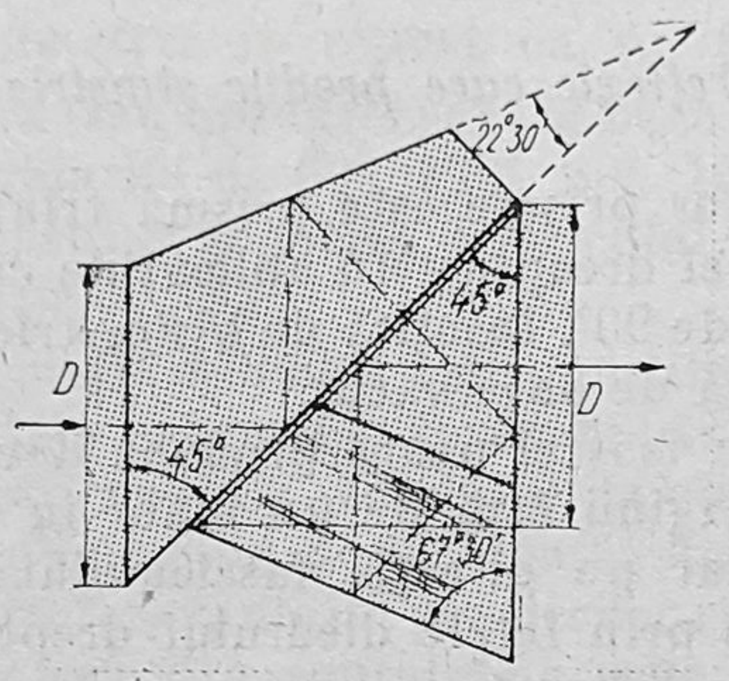
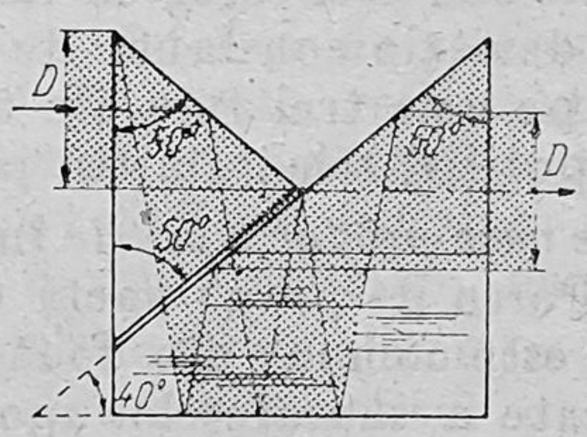
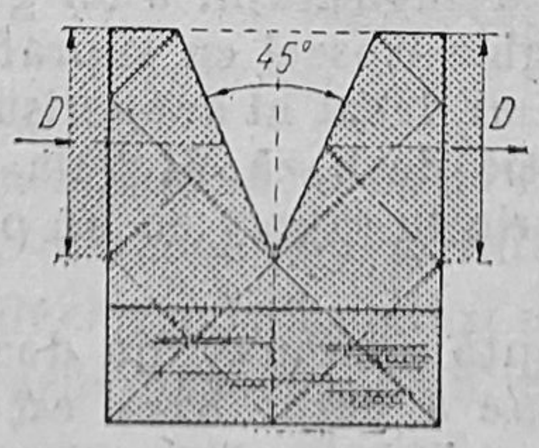
Tabelul 14.1 (continuare)

Nr. crt.	Desenul prismei	Tipul prismei Deviaţia unghiulară (δ) ; Deplasarea axei fasciculului (Δ) ; Drumul geometric prin prismă (d)
14		Prisma Wirth $\delta = 0°$ $\Delta = 0$ $d = 4{,}8418\ D\ (n = 1{,}5)$
15		Prisma Abbe $\delta = 0°$ $\Delta = 0$ $d = 5{,}1962\ D$
16		Sistemul prismatic Hensoldt I $\delta = 0°$ $\Delta = D$ $d = 4{,}4142\ D$

Tabelul 14.1 (continuare)

Nr. crt.	Desenul prismei	Tipul prismei Deviația unghiulară (δ); Deplasarea axei fasciculului (Δ); Drumul geometric prin prismă (d)
17		Sistemul prismatic Hensoldt II $\delta = 0$ $d = 3{,}8428D$
18		Prisma Leman sau Sprenger $\delta = 0°$ $\Delta = 3D$ $d = 5{,}196D$

Tabelul 14.1 (continuare)

Nr. crt.	Desenul prismei	Tipul prismei Deviația unghiulară (δ); Deplasarea axei fasciculului (Δ); Drumul geometric prin prismă (d)
19		Sistemul prismatic Schmidt $\delta = 0°$ $d = 4{,}17D$
20		Sistemul prismatic König $\delta = 0°$ $d = 3{,}327D$
21		Prisma Uppendahl $\delta = 0°$ $\Delta = 0$ $d = 4{,}4142D$

Prisma triunghi dreptunghic isoscel produce o deviaţie de 180° unui fascicul paralel care intră în prismă normal la una din jumătăţile ipotenuzei şi iese normal la cealaltă jumătate a ipotenuzei, după ce suferă două reflexii totale pe feţele diedrului drept.

Prisma paralelogram produce o deplasare laterală a fasciculului fără a afecta imaginile transmise. Secţiunea prismei este un paralelogram cu unghiurile ascuţite de 45°. Se utilizează în sisteme optice binoculare pentru a realiza distanţa interpupilară între două fascicule paralele la o distanţă diferită. Dacă suprafeţele reflectante trebuie să fie mult distanţate, prisma paralelogram se poate înlocui prin două prisme triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuzele paralele.

b) *Prismele deviatoare prin reflexie care produc simetrie în raport cu un plan* (tabelul 14.1).

Tipul reprezentativ al acestor prisme este prisma triunghi dreptunghic isoscel (denumită şi prismă isoscel dreaptă). În aplicaţiile cele mai frecvente produce o deviaţie a fasciculului de 90°, însoţită de o simetrie faţă de un plan, funcţie de orientarea prismei faţă de observator.

Prisma triunghi dreptunghic isoscel poate produce deviaţia fasciculului cu 180°, însoţită de simetria imaginii faţă de un plan, în cazul aşezării cu suprafaţa ipotenuză perpendicular pe direcţia fasciculului incident. Razele suferă două refracţii la trecerile prin feţele diedrului drept şi o reflexie pe suprafaţa ipotenuză care este metalizată.

O altă variantă a prismei triunghi dreptunghic isoscel o constituie prisma Amici. În acest caz, fasciculul incident paralel cu ipotenuza suferă o refracţie faţă de suprafaţa de intrare, o reflexie totală pe ipotenuză, după care o altă refracţie, ieşind paralel cu ipotenuza. Partea neactivă a prismei este suprimată. Prisma Amici nu produce decît simetria imaginii în raport cu un plan.

Prisma colţ de cub produce o deviaţie constantă de 180° unui fascicul, după ce acesta suferă trei reflexii pe cele trei feţe ale triedrului. Deviaţia rămîne constantă la modificări ale poziţiei triedrului în jurul vîrfului.

c) *Prisme deviatoare prin reflexie care produc simetrie în raport cu un punct* (tabelul 14.1). Sistemul de prisme Porro de prima speţă este exemplul tipic din această categorie de prisme. El este compus din două prisme triunghiuri isoscele drepte avînd cîte o jumătate a suprafeţelor ipotenuze în contact, iar muchiile diedrelor drepte perpendiculare. Efectul produs asupra fasciculului este o deplasare a axei însoţită de simetria imaginii în raport cu un punct.

Prisma Wirth este obţinută prin adăugarea unui acoperiş prismei Amici. Nu produce nici devierea, nici deplasarea axei fasciculului transmis, ci numai simetria în raport cu un punct. Are dezavantajul unui gabarit mare. Acoperişul este o prismă triunghi dreptunghic isoscel cu suprafaţa ipotenuză lipită la un sistem prismatic oarecare, diedrul drept al acoperişului înlocuind suprafaţa reflectantă a sistemului prismatic de bază. Regula pentru a obţine un sistem prismatic care produce sismetrie în raport cu un punct este un număr par de reflexii plus un acoperiş.

Prisma Abbe are secţiunea dreaptă compusă din două trapeze alăturate unui triunghi isoscel obtuzunghic, pe a cărui bază este lipit un acoperiş. Acţiunea acestei prisme asupra fasciculului care o traversează este producerea simetriei faţă de un punct. Are lungimea mai mică decît prisma Wirth la acelaşi diametru al fasciculului incident.

Sistemul prismatic Hensoldt de forma I este constituit dintr-o prismă triunghi dreptunghic isoscel lipită cu o prismă pentagonală, care are una din fețele reflectante înlocuită cu un acoperiș, iar cealaltă față metalizată. Acest sistem prismatic monobloc realizează deplasarea axei fasciculului și simetria imaginii în raport cu un punct.

Sistemul prismatic Hensoldt de forma a doua constituie o combinație între o prismă deviatoare cu 60°, avînd suprafața reflectantă catetă înlocuită cu un acoperiș, și o prismă tip Amici avînd secțiunea dreaptă un trapez isoscel cu unghiurile de la bază 60°. Acest sistem prismatic monobloc are avantajul gabaritului redus și absorbției reduse datorită drumului geometric relativ scurt ; produce simetria în raport cu un punct și deplasarea fasciculului.

Prisma Leman (sau Sprenger) are la bază o prismă patrulateră cu secțiunea un trapez cu unghiurile de 60°, 120°, 30°, 150°. Ultima suprafață reflectantă este înlocuită printr-un acoperiș. Fasciculul este deplasat cu de trei ori diametrul său teoretic.

Sistemul prismatic Schmidt este constituit din două prisme triunghiulare nelipite, suprafețele prismelor separate de lama de aer subțire <0,1 mm producînd succesiv reflexia totală a fasciculului luminos și transmiterea acestuia, funcție de unghiul de incidență. Acest procedeu permite micșorarea gabaritului, dar are dezavantajul pierderilor relativ mari (8%) de flux. Cea de a doua prismă are una din suprafețele reflectante înlocuită cu un acoperiș, astfel încît fasciculul luminos suferă patru reflexii pe suprafețele prismelor triunghiulare plus două pe diedrul acoperișului.

Sistemul prismatic Konig este format din două prisme separate printr-o lamă subțire de aer. Prima prismă are secțiunea unui triunghi isoscel, baza constituind suprafața de intrare a fasciculului, iar una din fețe producînd reflexia totală a acestuia. Cea de a doua prismă are secțiunea un triunghi dreptunghic, suprafața catetă reflectantă fiind înlocuită cu un acoperiș. Înainte de a ieși din prismă, normal la cealaltă suprafață catetă, fasciculul mai suferă o reflexie totală pe suprafața ipotenuză a celei de a doua prisme. Fasciculul nu este deviat unghiular, dar suferă o ușoară deplasare a axei.

Prisma Uppendahl este un sistem monobloc, secțiunea sa avînd la bază un dreptunghi în care s-a practicat o decupare triunghiulară cu unghiul la vîrf 45°, iar pe fața opusă se lipește un acoperiș. Suprafețele decupării sînt argintate. Fasciculul emergent nu este deviat și nici deplasat față de direcția inițială.

14.3. Oglinzi

Oglinda reprezintă elementul optic caracterizat printr-o suprafață foarte netedă (reflectantă), metalică sau metalizată. După forma suprafeței reflectante (dioptru de reflexie) există oglinzi plane, sferice, parabolice, elipsoidice, hiperbolice etc. Oglinzile obținute prin metalizare (vaporizarea în vid a unui metal : argint, aluminiu, aur, platină, cupru, crom, nichel, zinc) pot avea suprafața reflectantă anterioară (deasupra) sau posterioară (în interior), față de suportul de sticlă.

14.3.1. Oglinda plană cu suprafață reflectantă anterioară

Imaginea punctului A se determină la intersecția prelungirilor razelor reflectate, în spatele oglinzii în A', la distanța $s' = s$ (fig. 14.7). Așadar, oglinda plană dă o imagine virtuală simetrică punct cu punct față de suprafața

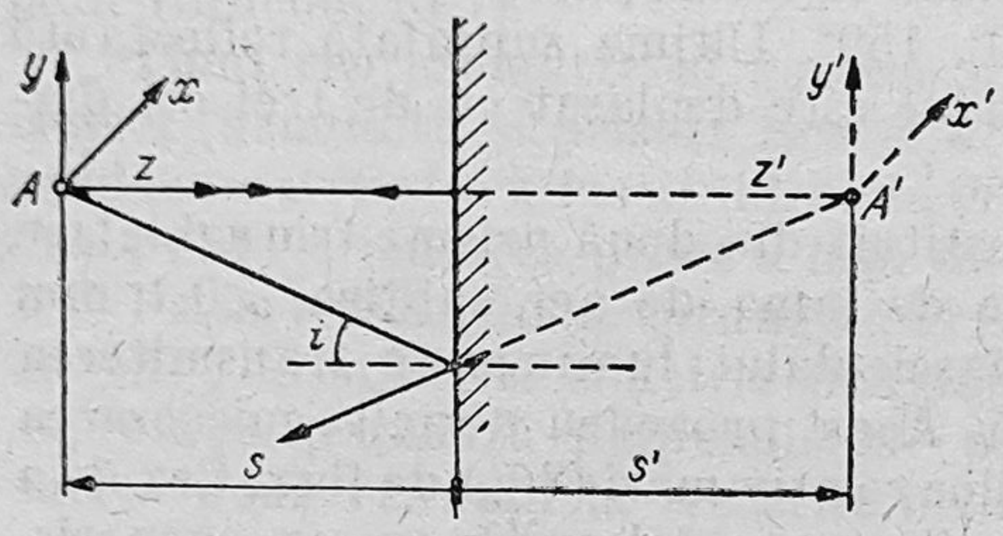


Fig. 14.7

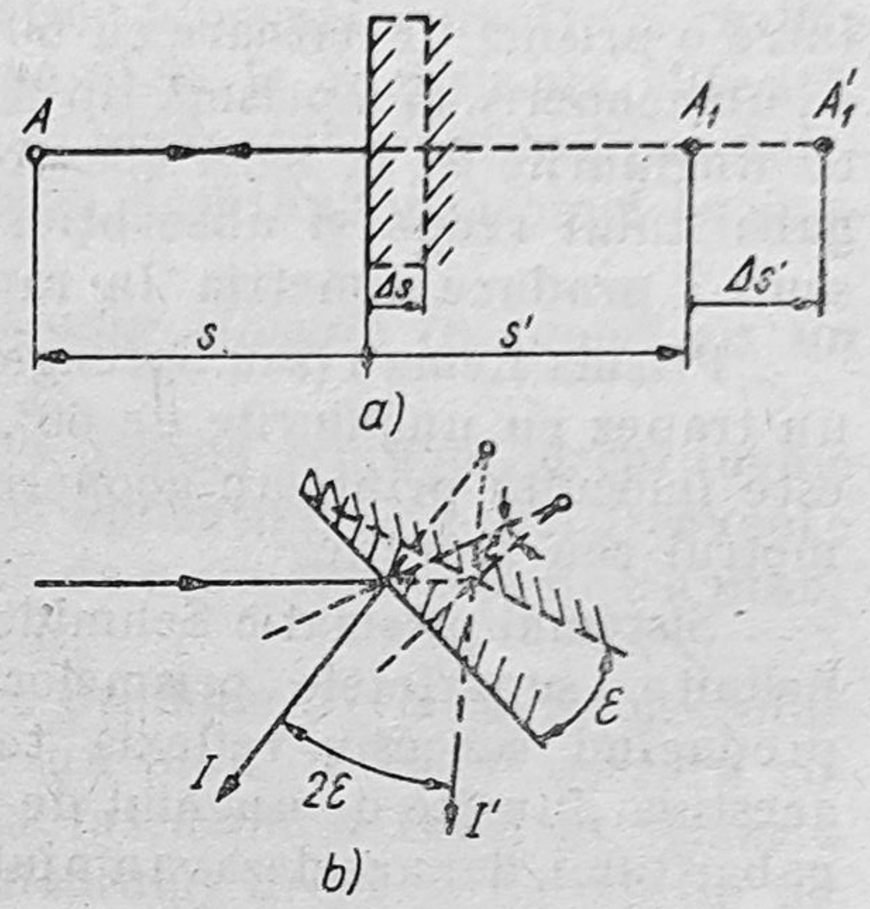


Fig. 14.8

reflectantă. Sistemul de coordonate xyz drept ($\mathbf{1}_x \times \mathbf{1}_y = \mathbf{1}_z$) devine un sistem de coordonate stîng $x'y'z'(\mathbf{1}_{x'} \times \mathbf{1}_{y'} = -\mathbf{1}_{z'})$, așadar oglinda plană inversează stînga-dreapta. Deplasarea axială Δs a unei oglinzi plane produce o deplasare dublă a imaginii (fig. 14.8, a): $\Delta s' = 2\Delta s$. O rotire ε a oglinzii în planul reflexiei produce o rotire 2ε razei reflectate (fig. 14.8, b).

Sistemele optice formate numai cu oglinzi se numesc catoptrice. Se pot utiliza oglinzi plane perpendiculare, paralele, formînd un unghi foarte mic etc. pentru obținerea diferitelor efecte asupra imaginii.

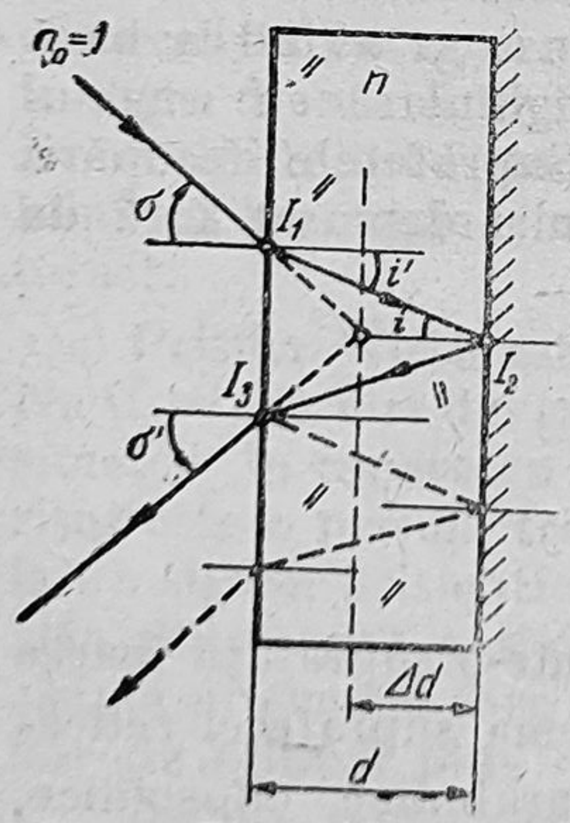


Fig. 14.9

14.3.2 Oglinda plană cu suprafață reflectantă posterioară

În acest caz, oglinda poate fi considerată ca o combinație între o lamă plan-paralelă și o suprafață reflectantă (fig. 14.9). Practic, au loc două refracții în I_1 și I_3 și o reflexie în I_2, raza ieșind din lama plan-paralelă ca și cum s-ar fi reflectat în I, la distanța Δd în fața suprafeței reflectante reale

$$\Delta d = d[1 - \cos\sigma(n^2 - \sin^2\sigma)^{-1/2}].$$

Această „deplasare" a suprafeței reflectante nu deranjează funcționarea unei astfel de oglinzi, care are avantajul unei bune protecții a depunerii metalice; în schimb, la înclinări σ ale razei incidente apare fenomenul reflexiilor multiple, care duce la formarea de imagini parazitare. Din această cauză utilizarea acestor oglinzi este limitată.

14.3.3. **Oglinzi sferice**

Oglinzile sferice pot fi tratate, în calculele optice, ca dioptri având $n' = -n$. De altfel, relaţia (13.36) dă expresia distanţei focale a unei oglinzi sferice : $f = r/2$, unde r = raza de curbură a oglinzii. Ecuaţia de conjugare faţă de oglinda sferică în domeniul paraxial este dată de relaţia (13.35)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}.$$

În figurile 14.10 şi 14.11 se prezintă formarea imaginilor în domeniul paraxial într-o oglindă sferică concavă, respectiv convexă, pentru diferite

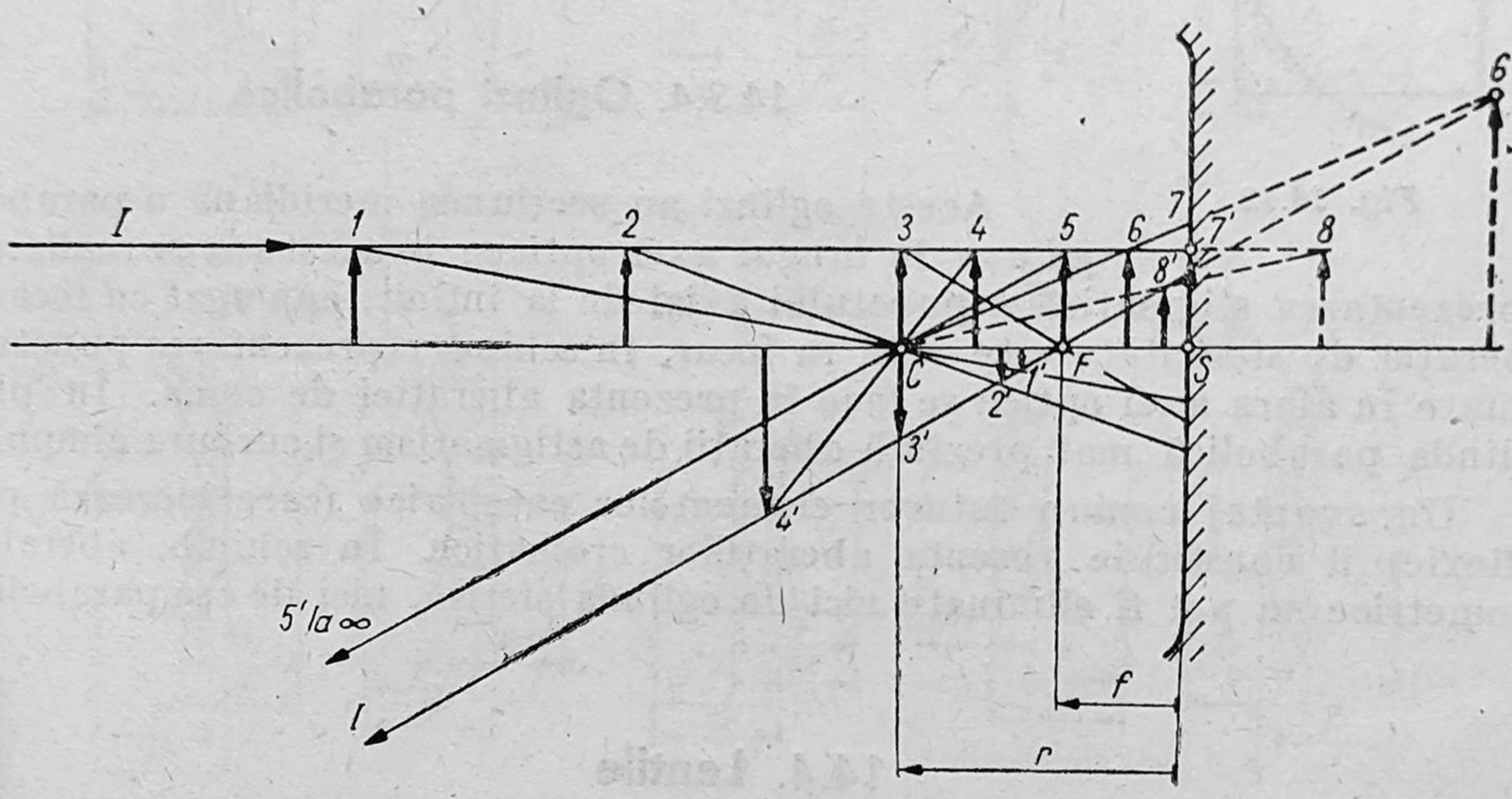


Fig. 14.10

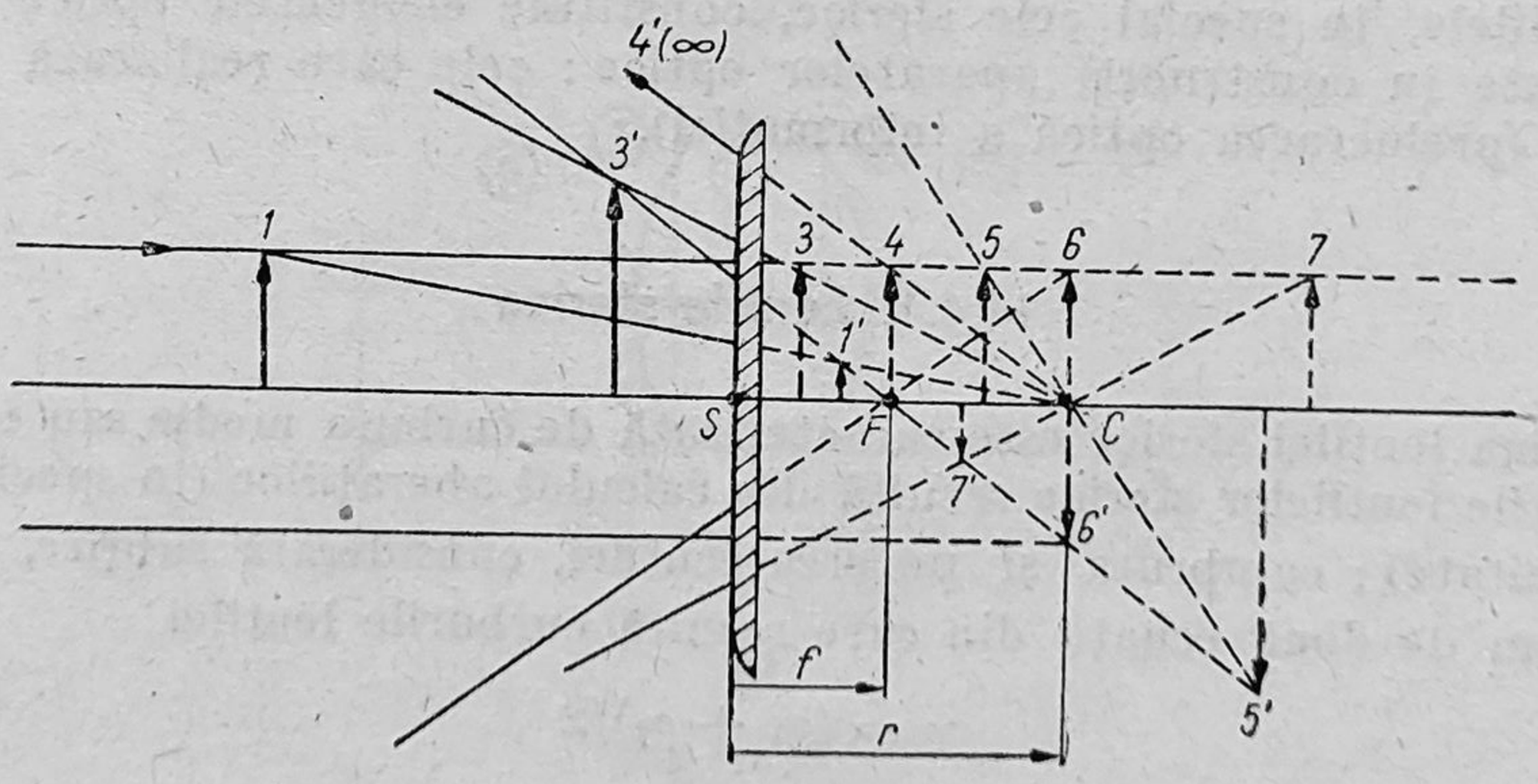


Fig. 14.11

poziţii ale obiectului utilizînd proprietăţile centrului de curbură şi ale focarului oglinzii. Oglinda sferică nu este stigmatică decît în vecinătatea axei optice (domeniul paraxial). Aberaţia de undă produsă de o oglindă sferică este $\varepsilon = h^4/(128f^3)$, funcţie de înălţimea de incidenţă şi de distanţa focală

a oglinzii. Aplicînd regula sfertului lungimii de undă (Rayleigh), condiția ca imaginea dată de oglinda sferică să corespundă calitativ este: $\varepsilon \leqslant \lambda/4$. Înlocuind $h = D/2$, $\lambda \simeq 550$ nm, rezultă condiția tehnică $f^3 \geqslant 3{,}5D^4$, cu f și D exprimate în mm; sau, introducînd deschiderea relativă $D/f = 1 : N$, rezultă condiția pentru numărul de apertură $N \geqslant (3{,}5D)^{1/3}$. Deci, oglinda sferică nu poate da imagini satisfăcătoare decît pentru deschideri relative mici și pentru un cîmp redus, cu excepția plasării obiectului în centrul de curbură al oglinzii (caz foarte des întîlnit la sistemele de iluminare), deschiderea relativă putînd ajunge, în acest caz reprezentat în figura 14.12, pînă la o semisferă adică $(1 : N)_{max} = 1 : 0{,}25$.

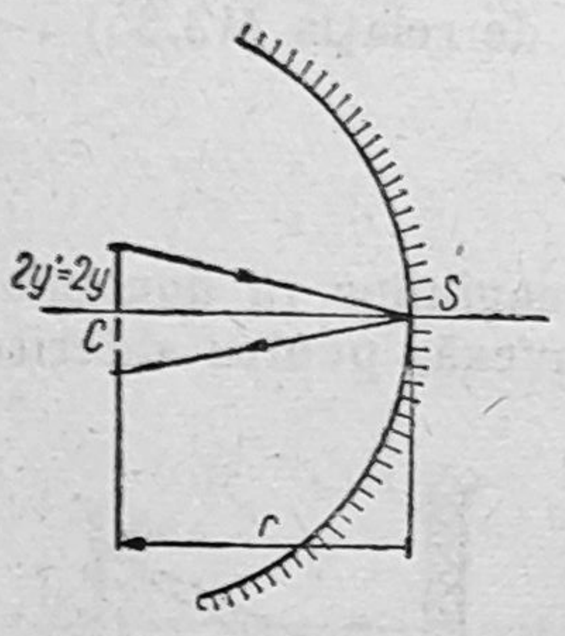


Fig. 14.12

14.3.4. Oglinzi parabolice

Aceste oglinzi au secțiunea meridiană o parabolă, cu axa în lungul axei optice; în acest caz se realizează reprezentarea stigmatică a punctului axial de la infinit, conjugat cu focarul. Aberația de sfericitate este nulă în focar, în schimb reprezentarea punctelor situate în afara axei optice se face în prezența aberației de coma. În plus, oglinda parabolică mai prezintă aberații de astigmatism și curbura cîmpului.

Un avantaj comun tuturor elementelor catoptrice (care lucrează prin reflexie) îl constituie absența aberațiilor cromatice. În schimb, aberațiile geometrice nu pot fi eliminate nici de oglinda sferică, nici de cea parabolică.

14.4. Lentile

Lentilele, în special cele sferice, constituie elementele optice cele mai importante în construcția aparatelor optice: cele care realizează formarea imaginii (prelucrarea optică a informației).

14.4.1. Lentile sferice

Forma lentilei sferice este caracterizată de curbura medie sau cambrura. Cambrurile lentilelor sferice rezultă din calculul aberațiilor (în special a celei de sfericitate); cambrura și puterea lentilei, considerată subțire, formează un sistem de două ecuații din care rezultă curburile lentilei

$$\gamma = (\rho_1 + \rho_2)/2$$

$$\varphi' = (n - 1)(\rho_1 - \rho_2)$$

Principalele forme ale lentilei sferice sînt: biconvexă, plan-convexă, biconcavă, plan-concavă, menisc convergent, menisc divergent, prezentate în figura 14.13. Mărimile care caracterizează constructiv și optic o lentilă sferică sînt: D — diametrul lentilei; e — grosimea măsurată pe axa optică;

t — grosimea măsurată pe marginea lentilei; r_1, r_2 — razele de curbură; n — indicele de refracție al sticlei; $\bar{f}$, f' — distanțele focale; $s_{\bar{F}}$, $s'_{F'}$ — distanțele frontifocale.

Diametrul util D_u al lentilei rezultă în urma analizării mersului razelor pupilare marginale. La diametrul util se adaugă $\Delta D = 0{,}6 \div 2{,}5$ mm,

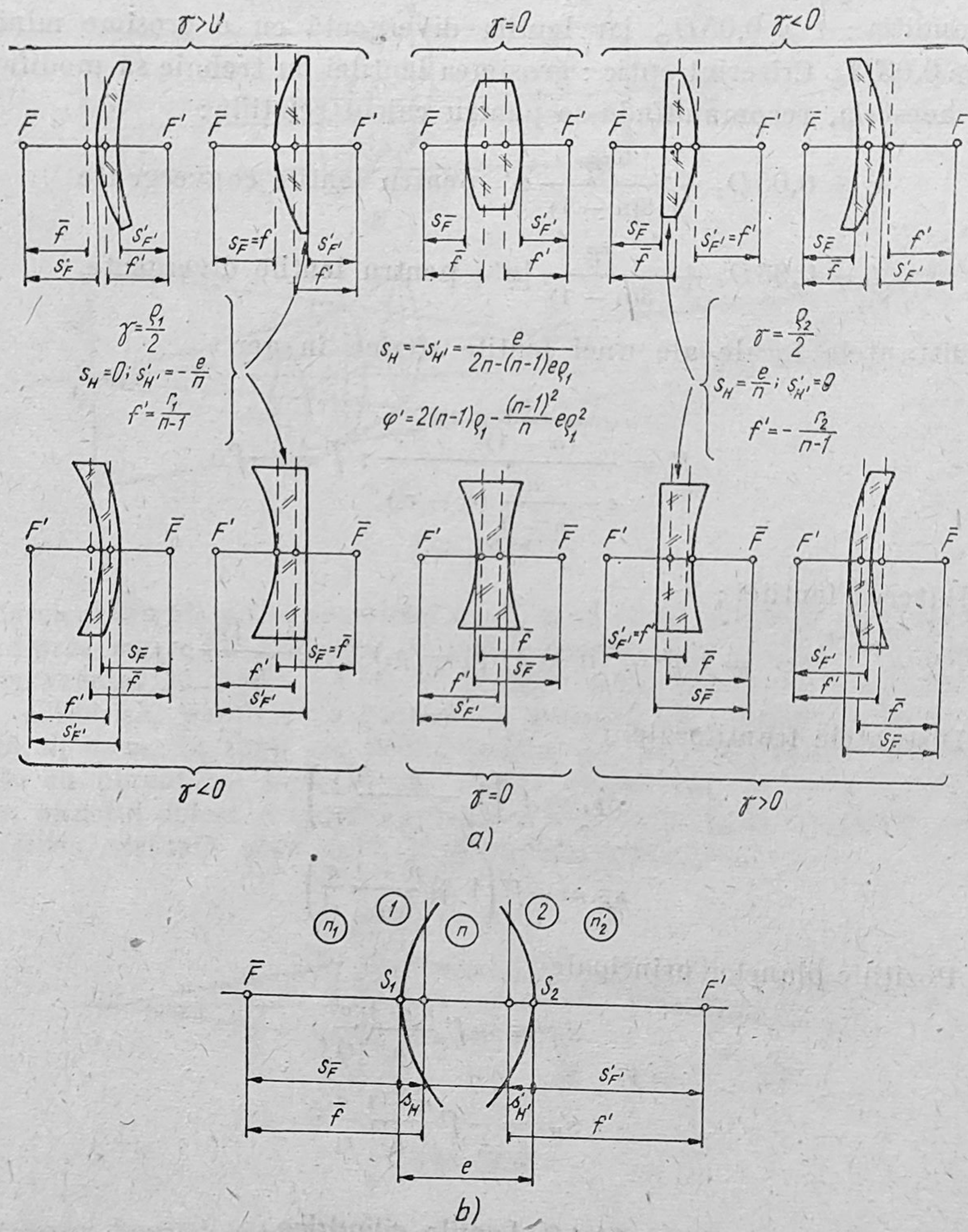


Fig. 14.13

în funcție de D_u, în cazul fixării prin sertizare, sau $\Delta D = 1 \div 4$ mm, în cazul fixării cu inele de strîngere, rezultînd diametrul total $D_t = D_u + \Delta D$.

Grosimea lentilei pe axa optică reprezintă cea mai mare valoare obținută în urma calculelor efectuate pe baza a trei criterii: optic, geometric și mecanic.

Criteriul geometric : în cazul lentilelor convergente, grosimea de pe axa optică trebuie să asigure intersecția celor doi dioptri peste diametrul total D,

$$e \geqslant r_1 \pm r_2 - [(r_1^2 - (D_t/2)^2)^{1/2} \pm (r_2^2 - (D_t/2)^2)^{1/2}]$$

semnul minus se adoptă pentru lentile menisc, convergente. Criteriul mecanic : lentila convergentă trebuie să aibă o grosime minimă pe margini, care să verifice condiția : $t \geqslant 0{,}05D_t$, iar lentila divergentă cu o grosime minimă pe axă $e \geqslant 0{,}03D_t$. Criteriul optic : grosimea lentilei nu trebuie să modifice cambrura acesteia, recomandîndu-se pentru calcul relațiile :

$$e = 0{,}05D_t + \frac{D_t^2}{8(n-1)}\varphi' \quad \text{pentru lentile convergente}$$

$$t = 0{,}03D_t + \frac{D_t^2}{8(n-1)}|\varphi'| \quad \text{pentru lentile divergente.}$$

Distanțele focale ale unei lentile sferice în aer

$$f' = \frac{\dfrac{n}{(n-1)^2} r_1 r_2}{e - \dfrac{n}{n-1}(r_1 - r_2)}; \quad \bar{f} = -f' \tag{14.17}$$

Puterea lentilei :

$$\varphi' = 1/f' = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{(n-1)^2}{n}\rho_1\rho_2 e \tag{14.18}$$

Distanțele frontifocale

$$s'_{F'} = f'\left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{e}{r_1}\right)$$
$$s_F = -f'\left(1 + \frac{n-1}{n}\frac{e}{r_2}\right) \tag{14.19}$$

Pozițiile planelor principale

$$s_H = -f'\frac{n-1}{n}\frac{e}{r_2}$$
$$s'_{H'} = -f'\frac{n-1}{n}\frac{e}{r_1}. \tag{14.20}$$

14.4.2. Lentile cilindrice

Aceste lentile reprezintă combinații de doi dioptri cilindrici cu generatoarele paralele (sau perpendiculare).

O lentilă cilindrică cu generatoarele ambilor dioptri paralele (fig. 14.14, a) are două plane de simetrie, perpendiculare între ele : π_1 în care se comportă ca și secțiunea meridiană printr-o lentilă sferică și π_2 în care se comportă

ca o lamă plan-paralelă. În cazul în care unul dintre dioptri este plan, lentila cilindrică devine plan-convexă sau plan-concavă. Lentilele cilindrice sînt astigmate.

Un fascicul în planul π_1, cu vîrful în punctul obiect A, este transformat de o lentilă biconvexă într-un fascicul convergent cu vîrful în A_1', în timp

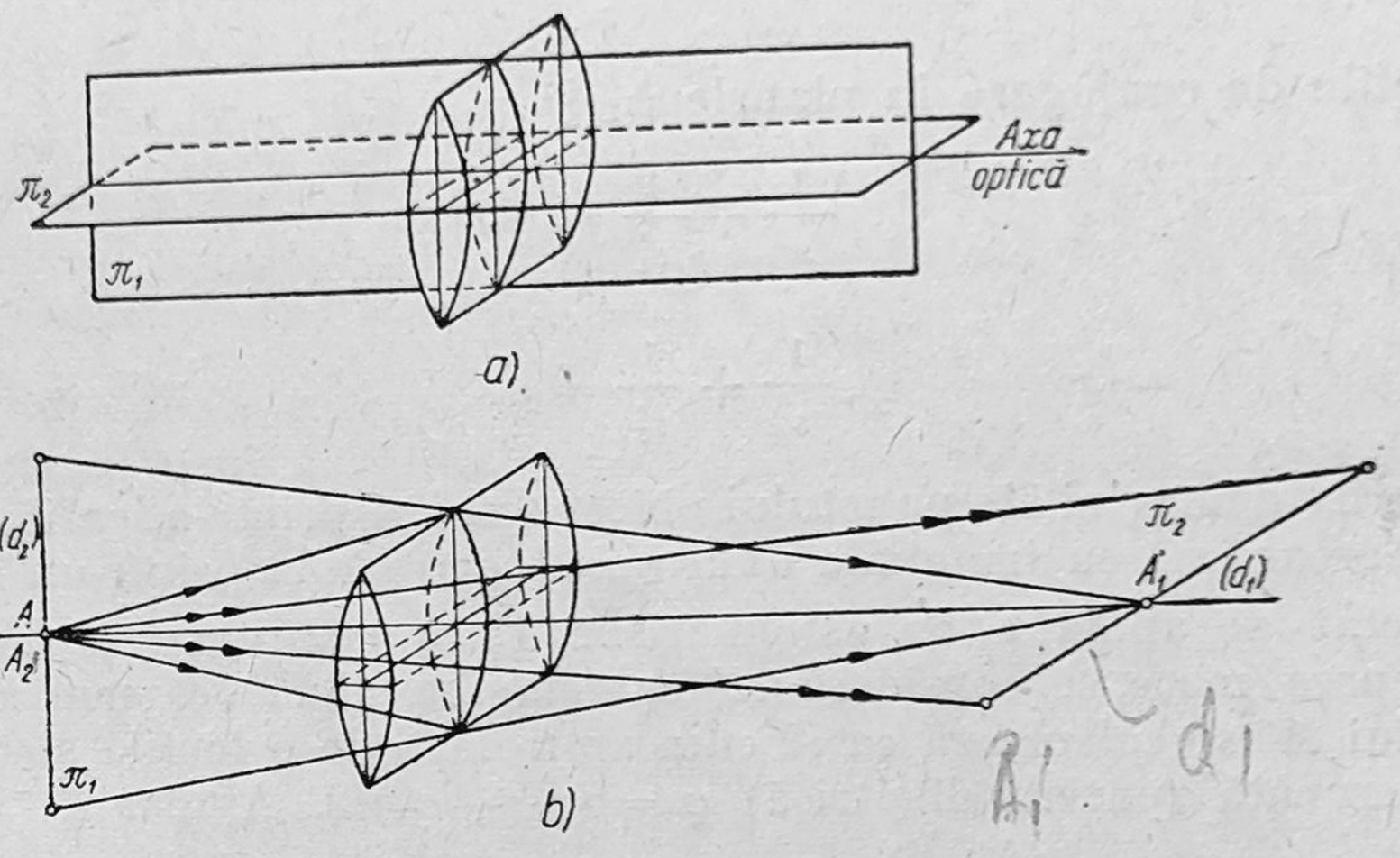


Fig. 14.14

ce un fascicul din planul π_2 are vîrful în $A_2' \simeq A$ (dacă deschiderea fasciculului nu este prea mare, iar grosimea pe axă a lentilei este neglijabilă), așa cum este reprezentat în figura 14.14, b. Ținînd seama de toate secțiunile prin lentila cilindrică, paralele cu planul π_1, punctul A_1' descrie segmentul de dreaptă $d_1 \in \pi_2$, în timp ce, ținînd seama de toate secțiunile prin lentilă paralele cu planul π_2, punctul A_2' descrie segmentul de dreaptă $d_2 \in \pi_1$. Așadar, punctul obiect A are două imagini nepunctiforme: imaginea reală d_1 și imaginea virtuală (denumită și pseudoimaginea d_2).

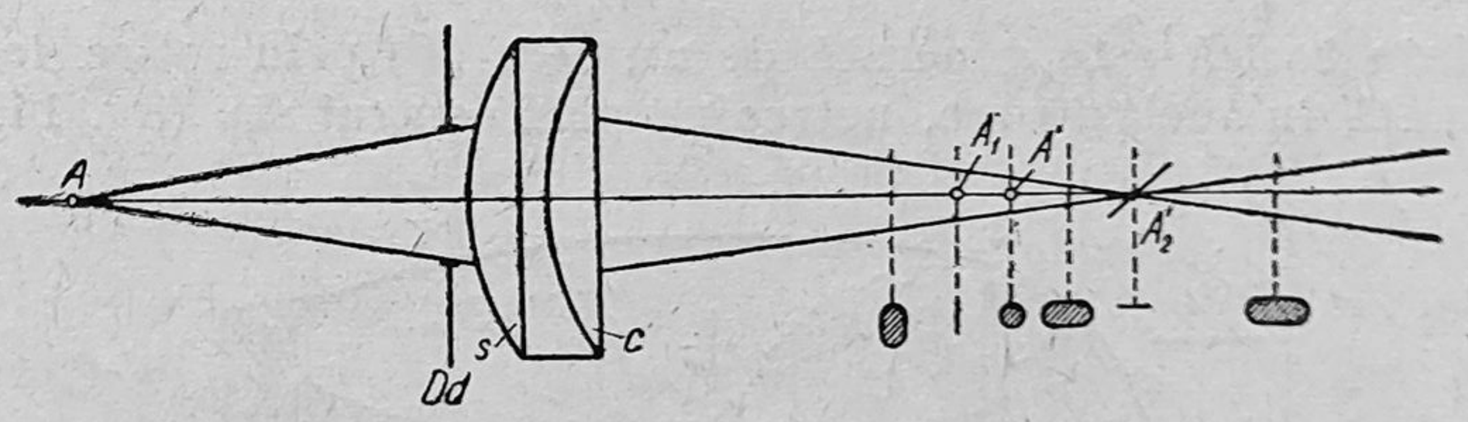


Fig. 14.15

Puterea lentilei cilindrice în planul π_1 (perpendicular pe generatoare) este, neținînd seama de grosime: $\varphi_1 = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$, iar în planul π_2: $\varphi_2 = 0$.

Lentilele sfero-cilindrice sînt combinații de doi dioptri: unul sferic și celălalt cilindric. O astfel de lentilă poate fi considerată ca ansamblul al unei lentile plan-sferice cu o lentilă plan-cilindrică, lipite pe fețele plane (fig. 14.15).

Dacă r este raza sferei și r_0 raza cilindrului, puterile lentilei în cele două plane π_1 și π_2 sînt

$$\varphi_1 = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}\right)$$

$$\varphi_2 = (n-1)\frac{1}{r} \qquad (14.21)$$

iar ecuațiile de conjugare în planele π_1 și π_2

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'_1} = \varphi_1$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'_2} = \varphi_2. \qquad (14.22)$$

Diferitele imagini ale punctului obiect axial A printr-o lentilă sfero-cilindrică se aseamănă cu imaginile unui punct extraaxial printr-un sistem centrat afectat de aberația de astigmatism. Dacă distanța astigmatică $\overline{A'_1A'_2}$ nu este prea mare, se consideră A' ca imagine, fiind cea mai acceptabilă. Poziția lui A' se calculează ca și cum ar fi dată de o lentilă sferică subțire de convergență (putere dioptrică) $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$. Așadar

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \varphi\,; \quad \varphi = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r_c}\right). \qquad (14.23)$$

Aplicațiile cele mai importante ale lentilelor cilindrice le constituie: sistemele anamorfotice (care dau imagini neasemenea cu obiectul), utilizate de exemplu în cinematografia panoramică, în spectroscopia cosmică (o sursă punctiformă are ca imagine o focală liniară), precum și lentilele pentru corectarea astigmatismului ocular.

14.4.3. Lentile torice

Suprafața torică este generată de un cerc (Γ) prin rotire în jurul unei axe (Δ) situată în același plan, netrecînd prin centrul său (fig. 14.16). Suprafața torică este caracterizată de raza curburii principale r_1, în planul π_1 și raza secțiunii π_2, care corespunde cu r_2, raza cercului generator. Lentila plan-torică are un dioptru toric, iar celălalt plan. Lentilele sfero-torice au

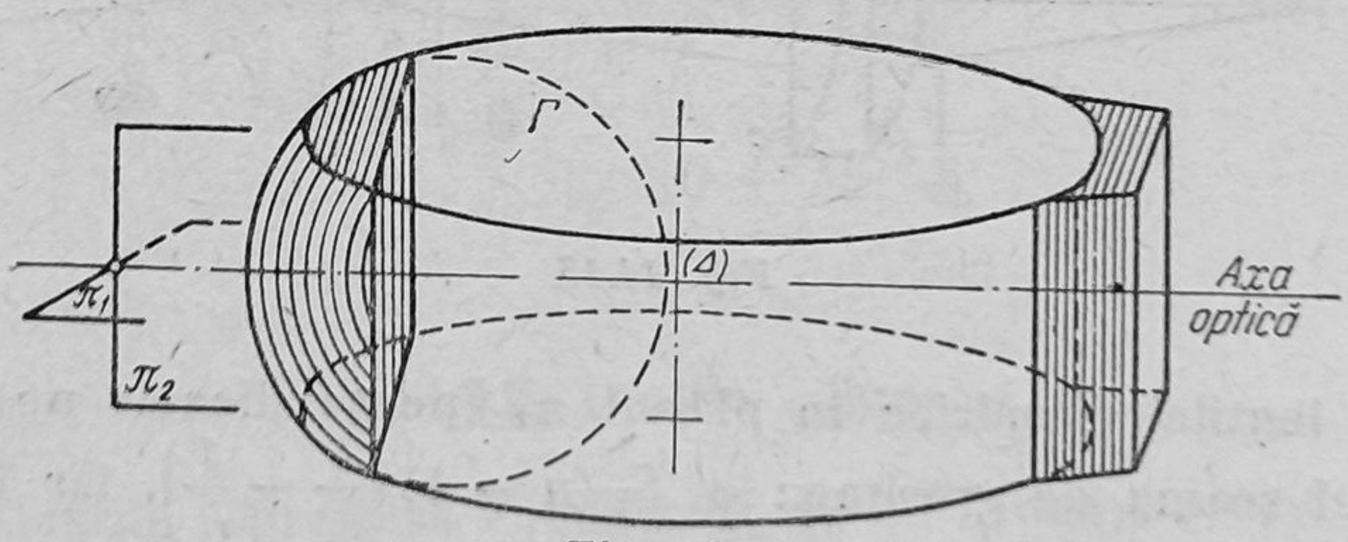


Fig. 14.16

un dioptru sferic și unul toric. O astfel de lentilă are puterile în cele două plane π_1, respectiv π_2

$$\varphi_1 = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \tag{14.24}$$

$$\varphi_2 = (n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right)$$

unde r reprezintă raza dioptrului sferic.

Observație. Convenția privind măsurarea razelor de curbură ale dioptrilor rămîne valabilă și pentru suprafețele optice asferice.

Ca și lentilele cilindrice, lentilele torice sînt astigmate. Lentilele sfero-torice permit corijarea astigmatismului ocular pentru un cîmp mai mare decît pentru lentilele sfero-cilindrice.

14.4.4. Lentile Fresnel

Dificultatea obținerii lentilelor sferice cu deschideri mari, necesare în sistemele de iluminare, ca și valorile ridicate ale aberației de sfericitate în cazul acestor lentile au condus la realizarea lentilelor Fresnel disc sau cilindrice. Prin împărțirea unei suprafețe sferice în zone Fresnel care apoi sînt translatate la o bază se obține un profil Fresnel (fig. 14.17, a) ; atașînd acest profil la o lamă plan-paralelă sau la o suprafață sferică de curbură mică rezultă o lentilă Fresnel disc (fig. 14.17, b). Prin rotirea profilului Fresnel obținut, într-un plan meridian, în jurul unei drepte perpendiculare pe axa optică, rezultă o lentilă Fresnel cilindrică (fig. 14.17, c).

Lentila Fresnel disc prezintă un element central de forma unei lentile plan-convexe și inele dioptrice suprapuse elementului central. Pentru a asigura stigmatismul formării imaginii, fiecare element este calculat separat. Teoretic, profilul exterior este o curbă de ordin superior, dar în practică se împarte acest profil în arce de cerc (sau chiar segmente de dreaptă), punînd condiția ca razele extreme care traversează fiecare inel, provenind din focarul lentilei, să iasă paralele cu axa optică. Relațiile pentru calculul elementelor, utilizînd notațiile din figura 14.18, a, sînt următoarele:

$$h_0 = AI_0 = \bar{F}A \operatorname{tg} \sigma_0$$

$$i_0 = \sigma_0$$

$$\sin i_0' = \frac{1}{n} \sin i_0$$

$$h_0' = BI_0' = h_0 + e \operatorname{tg} i_0'$$

$$n \cdot \sin(\varphi_0 - i_0') = \sin \varphi_0 \rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sin i_0}{n \cos i_0' - 1}$$

$$R_0 = h_0'/\sin \varphi_0$$

$$C_0A = x_0 = R_0 \cos \varphi_0 - e$$

$$e_0 = R_0(1 - \cos \varphi_0)$$

$$i_1 = \sigma_1$$

$$\sin i_1' = \frac{1}{n} \sin i_1$$

$$h_1 = AI_1 = \bar{F}A \operatorname{tg} \sigma_1$$

$$h_1' = BI_1' = h_1 + e \operatorname{tg} i_1'$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin i_1}{n \cos i_1' - 1}$$

$$R_1 = h_1' (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0)^{-1}$$

$$C_1: \begin{cases} x_1 = R_1 \cos \varphi_1 - e \\ y_1 = R_1 \sin \varphi_1 - h_1' \end{cases}$$

$$e_1 = R_1(\cos \varphi_6 - \cos \varphi_1).$$

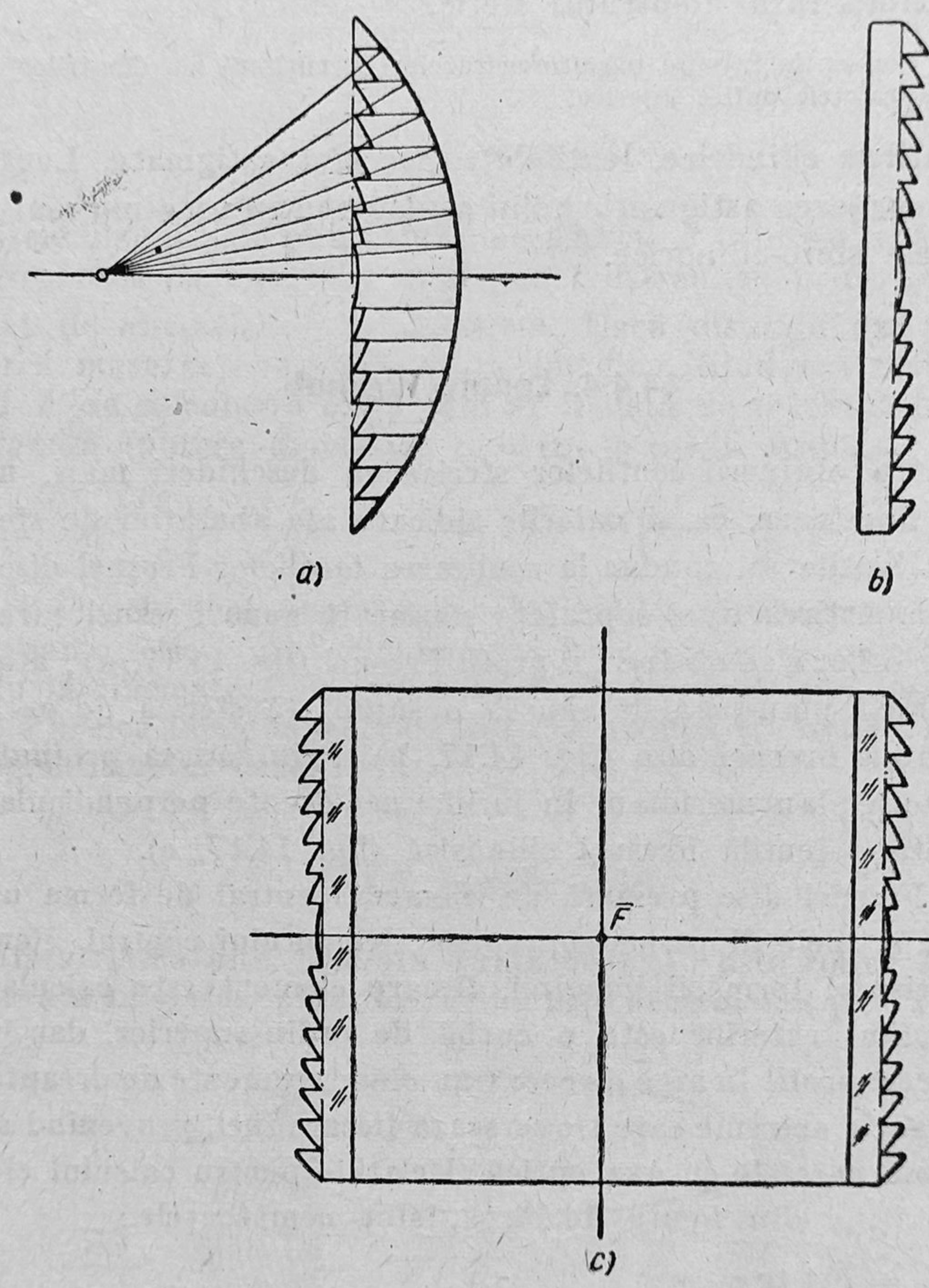
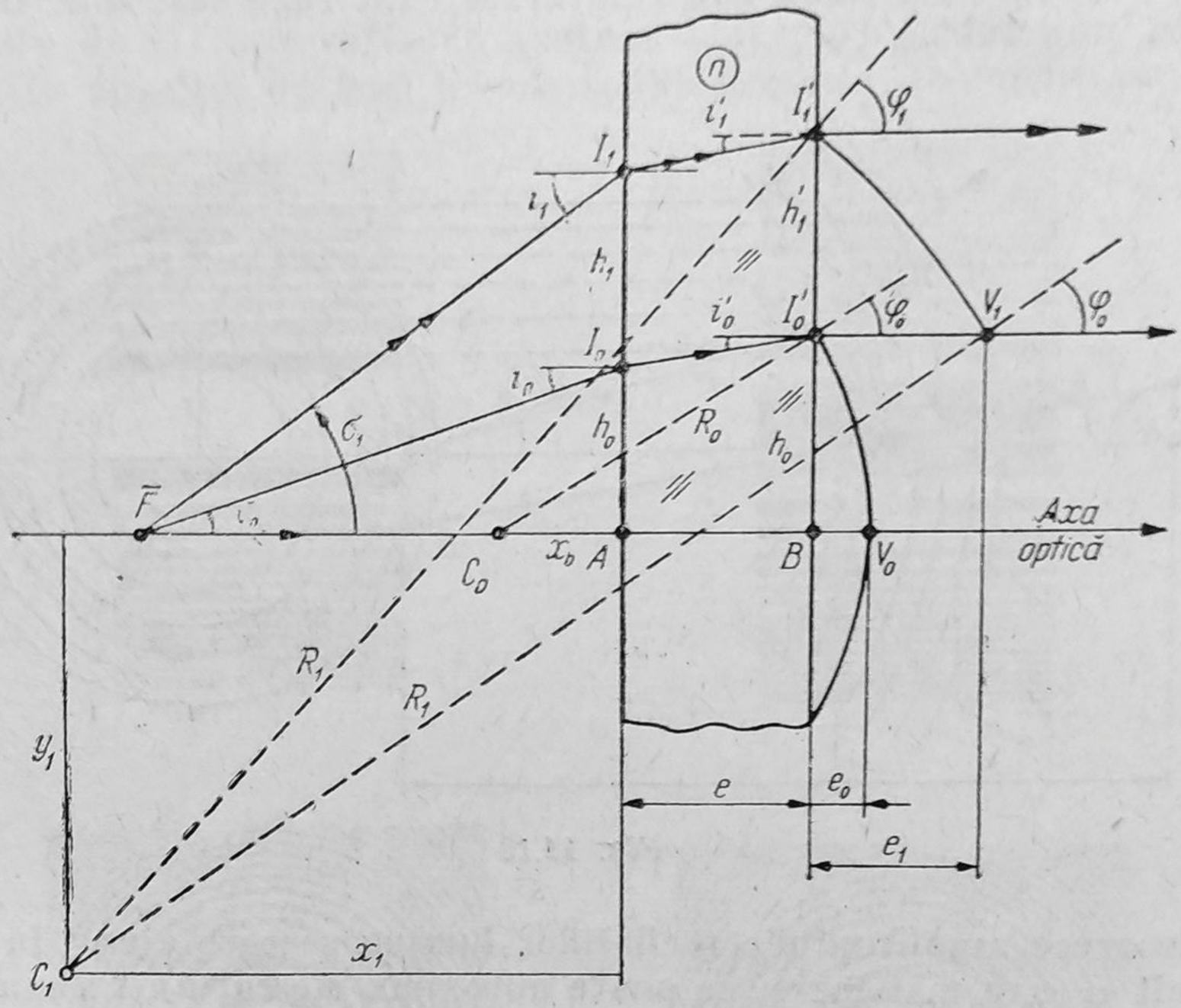


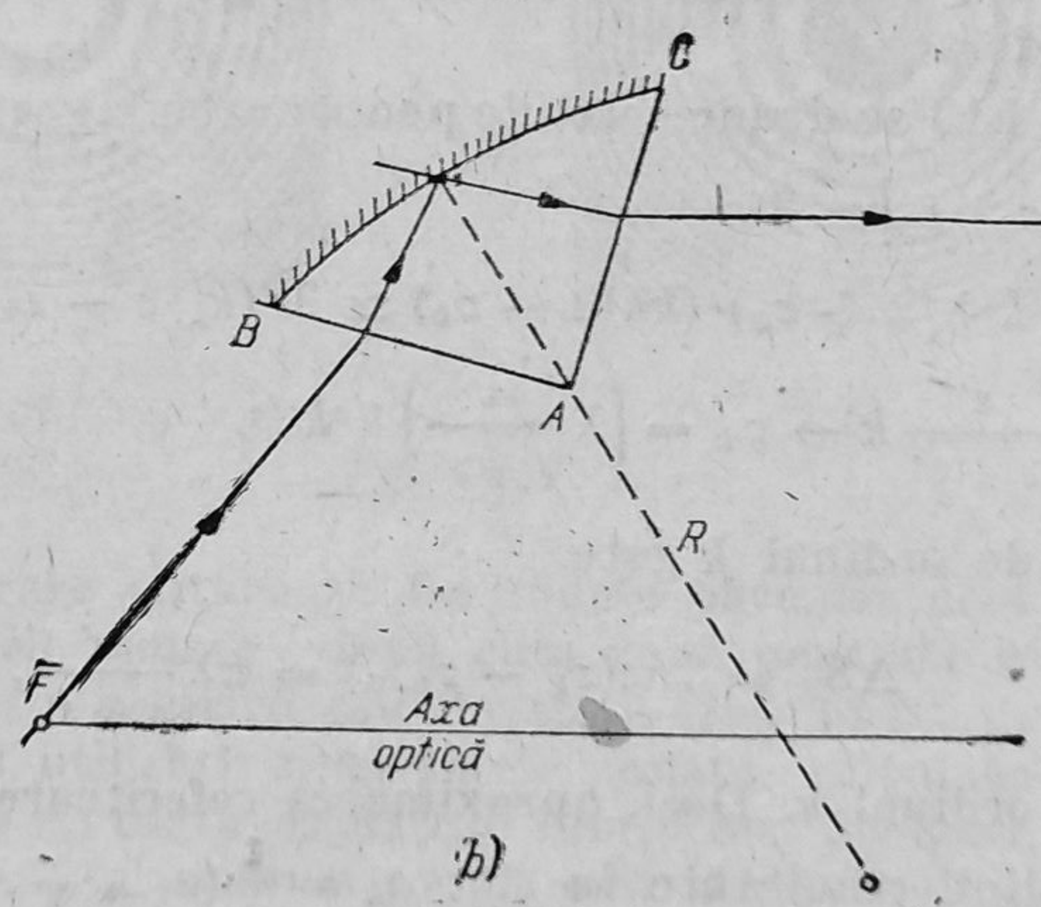
Fig. 14.17

Randamentul luminos al inelelor lentilei în trepte scade pe măsura depărtării de axa optică. Pentru unghiuri $\sigma_1 > 30°$ inelele dioptrice se înlocuiesc cu inele catadioptrice, care au un profil triunghiular (fig. 14.18, b); raza luminoasă suferă refracții prin fețele rectilinii, AB și CA și este reflectată pe fața curbilinie BC (arc de cerc).

Lentilele în trepte sînt utilizate la sistemele de iluminare în episcopie sau diascopie (retroproiectoare, aparate de proiecție, proiectoare de profile), la sistemele de concentrare a energiei luminoase pe celule solare, la sisteme de iluminare la distanță (faruri, proiectoare).



a)



b)

Fig. 14.18

14.5. Rețele zonate

Aplicînd principiul Huygens-Fresnel la studiul propagării luminii între punctele A și A', se consideră contribuția diferitelor zone circulare ale unei suprafețe echifaze Σ. Aceste zone, denumite zone Fresnel, se obțin prin inter-

secția suprafeței echifaze Σ cu sfere centrate în A' și distanțate cu $\lambda/2$ (fig. 14.19). În vederea evaluării amplitudinii oscilației luminoase rezultante în A', se admit mai multe aproximări:

— toate sursele secundare dintr-o anumită zonă emit raze care ajung în fază în punctul A'; două zone alăturate emit raze care sînt în opoziție de fază în punctul A';

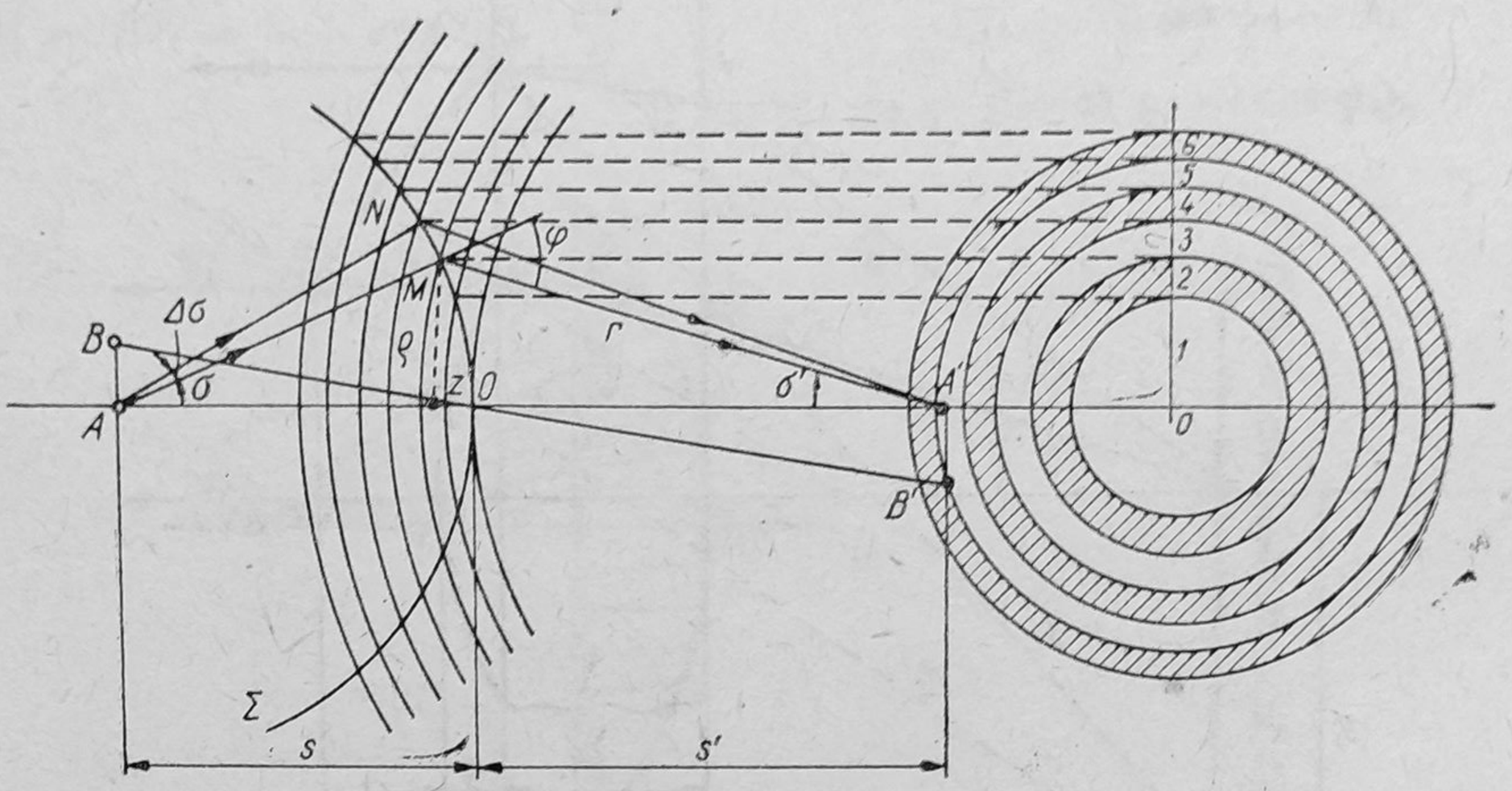


Fig. 14.19

— deoarece amplitudinile oscilațiilor luminoase care ajung în A' scad lent, cu cît φ este mai mare, se poate aproxima efectul unei anumite zone asupra amplitudinii rezultante în A' ca fiind media efectelor zonelor alăturate celei considerate.

Din figura 14.19 se deduc relațiile pentru calculul razei zonei de ordinul k

$$\rho_k^2 = (2s - z_k)\cdot z_k \simeq 2sz_k$$

$$\rho_k^2 = (2s' + k\cdot\lambda/2 + z_k)\cdot(k\lambda/2 - z_k) \simeq 2s'(k_\lambda/2 - z_k) \rightarrow$$

$$\rightarrow z_k = \frac{\lambda}{2}\frac{s'}{s+s'}k \rightarrow \rho_k = \left(\lambda\frac{ss'}{s+s'}\right)^{1/2}k^{1/2}. \qquad (14.25)$$

Aria zonei de ordinul k este

$$\Delta S_k = 2\pi s(z_k - z_{k-1}) = \pi\lambda\frac{ss'}{s+s'},$$

nedepinzînd de ordinul k. Deci, aproximarea referitoare la efectul unei zone asupra amplitudinii rezultante în A': $a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$, este justificată.

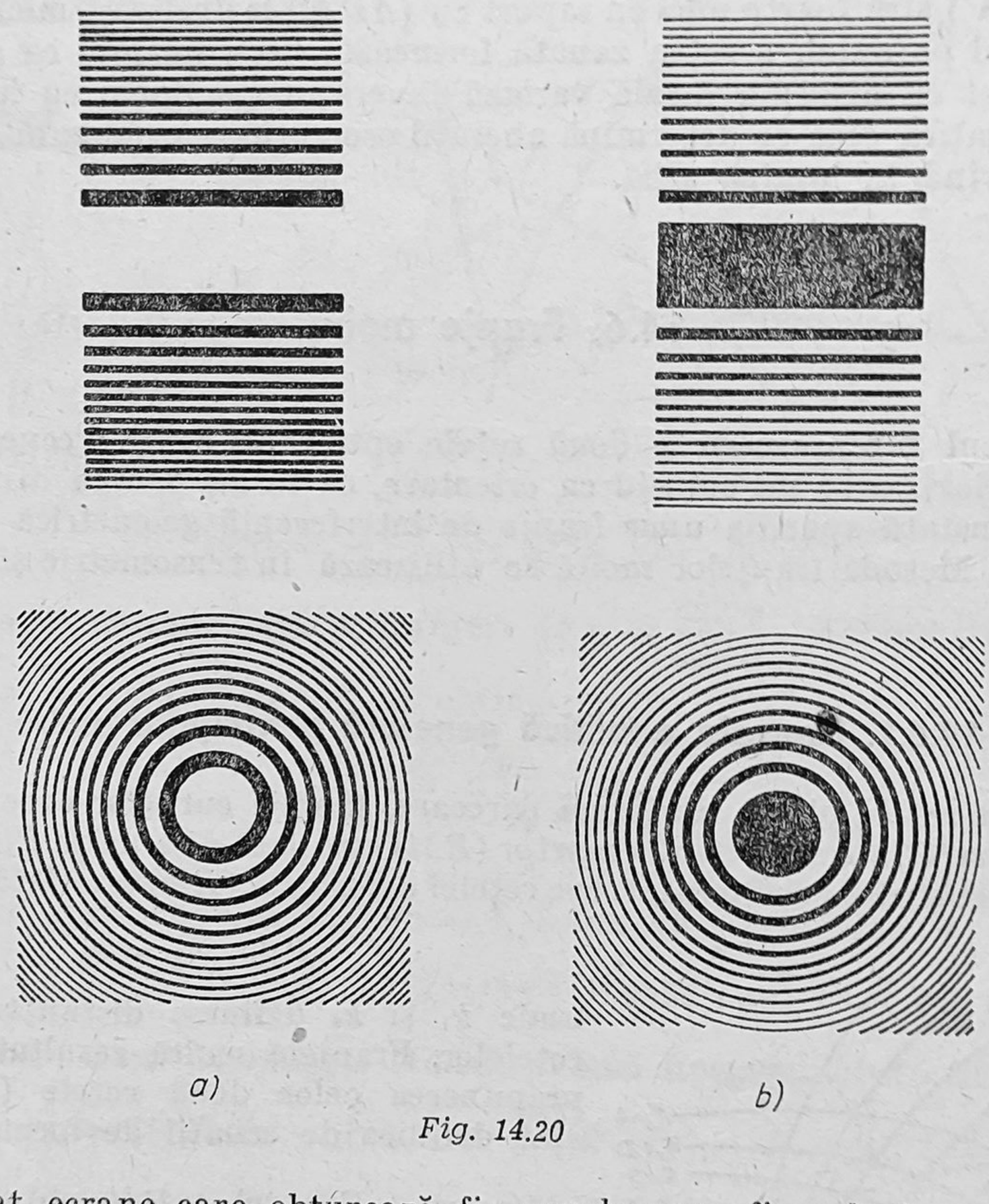
Amplitudinea luminoasă în A', ca urmare a suprapunerii efectelor a n zone Fresnel, este

$$a = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \pm a_n = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \ldots \pm \frac{a_n}{2} =$$

$$= \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_n}{2}.$$

Se poate observa că dacă suprafața echifază este neobturată, adică $a_n = 0$, rezultă amplitudinea $a = a_1/2$, jumătate din efectul produs în A' de prima zonă. În cazul plasării în O a unei diafragme de rază egală cu cea a primei zone $\rho_1 = [\lambda ss'/(s + s')]^{1/2}$ iluminarea din A' este de 4 ori mai mare decît în absența diafragmei.

Pornind de la observația că toate zonele pare produc în A' oscilații luminoase în opoziție de fază cu oscilațiile produse de zonele impare, s-au



a) b)

Fig. 14.20

confecționat ecrane care obturează fie zonele pare, fie cele impare. Aceste ecrane constituie rețele zonate: după cum zona centrală este transparentă sau opacă, rețeaua este pozitivă sau negativă (fig. 14.20, a, b).

Așadar, în cazul utilizării unei rețele zonate, calculate pentru distanțele $OA = s$; $OA' = s'$, toate oscilațiile luminoase produse de rețea ajung în fază în A', rezultînd o iluminare mult mai mare decît în absența rețelei zonate. Într-un punct axial oarecare diferit de A', amplitudinea rezultantă este practic nulă, deoarece oscilațiile luminoase provenind de la rețea prezintă toate fazele posibile; dar, în punctele axiale aflate la o distanță s' de rețea, pentru care raza unei zone Fresnel de ordin impar este egală cu raza primului inel al rețelei, se vor obține maxime ale amplitudinii luminoase

$$\lambda \cdot \frac{ss'}{s + s'}(2n + 1) = \rho_1^2 \rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1'} = \frac{(2n + 1)\lambda}{\rho_1^2}. \qquad (14.26)$$

Deci, se poate afirma că o rețea zonată acționează ca o lentilă cu focare multiple, cu distanță focală

$$f' = \frac{\rho_1^2}{(2n+1)\lambda} \tag{14.27}$$

Considerînd un punct-obiect B în vecinătatea lui A, rețeaua zonată va forma o imagine B' în vecinătatea lui A'. Într-adevăr variațiile drumului optic (AMA') sînt foarte mici în raport cu (AOA') la înclinări mici ale rețelei. În domeniul paraxial, o rețea zonată formează, deci, imagini ca și o lentilă. De remarcat că distanța focală variază invers proporțional cu lungimea de undă a radiației, ceea ce determină aberații cromatice considerabile ale rețelei zonate lucrînd în lumină albă.

14.6. Franje moiré

În cazul suprapunerii a două rețele optice de joasă frecvență (sau a imaginilor lor), care nu coincid ca orientare, ca formă sau ca distanță între linii, se constată apariția unor franje de interferență geometrică (mecanică) sau optică. Metoda franjelor moiré se utilizează în tensometrie și în metrologie.

14.6.1. Expresia analitică generală a franjelor moiré

Pentru rețele plane, de formă oarecare, familia curbelor care reprezintă rețeaua de referință sau rețeaua martor (RM) este dată de ecuația $F_1(x, y) = k_1$, iar familia curbelor corespunzătoare rețelei deformate (RD) este dată de ecuația

$$F_2(x, y) = k_2$$

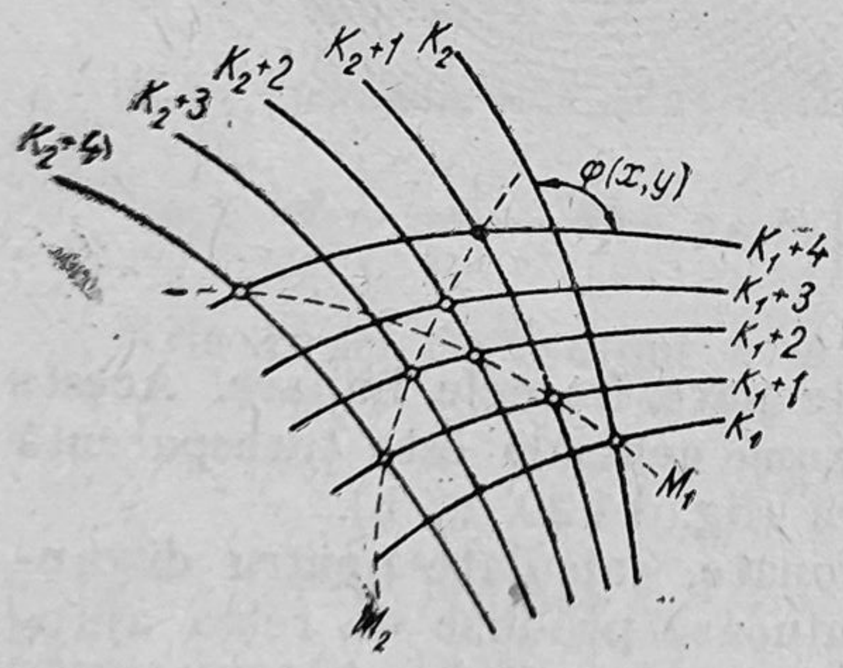


Fig. 14.21

unde k_1 și k_2 definesc distanțarea liniilor rețelelor. Franjele moiré rezultate din suprapunerea celor două rețele (fig. 14.21) sînt definite de ecuații de forma

$$M(x, y) = F_1(x, y) \pm F_2(x, y) = k_1 \pm k_2. \tag{14.28}$$

Diagonalele fiecărui patrulater curbiliniu corespund franjelor moiré care satisfac condițiile :

M_1 : $k_1 + k_2 = \text{const.}$, franje aditive

M_2 : $k_1 - k_2 = \text{const.}$, franje substractive.

Poziția relativă între două rețele, determinată de unghiul $\varphi(x, y)$, dă natura franjelor moiré ; franjele aditive și substractive se transformă unele în altele în zona numită de frontieră, care conține numai dreptunghiuri sau pătrate, liniile celor două rețele fiind perpendiculare între ele. Franjele moiré

efective (cele vizibile) sînt cele cu diagonala patrulaterului mai mică, ceea ce corespunde interfranjei mai mari. Pentru determinarea interfranjelor se consideră două franje substractive succesive (diagonalele a două patrulatere curbilinii alăturate reprezentate în figura 14.22). Înterfranja f_s se măsoară pe normala la franja de ecuație $M(x, y) = m$ și reprezintă proiecția segmentului $\overline{OM}$ pe această normală

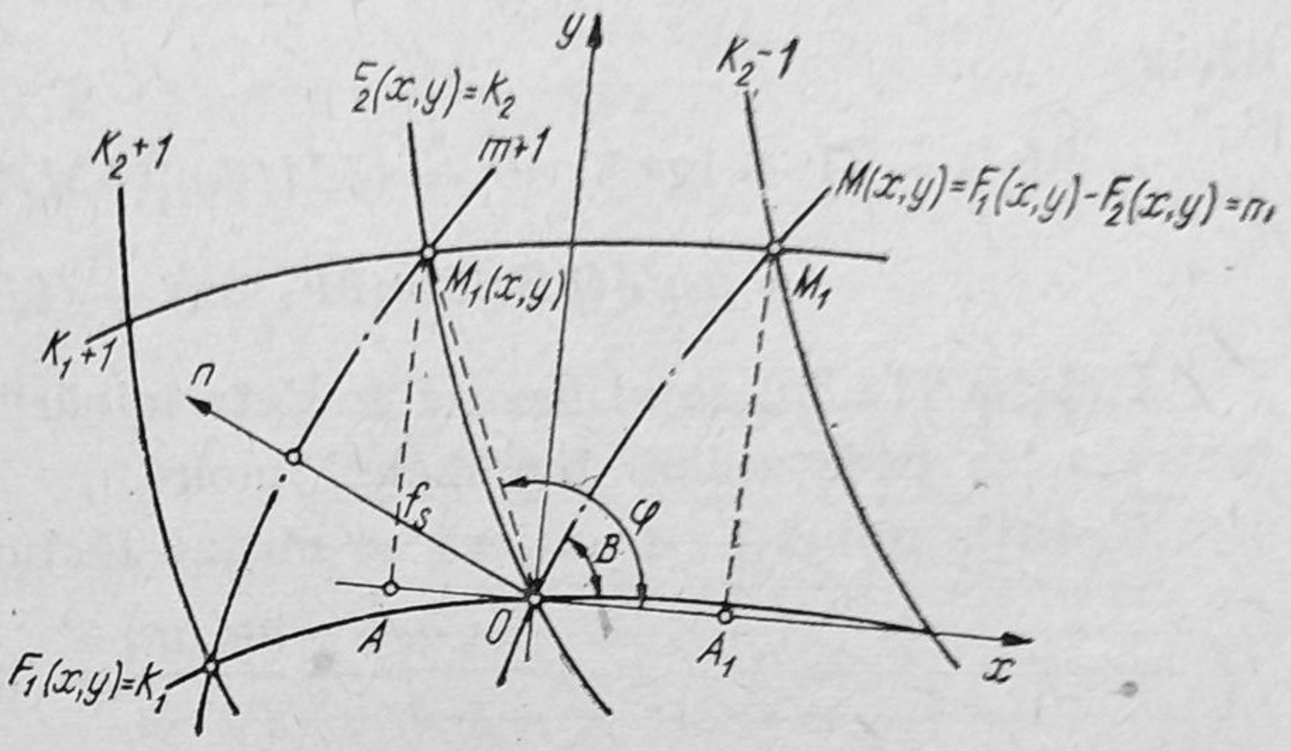


Fig. 14.22

$$f_s = \overline{OM} \sin(\varphi - \beta), \tag{14.29}$$

unde:

$$\overline{OM} = (\overline{AM}^2 + \overline{OA}^2)^{1/2} = [(\partial y/\partial m)^2 + (\partial x/\partial m)^2]^{1/2} \delta m;$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\partial M/\partial x}{\partial M/\partial y};\ M(x, y) - m = 0$$

este ecuația neexplicitată a franjei: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial y/\partial m}{\partial x/\partial m}$. Făcînd derivata în raport cu m a ecuației franjei, se obține relația

$$\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial m} + \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial m} = 1. \tag{14.30}$$

Înlocuind toate aceste relații în expresia (14.29) și ținînd seama că variația lui m este egală cu unitatea $\delta m = 1$, interfranja f_s devine

$$f_s = [(\partial M/\partial x)^2 + (\partial M/\partial y)^2]^{-1/2} \tag{14.31}$$

sau, ținînd seama de ecuația (14.28) pentru franjele substractive,

$$f_s = [(\partial F_1/\partial x - \partial F_2/\partial x)^2 + (\partial F_1/\partial y - \partial F_2/\partial y)^2]^{-1/2}. \tag{14.32}$$

Analog se determină interfranja pentru franjele aditive, care are expresia

$$f_a = [(\partial F_1/\partial x + \partial F_2/\partial x)^2 + (\partial F_1/\partial y + \partial F_2/\partial y)^2]^{-1/2}. \tag{14.33}$$

Egalitatea interfranjelor dă ecuația parametrică a zonei de frontieră. Condiția de vizibilitate pentru franjele substractive este $f_s > f_a$.

Interfranjele date de relația (14.32) și (14.33) pot fi privite din punct de vedere matematic ca pași ai unor familii de curbe $M(x, y) = m$. Aplicînd același raționament pentru familiile de curbe $F_1(x, y) = k_1$ și $F_2(x, y) = k_2$ se determină pașii pentru rețeaua martor și pentru rețeaua deformată

$$p_1 = [(\partial F_1/\partial x)^2 + (\partial F_1/\partial y)^2]^{-1/2};\quad p_2 = [\partial F_2/\partial x)^2 + (\partial F_2/\partial y)^2]^{-1/2}. \tag{14.34}$$

Eliminînd derivatele parțiale între relațiile (14.32), (14.33) și (14.34) rezultă expresia generală a interfranjei în funcție de pașii rețelelor și de înclinarea φ între ele

$$f = p_1 p_2 [p_1^2 + p_2^2 \pm 2 p_1 p_2 \cos \beta]^{-1/2} \tag{14.35}$$

unde

$$\cos \beta = (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)^{-1/2} = (\partial M/\partial y)[(\partial M/\partial x)^2 + (\partial M/\partial y)^2]^{-1/2} =$$

$$= p_1 p_2 [(\partial F_1/\partial x)(\partial F_2/\partial x) + (\partial F_1/\partial y)(\partial F_2/\partial y)].$$

Relația (14.35) se utilizează în determinările tensometrice și în metodele metrologice care aplică fenomenul moiré.

Ecuația zonei de frontieră se obține făcînd $\cos \beta = 0$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y} = 0. \tag{14.36}$$

14.6.2. Franje moiré în cazuri particulare

a) *Rețele identice de linii paralele echidistante*, înclinate cu un unghi φ. În acest caz, ecuațiile rețelelor sînt

$$F_1(x, y) \equiv y/p = k_1$$

$$F_2(x, y) \equiv (y \cos \varphi - x \sin \varphi)/p = k_2. \tag{14.37}$$

Franjele substractive sînt date de familia de curbe

$$M(x, y) = F_1 - F_2 = \frac{1}{p}[y(1 - \cos \varphi) + x \sin \varphi] = m. \tag{14.38}$$

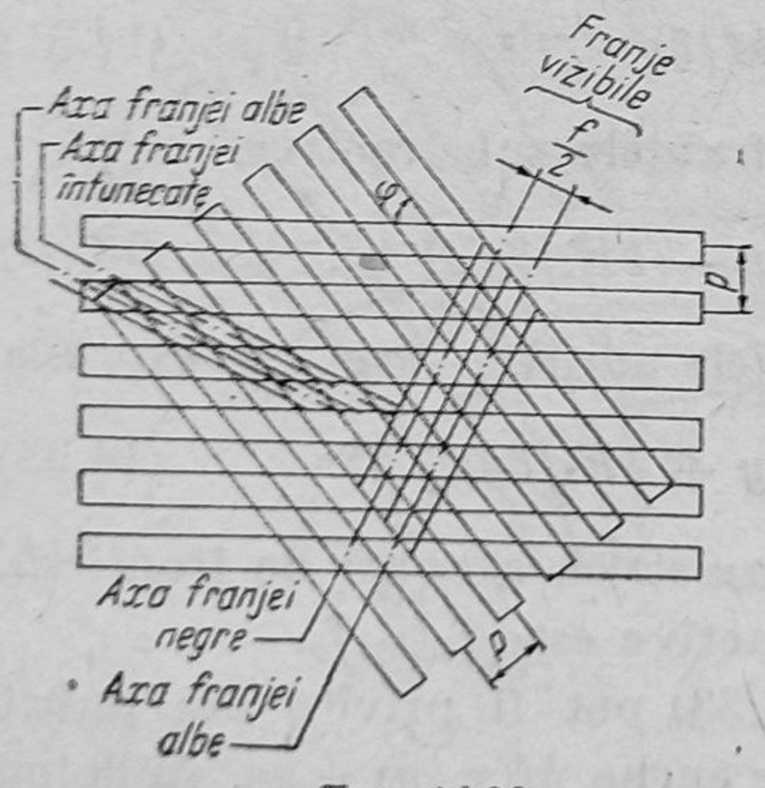


Fig. 14.23

Așadar, franjele moiré formează o familie de drepte paralele avînd înclinarea față de rețeaua martor paralelă cu axa Ox

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \tag{14.39}$$

adică sînt perpendiculare pe bisectoarea unghiului φ (fig. 14.23).

Valoarea interfranjei este conform relației (14.35)

$$f = \frac{p}{2 \sin \varphi/2}.$$

b) *Rețele radiale identice*, caracterizate de pasul unghiular α și aflate la distanța $2a$. Ecuațiile rețelelor sînt

$$F_1(x,\ y) \equiv \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{x+a} = k_1$$

$$F_2(x,\ y) \equiv \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{x-a} = k_2 \tag{14.40}$$

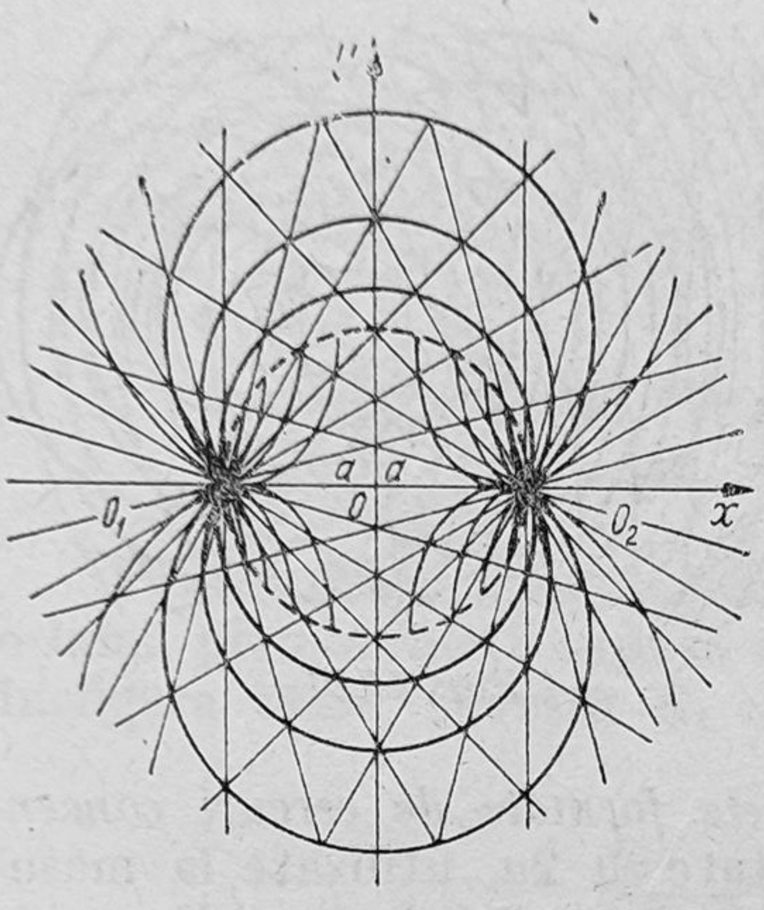


Fig. 14.24

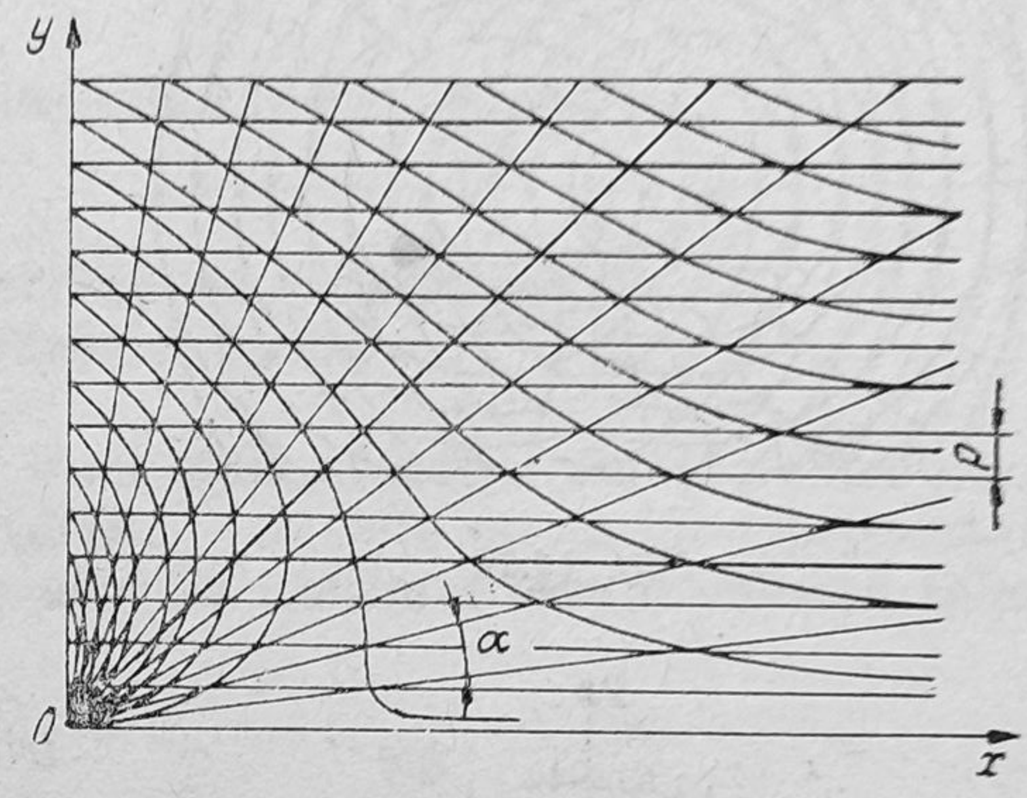


Fig. 14.25

Franjele moiré substractive sînt definite analitic de ecuația

$$M_s(x,\ y) \equiv \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a}\right) = k_1 - k_2. \tag{14.41}$$

Aceasta reprezintă o familie de cercuri cu centrele pe axa Oy și care trec prin O_1 și O_2 (fig. 14.24). Franjele aditive date de ecuația

$$M_a(x,\ y) \equiv \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x+a} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a}\right) = k_1 + k_2 \tag{14.42}$$

reprezintă o familie de hiperbole.

Introducînd derivatele parțiale ale funcțiilor (14.40) în relația (14.36) se obține ecuația zonei de frontieră : $x^2 + y^2 = a^2$, ceea ce reprezintă un cerc de diametru O_1O_2 ; în interiorul cercului sînt vizibile franjele aditive, iar în exteriorul său franjele substractive.

c) *Suprapunerea unei rețele de linii paralele echidistante cu o rețea radială cu pas unghiular* α. Ecuațiile rețelelor sînt în acest caz

$$F_1(x,\ y) \equiv y/p = k_1$$

$$F_2(x,\ u) \equiv \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = k_2. \tag{14.43}$$

Înlocuind derivatele parțiale în relația (14.36) se obține ecuația liniei de frontieră $x = 0$, adică axa Oy ; la dreapta apar franjele substractive (fig. 14.25),

iar în stînga cele aditive. Ecuaţiile familiilor de franje sînt date de relaţiile:

$$M_s(x, y) \equiv \frac{y}{p} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = k_1 - k_2 \tag{14.44}$$

$$M_a(x, y) \equiv \frac{y}{p} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = k_1 + k_2.$$

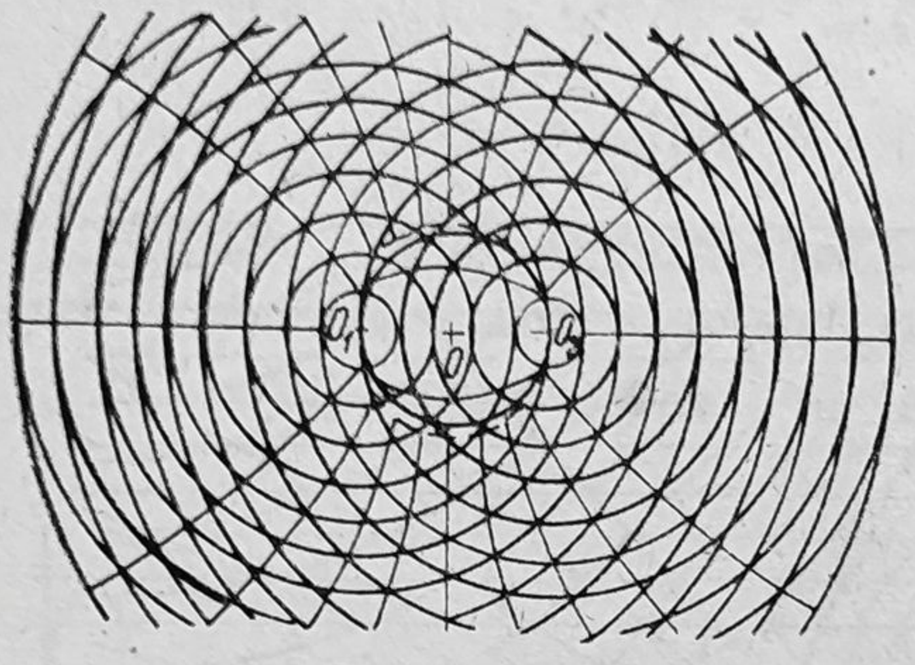


Fig. 14.26

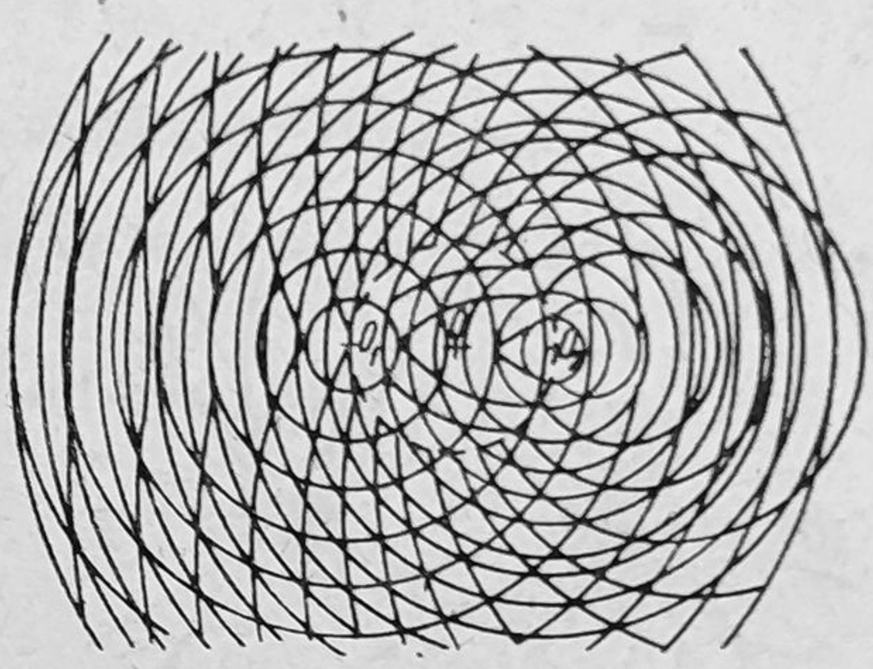


Fig. 14.27

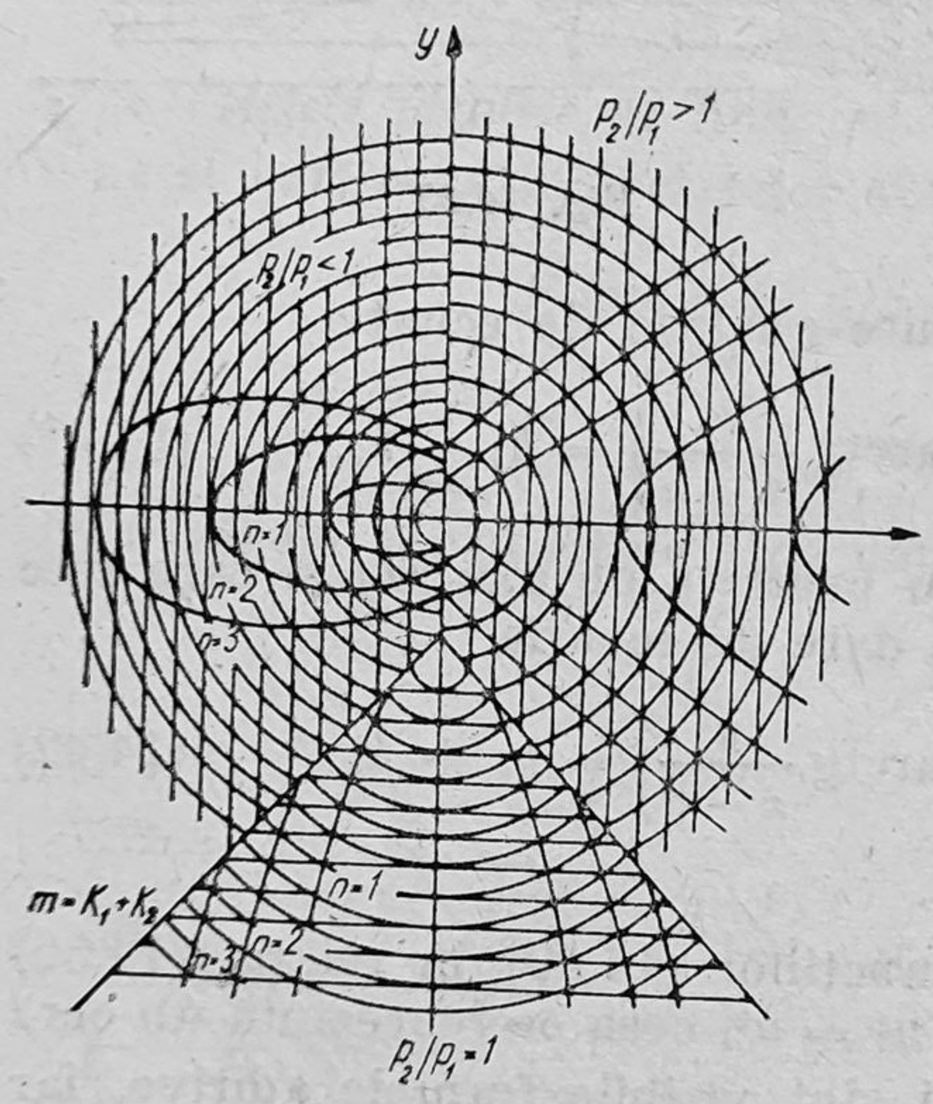


Fig. 14.28

d) *Reţele formate de cercuri concentrice*, depărtate cu $2a$, utilizate la măsurarea micilor deplasări liniare. Ecuaţiile reţelelor sînt

$$F_1(x, y) \equiv \frac{1}{p_1}[(x + a)^2 + y^2]^{1/2} = k_1$$

$$F_2(x, y) \equiv \frac{1}{p_2}[(x - a)^2 + y^2]^{1/2} = k_2. \tag{14.45}$$

Înlocuind derivatele parţiale ale acestor funcţii în relaţia (14.36) se obţine ecuaţia zonei de frontieră (cerc de diametru O_1O_2): $x^2 + y^2 = a^2$. Dacă $p_1 = p_2$ (fig. 14.26) în interiorul zonei de frontieră franjele moiré sînt elipse, iar în exterior hiperbole.

În figura 14.27 sînt reprezentate schematic franjele moiré în cazul suprapunerii a două reţele circulare cu pasul diferit.

e) *Reţea de linii paralele echidistante suprapuse unei reţele circulare* (fig. 14.28). Ecuaţiile familiilor de curbe care formează reţelele sînt următoarele

$$F_1(x, y) \equiv \frac{y}{p_1} = k_1$$

$$F_2(x, y) \equiv \frac{x^2 + y^2}{p_2} = k_2. \tag{14.46}$$

Ecuația zonei de frontieră se obține introducînd derivatele parțiale ale funcțiilor F_1 și F_2 în relația (14.36), rezultînd : $y = 0$ (axa Ox) : deasupra axei Ox sînt vizibile franjele substractive care formează familia de curbe

$$M_1(x,\ y) \equiv \frac{1}{p_2}(x^2 + y^2)^{1/2} - \frac{y}{p_1} = k_2 - k_1$$

iar sub axa Ox sînt vizibile franjele aditive

$$M_2(x,\ y) \equiv \frac{1}{p_2}(x^2 + y^2)^{1/2} + \frac{y}{p_1} = k_2 + k_1.$$

Aspectul franjelor (fig. 14.28) depinde de raportul p_2/p_1.

14.6.3. Montaje specifice de măsurare cu ajutorul franjelor moiré

Pentru determinarea deformațiilor unui model transparent (de exemplu : o lamă plan-paralelă supusă unor eforturi) se folosește montajul reprezentat în figura 14.29. O rețea R_1 cu aproximativ 20 linii/mm este iluminată tele-

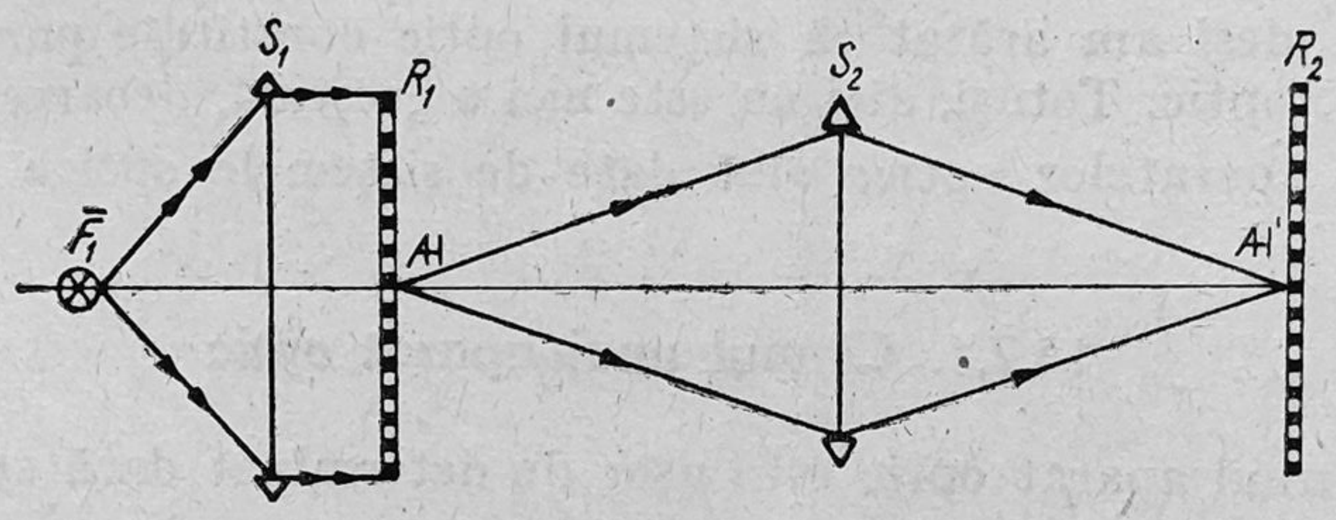


Fig. 14.29

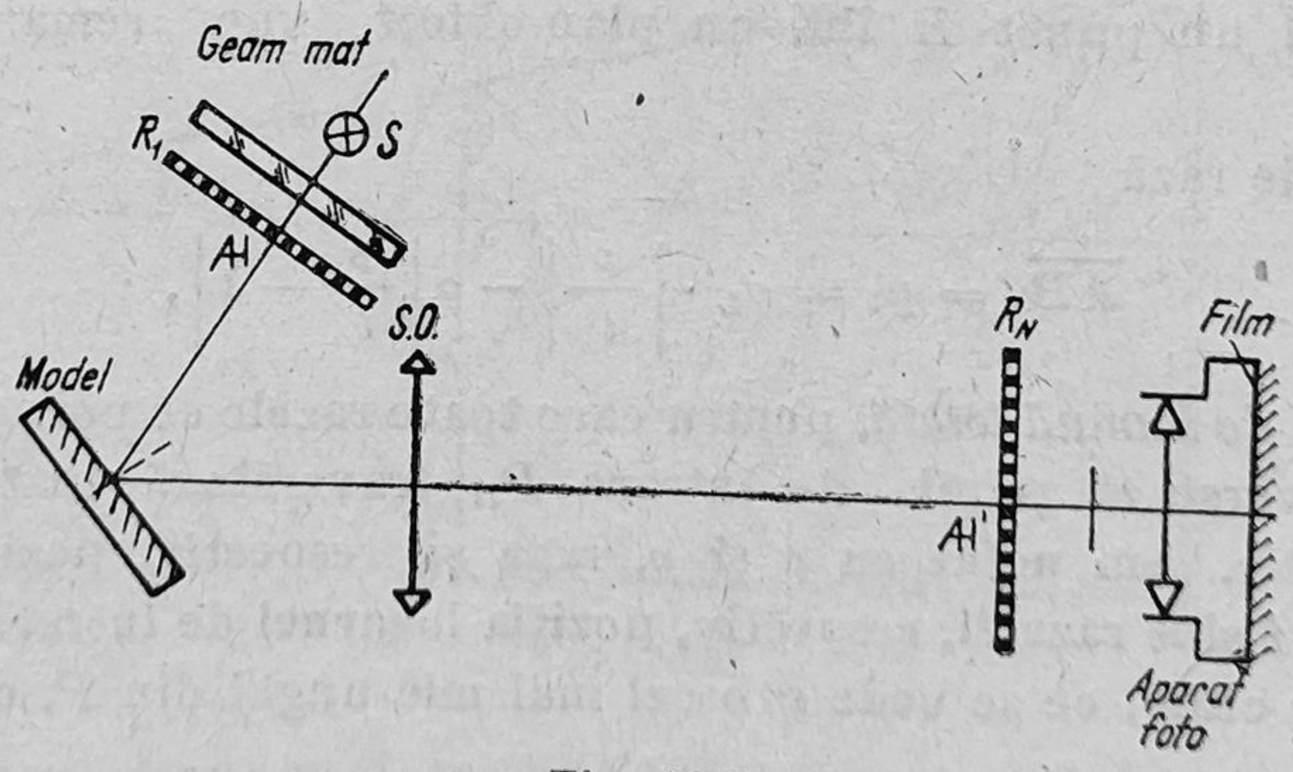


Fig. 14,30

centric prin sistemul de iluminare S_1 care are în focar sursa punctiformă S. Sistemul optic de proiecție S_2 formează imaginea rețelei R_1 peste rețeaua martor R_2. Modelul studiat este plasat între R_1 și S_2 ; dacă modelul prezintă deformații, în planul de observare (R_3) apar franje moiré datorate suprapunerii imaginii deformate a rețelei R_1 peste rețeaua martor R_2.

Pentru ca imaginea rețelei R_1 să prezinte același pas ca și rețeaua martor R_2, cele două rețele se plasează în planele conjugate antiprincipale ale sistemului optic S_2, pentru care mărirea transversală $|\beta| = 1$. Un montaj asemănător, dar care lucrează prin reflexie, este prezentat în figura 14.30.

14.7. Proprietățile generale ale aparatelor optice

Aparatele optice destinate să formeze o imagine observabilă cu ochiul sau o imagine reală (pe un suport fotosensibil, pe un ecran, sau pe un oricare alt receptor) sînt caracterizate în primul rînd de regiunea din spațiu pentru care aparatul respectiv poate furniza imagine, adică de cîmpul aparatului; apoi, de mărimea imaginii date de aparat determinată de grosismentul și puterea aparatului; de asemenea, de luminozitatea imaginii, determinată de claritatea sistemului optic; de puterea separatoare, dar această calitate a aparatelor optice nu poate fi studiată convenabil decît după studierea structurii imaginii, ori aceasta este determinată de legile difracției; în sfîrșit, de profunzimea spațiului obiect.

Observație: am utilizat aici noțiunea de aparat optic alături de cea de sistem optic, deși am arătat că sistemul optic constituie partea principală a unui aparat optic. Totuși, aici nu este nici o greșeală, deoarece proprietățile generale ale aparatelor optice sînt date de sistemele optice respective.

14.7.1. Cîmpul unui aparat optic

Cîmpul unui aparat optic este ușor de determinat dacă se cunosc toate imaginile diferitelor diafragme.

Deplasînd un punct B într-un plan-obiect, vom remarca trei zone (fig. 14.31):

a) cercul de rază

$$\overline{AB_1} = y_1 = \rho_L \cdot \left| \frac{p}{l} \right| - \rho \left| \frac{p}{l} - 1 \right|, \qquad (14.47)$$

denumit *cîmp de lumină totală*, pentru care toate razele ce pornesc din planul-obiect și traversează pupila de intrare P_i, traversează toate diafragmele sistemului optic. Am notat cu ρ și p, raza și, respectiv, poziția pupilei de intrare; ρ_L și l sînt raza și, respectiv, poziția lucarnei de intrare L_i (imaginea diafragmei de cîmp, ce se vede sub cel mai mic unghi din P, centrul pupilei de intrare).

b) zona cuprinsă între cercul de rază $\overline{AB_1}$ și cercul de rază

$$\overline{\overline{AB_2}} = y_2 = \rho_L \cdot \left| \frac{p}{l} \right|, \qquad (14.48)$$

denumită *cîmp mediu* pentru care fasciculul luminos conic cu vîrful în această zonă și delimitat de P_i este parțial obturat de lucarna de intrare;

c) zona cuprinsă între cercul de rază AB_2 și cercul de rază

$$\overline{AB_3} = y_3 = \rho_L \left| \frac{p}{l} \right| + \rho \cdot \left| \frac{p}{l} - 1 \right|, \tag{14.49}$$

denumită *cîmp de contur*, caracterizată printr-o obturare importantă (peste jumătate) a fasciculului luminos cu vîrful într-un punct din cîmpul de contur

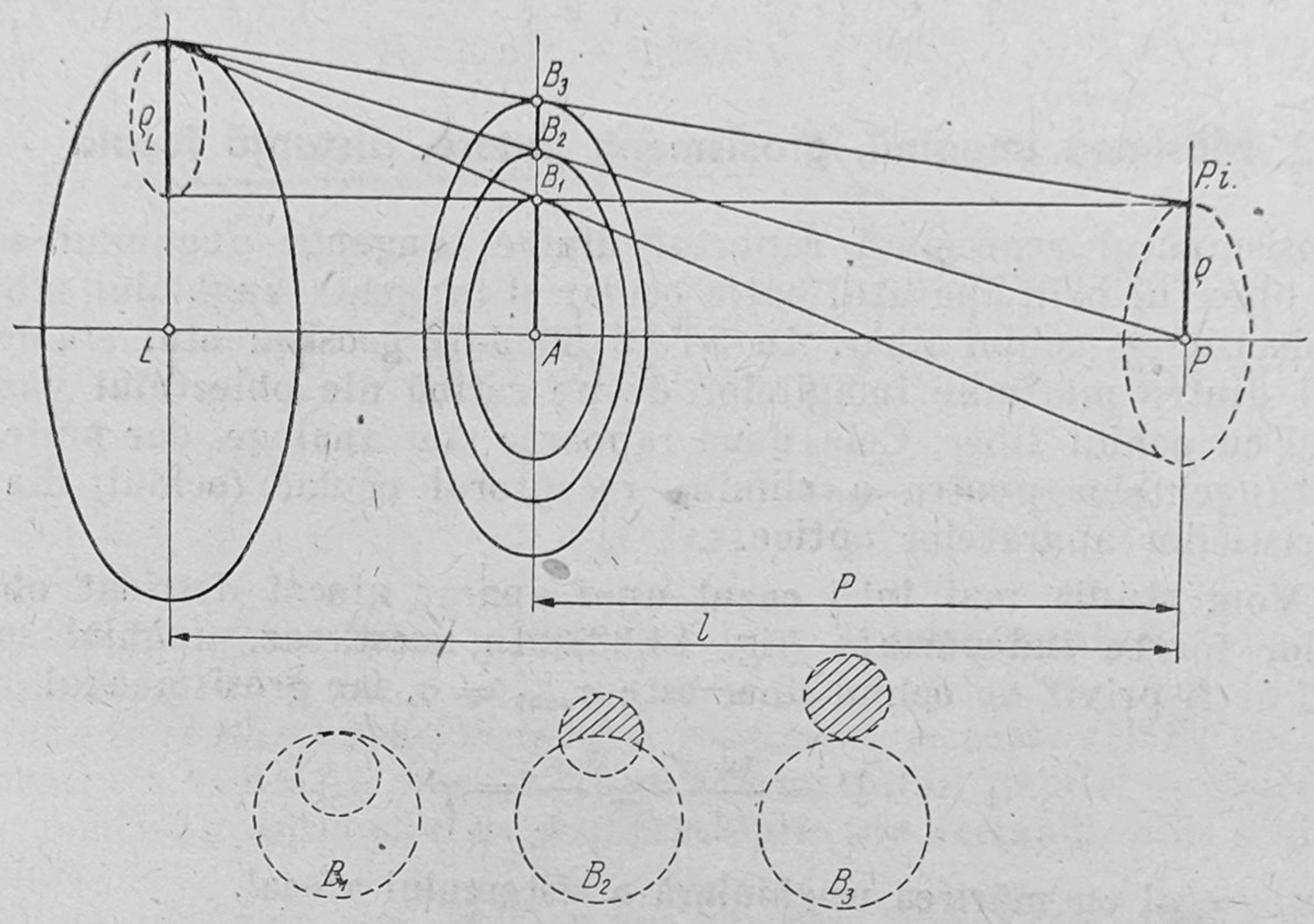


Fig. 14.31

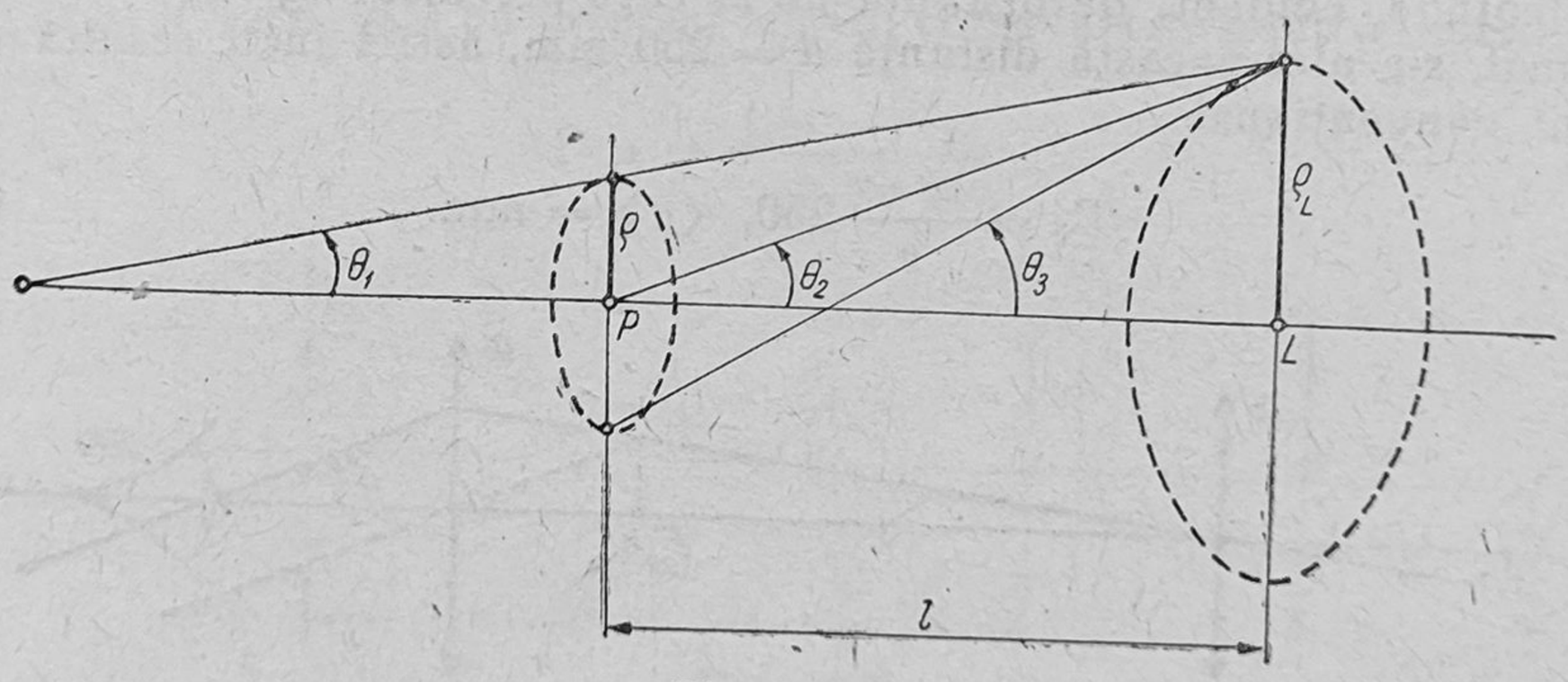


Fig. 14.32

și delimitat de P_i. În general, se evită utilizarea cîmpului de contur, datorită luminozității prea reduse. Pentru aparatele optice utilizate la observarea nocturnă se utilizează numai cîmpul de lumină totală.

Bineînțeles că relațiile (14.47), (14.48), (14.49) se pot folosi pentru poziționarea diafragmelor încă din prima etapă a proiectării unui sistem optic, astfel încît să se obțină un anumit cîmp-obiect dat prin temă. Dar, în cele mai multe cazuri mărimile și pozițiile diafragmelor sînt impuse de condițiile

de corectare a aberațiilor geometrice. Relațiile (14.47), (14.48), (14.49) pot fi modificate, relativ ușor, pentru cazurile în care pupila de intrare, planul obiect sau lucarna de intrare se află la infinit. În cazul în care planul obiect este situat la infinit (fig. 14.32), cîmpul unghiular al aparatului este delimitat în trei zone de relațiile:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \left|\frac{\rho_L - \rho}{l}\right|;\ \operatorname{tg}\theta_2 = \left|\frac{\rho_L}{\rho}\right|;\ \operatorname{tg}\theta_3 = \left|\frac{\rho_L + \rho}{l}\right|. \qquad (14.50)$$

14.7.2. **Mărimea imaginii, grosisment, putere, distanță focală**

Grosismentul reprezintă raportul dintre tangenta unghiului sub care se vede obiectul prin aparatul optic ocular și tangenta unghiului sub care se vede obiectul cu ochiul liber. În STAS 3003-67 grosismentul era definit ca raportul dintre mărimile imaginilor de pe retină ale obiectului văzut prin sistem și cu ochiul liber. Cele două rapoarte sînt analoge, dar preferăm raportul tangentelor pentru a elimina receptorul ocular (ochiul) din studiul caracteristicilor aparatelor optice.

a) Vom studia mai întîi cazul unui aparat afocal destinat observării obiectelor foarte îndepărtate (fig. 14.33). În acest caz, unghiul sub care obiectul ar fi privit de ochiul liber este $\sigma_{ochi} = \sigma$, iar grosismentul

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg}\sigma'}{\operatorname{tg}\sigma} \simeq \frac{\sigma'}{\sigma} = \gamma \qquad (14.51)$$

adică este egal cu mărirea unghiulară a sistemului afocal.

b) În cazul unui aparat optic destinat pentru observarea obiectelor mici și apropiate (lupă, microscop), unghiul sub care se vede obiectul cu ochiul liber depinde, evident, de distanța de la care privește: $\operatorname{tg}\sigma_{ochi} = y/d$. Convențional, s-a ales această distanță $d = 250$ mm, astfel încît rezultă un grosisment convențional

$$\Gamma_c = \frac{\operatorname{tg}\sigma'}{y}\,250,\ \langle y\rangle = \text{mm}. \qquad (14.52)$$

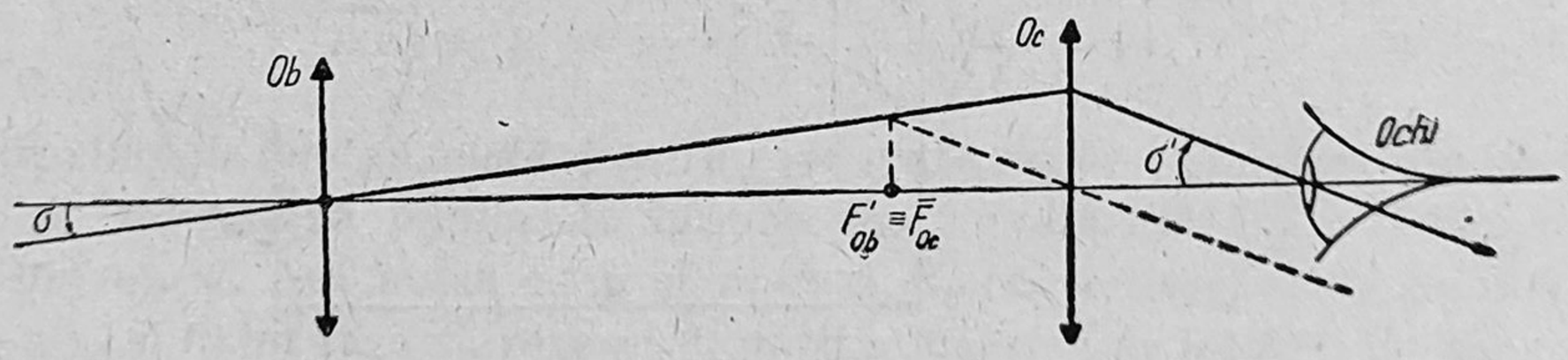


Fig. 14.33

Pentru a evita această convenție, în locul grosismentului putem caracteriza aparatul optic cu puterea sa, definită prin raportul $P = \sigma'/y$ (unghiul sub care se vede unitatea de lungime a obiectului). În reprezentarea din figura 14.34 se poate observa că pentru unghiuri σ' mici

$$\sigma' = y/f' = y\varphi' \qquad (14.53)$$

unde φ' reprezintă puterea dioptrică *(convergența)* sistemului optic $\varphi' = 1/f'$, de unde rezultă puterea aparatului optic

$$P = \frac{\sigma'}{y} = \varphi'. \tag{14.54}$$

Puterea se măsoară în dioptrii. Dacă se consideră $\sigma' \approx \operatorname{tg} \sigma'$, legătura între putere și grosisment apare imediat

$$\Gamma_c = dP = 0{,}25P = P/4 \tag{14.55}$$

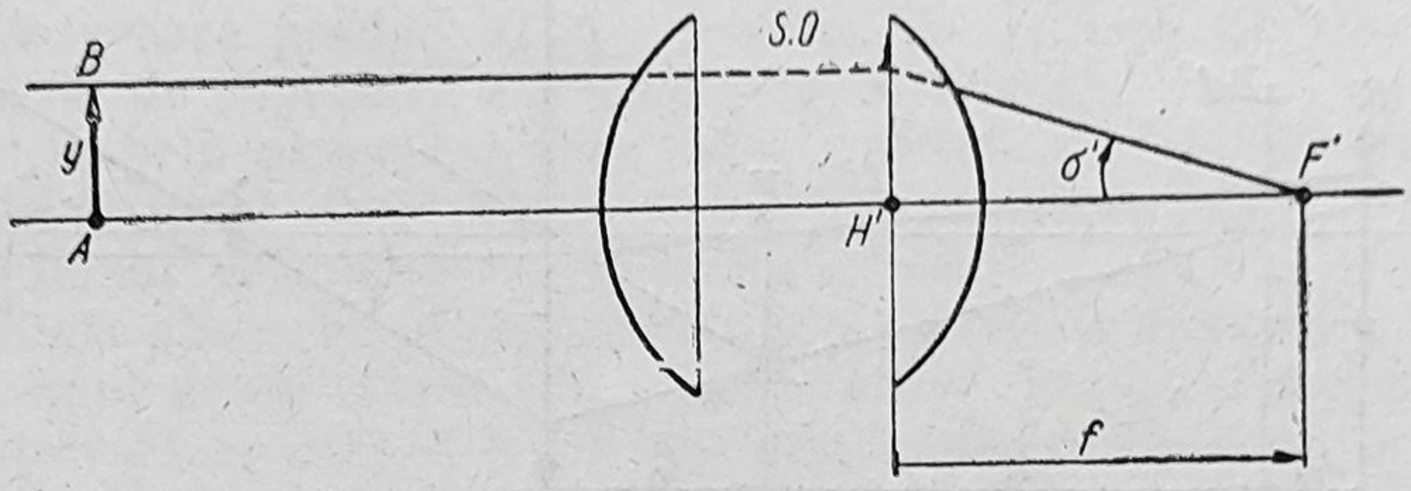


Fig. 14.34

unde $d = 0{,}25$ m, deoarece 1 dpt $= 1$ m^{-1}, grosismentul fiind o mărime adimensională.

Relația între raza pupilei de ieșire și grosisment. Această relație este importantă pentru a cunoaște variația razei (diametrului) pupilei de ieșire atunci cînd se modifică grosismentul unui aparat optic (de exemplu, prin schimbarea ocularului).

a) Vom considera mai întîi un aparat optic afocal (fig. 14.35). În acest caz, am arătat că grosismentul este egal cu mărirea unghiulară, care, în cazul în care indicii de refracție ai mediilor extreme sînt egali cu unitatea (sistemul se află în aer), este egală cu inversul măririi transversale pentru reprezentarea pupilelor

$$\Gamma = \gamma = \frac{1}{\beta} = \frac{\rho}{\rho}. \tag{14.56}$$

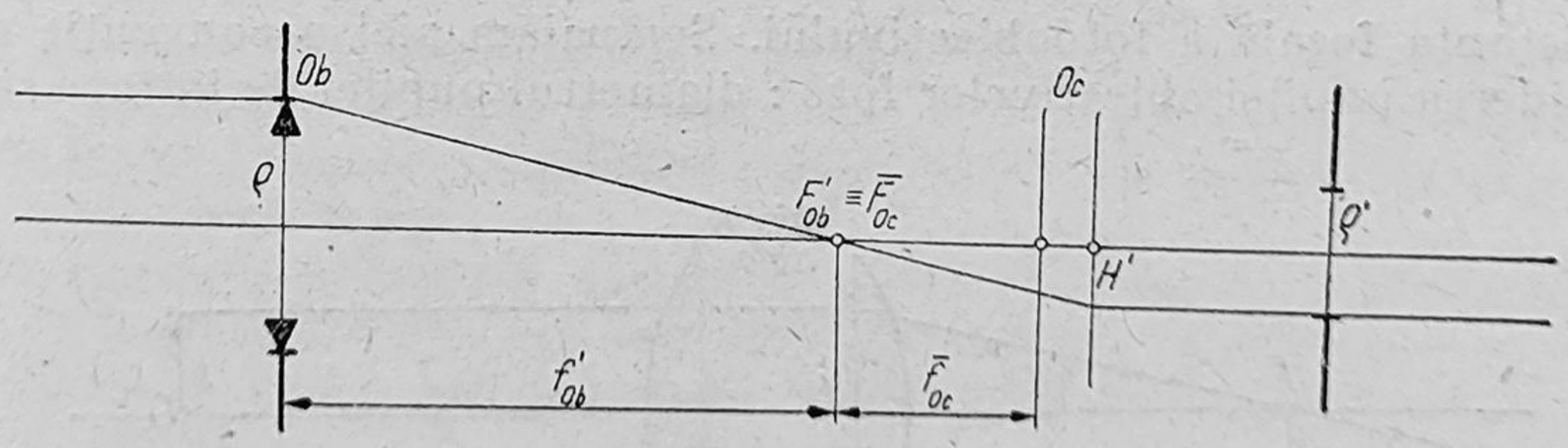


Fig. 14.35

Această relație, ca și $\Gamma = f'_{OB}/f'_{OC}$, permite determinarea grosismentului, dar și determinarea mărimii pupilei de ieșire

$$\rho' = \frac{\rho}{\Gamma} \tag{14.57}$$

care trebuie să fie aproximativ egală cu pupila de intrare a ochiului (raza acesteia $\rho_{ochi} = 1 \div 4$ mm).

b) În cazul aparatului optic focal, care are planul obiect la distanță finită (de exemplu, microscopul reprezentat în figura 14.36), vom considera condiția sinusurilor (13.177) scrisă pentru cazul cînd imaginea este situată la infinit : $ny \sin \sigma = -n' \cdot h' \cdot \sigma'_p$. Cum $n' = 1$, iar $h' = \rho'$ (reprezintă chiar raza pupilei de ieșire), rezultă

$$\rho' = -\frac{ny \sin \sigma}{\sigma'} = -\frac{A}{P} \tag{14.58}$$

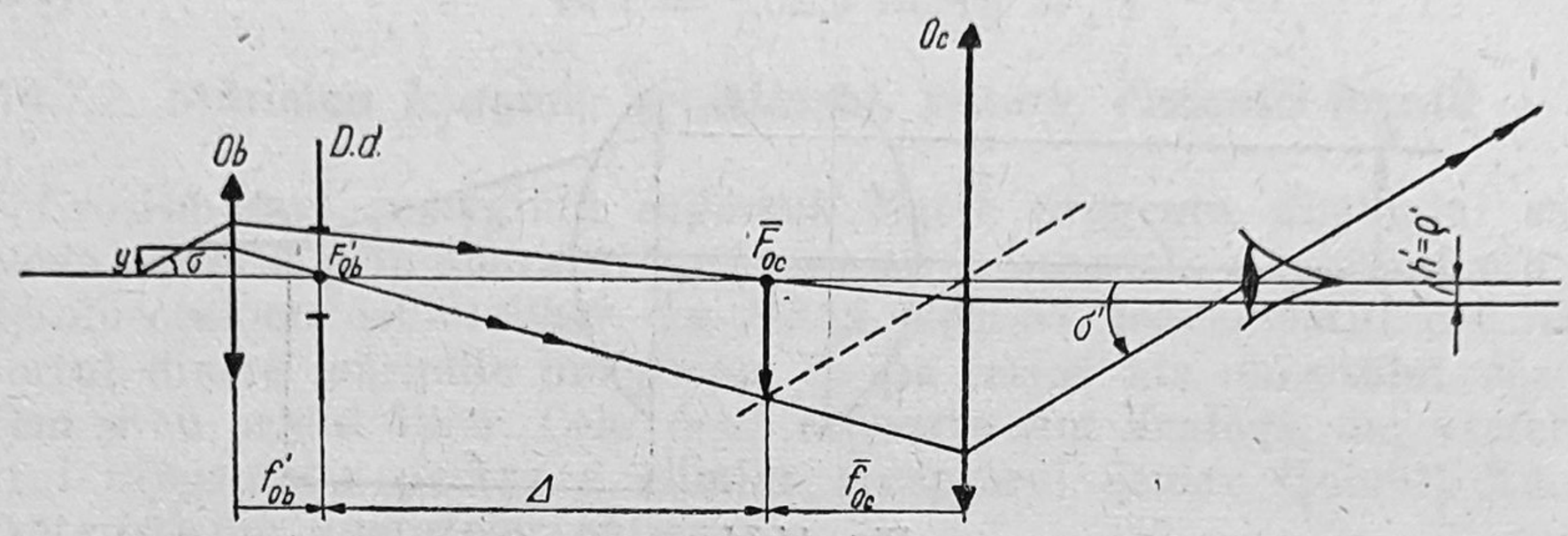


Fig. 14.36

unde $\sigma'_p / y = P$, iar $n \sin \sigma = A$ este apertura numerică a obiectivului de microscop. Se observă că, în acest caz, raza pupilei de intrare se exprimă mai ușor în funcție de puterea aparatului optic.

c) În cazul obiectivelor fotografice și de proiecție, imaginea fiind reală, mărimea ei poate fi caracterizată prin mărirea transversală $\beta = y'/y$ (la obiectivele de proiecție) sau prin raportul y'/σ (la obiectivele foto).

În cazul obiectivelor foto (fig. 14.37), se observă că, pentru unghiuri mici, $\sigma \simeq \operatorname{tg} \sigma = y'/f$, așadar raportul care caracterizează mărimea imaginii date de un obiectiv foto este

$$\left| \frac{y'}{\sigma} \right| = |\bar{f}| = f' \tag{14.59}$$

adică distanța focală a fotoobiectivului. Semnalăm aici o convenție relativă la deschiderea pupilei obiectivelor foto : diametrul pupilei de intrare se caracterizează prin raportul dintre distanța focală și diametrul maxim al pupilei de intrare : $N = f'/2\rho$, denumit și *număr de apertură* (se indică pe montura obiectivului prin 1 : 15, adică inversul acestui număr, care reprezintă deschiderea relativă maximă $k = 1 : N = 2\rho/f'$). Dacă se aplică condiția Abbe

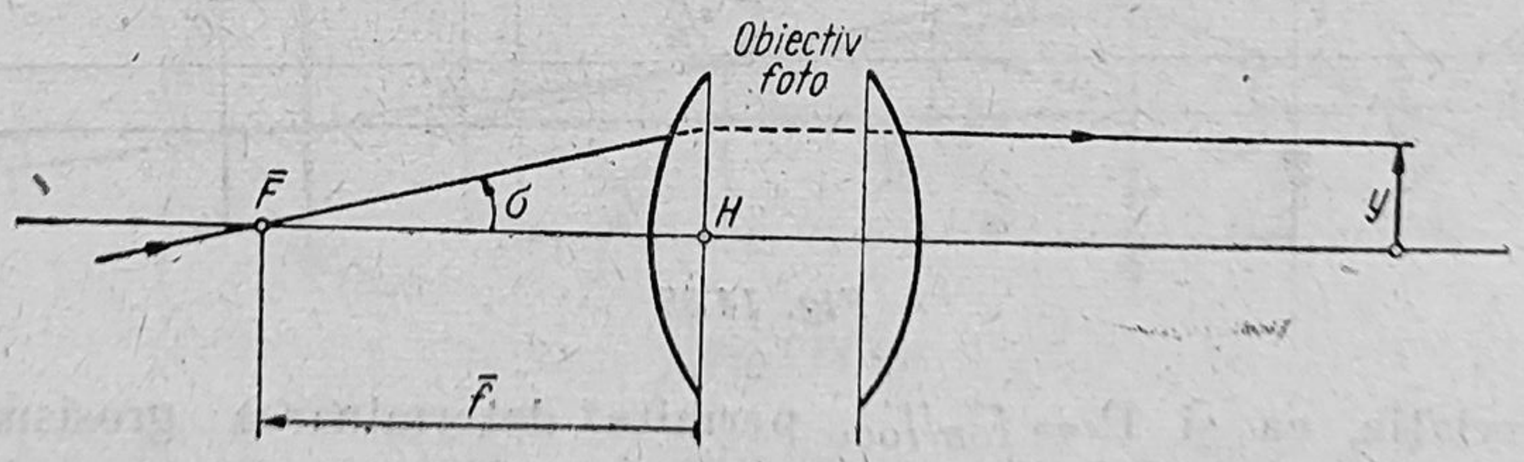


Fig. 14.37

obiectivului foto, făcînd $n = n' = 1$ și $h = \rho$, se obține: $-\rho\sigma = y' \sin \sigma'$, de unde, ținînd seama de (14.59), rezultă

$$\sin \sigma' = -\frac{\rho\sigma}{y'} = \frac{\rho}{f'} = \frac{1}{2N} = \frac{k}{2}; \quad N = (2 \sin \sigma')^{-1}. \tag{14.60}$$

14.7.3. Claritatea geometrică

În evaluarea luminozității imaginii date de un sistem optic nu vom lua în considerație pierderile de flux luminos. Totuși, vom menționa cele două cauze principale care produc aceste pierderi (în ipoteza că sistemul optic verifică condiția de conectare a tuburilor luminoase):

— Pierderi prin absorbție, absorbția relativă a mediului optiç (sticlă optică sau alt material) fiind $d\Phi/\Phi = -kdz$; rezultă că pentru o grosime d de material fluxul rezultant va avea valoarea $\Phi = \Phi_0 \exp(-kd)$. Sticla optică de calitate absoarbe în general 1% din flux pe o distanță $d = 10$ mm, avînd coeficientul de absorbție $k \simeq 1/1000$ mm^{-1}. Există și sorturi de sticlă foarte transparentă la care $k = 1/2\,000$ mm^{-1}, pierderile fiind la jumătate. Bineînțeles că acești coeficienți, care determină legea de variație exponențială a fluxului luminos, au valori diferite pentru radiații diferite. Totuși, dacă variația nu este foarte mare în regiunea de sensibilitate spectrală a receptorului, atunci fluxul de lumină complexă (albă, de exemplu) va respecta tot o lege exponențială.

— Pierderi prin reflexie, care sînt în general cele mai importante. În cazul suprafețelor optice netratate (neacoperite cu straturi subțiri) o fracțiune $\mathcal{R}$ a fluxului incident este reflectată, indiferent de sensul de propagare a luminii. Conform formulelor lui Fresnel, în cazul incidenței normale: $\mathcal{R} = \left(\frac{n' - n}{n' + n}\right)^2$, adică $\mathcal{R} \simeq 4\%$, la suprafața de separație între sticlă, $n \simeq 1{,}5$ și aer, $n' = 1$. Factorul de transmisie a unui astfel de dioptru va fi $\mathcal{T} = 0{,}96$. Fluxul rezultant, care iese dintr-un sistem optic, poate fi calculat ținînd seama de factorul de transmisie al fiecărui dioptru $\Phi = \Phi_0 \prod_{j=1}^{k} \mathcal{T}_j$.

Pierderile prin reflexie sînt diminuate aplicînd suprafețelor optice tratamentul antireflex (depunere în vid a unor substanțe transparente cu indici mici de refracție $n = n_{\text{sticlă}}^{1/2}$ și grosime $\lambda/4$; λ se referă la radiația considerată), astfel încît undele luminoase reflectate pe cele două fețe ale peliculei să fie în opoziție de fază.

a) *Claritatea geometrică a aparatelor optice oculare, în cazul obiectelor cu suprafețe extinse (nepunctiforme).* În acest caz claritatea aparatului este definită de raportul iluminărilor retinei, observînd obiectul prin aparat și cu ochiul liber: $C = E'/E_0$.

Ținînd seama de legea lui Clausius (12.20) și de factorul de transmisie $\mathcal{T}$ prin aparatul optic, rezultă relația între luminanțe:

$$\frac{L'}{n'^2} = \mathcal{T}\frac{L}{n^2},$$

care arată că raportul luminanțelor în spațiul imagine și spațiul obiect nu va depinde decît de indicii de refracție externi și de factorul de transmisie. Cum în cele mai multe cazuri $n' = n = 1$ (sistemele lucrează în aer), avem: $L' = \mathcal{T}L$.

Pentru a exprima iluminarea retinei de către fluxul $d\Phi'$ care iese din aparat și intră în ochi, venind de la imaginea de luminanță L', considerăm coeficientul de transmisie al ochiului $\mathcal{T}_o$

$$E = \mathcal{T}_o \frac{d\Phi'}{ds''},$$

suprafața elementară ds'' a retinei (fig. 14.38) fiind „văzută" sub unghiul solid $d\omega''$ din centrul pupilei de ieșire a ochiului P_0': $ds'' = z''^2 d\omega''$. Dacă

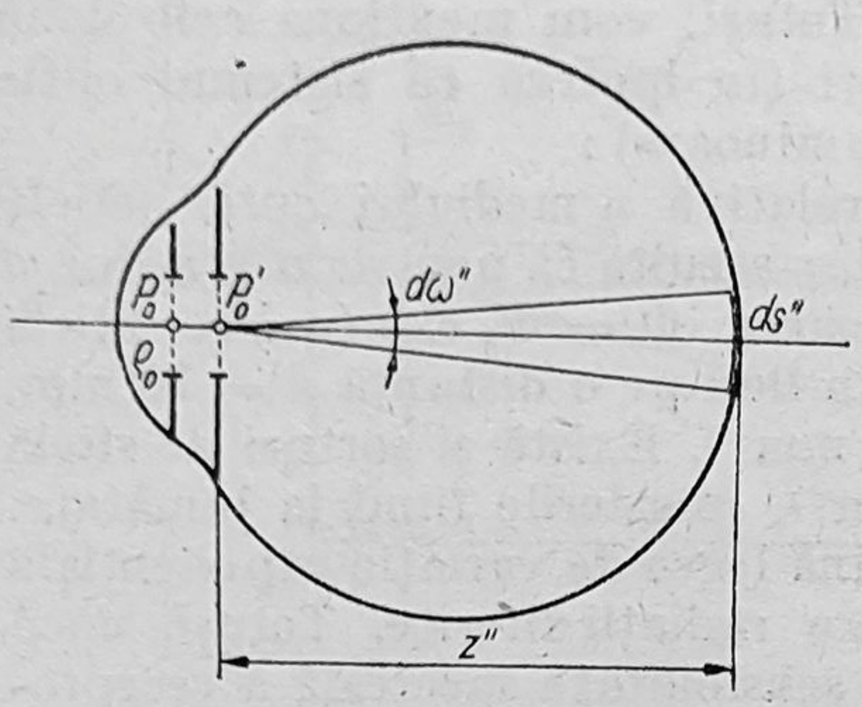


Fig. 14.38

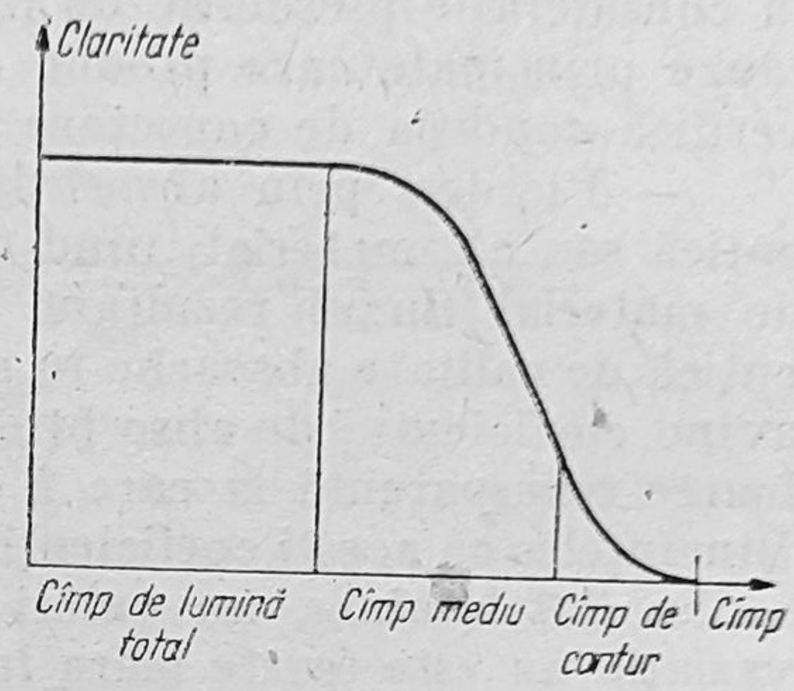


Fig. 14.39

mărirea unghiulară a ochiului între pupila de intrare și pupila de ieșire este γ_o, atunci $d\omega'' = \gamma_0^2 d\omega'$, iar dacă raza pupilei de intrare a ochiului este ρ_0 atunci $d\Phi' = L'\pi\rho_0^2 d\omega'$, astfel încît iluminarea retinei devine

$$E = \mathcal{T}_o \frac{L'\pi\rho_0^2}{z''^2\gamma_0^2}. \qquad (14.61)$$

S-a găsit ceea ce puteam presupune apriori, că iluminarea retinei este proporțională cu luminanța imaginii și cu suprafața utilă a pupilei ochiului.

Există două cazuri posibile, în funcție de raportul pupilei de ieșire a aparatului $2\rho'$ și pupilă de intrare a ochiului $2\rho_o$:

— Dacă $\rho' \geqslant \rho_0$, întreaga pupilă a ochiului este acoperită de fluxul luminos ieșind din aparat. În acest caz claritatea aparatului este raportul iluminărilor retinei observînd imaginea obiectului prin aparat, avînd luminanța $L' = \tau \cdot L$, și obiectul direct de luminanță L. Cum ceilalți factori ai relației (14.61) sînt aceiași, rezultă

$$C = \mathcal{T}. \qquad (14.62)$$

— Dacă $\rho' < \rho_0$, atunci în relația iluminării retinei prin aparat în locul suprafeței totale $\pi\rho_0^2$ a pupilei ochiului intră suprafața pupilei de ieșire a aparatului $\pi\rho'^2$, rezultînd claritatea

$$C = \tau(\rho'/\rho_o)^2. \qquad (14.63)$$

Claritatea variază cu cîmpul aparatului; astfel, în cîmpul de lumină totală rămîne practic constantă, descrescînd pînă sub 50% în cîmpul mediu, ca apoi să se reducă foarte mult și să se anuleze în cîmpul de contur (fig. 14.39).

b) *Claritatea geometrică a aparatelor optice oculare în cazul obiectelor punctiforme* este determinată de raportul fluxurilor care ajung la retină prin aparatul optic și văzînd cu ochiul liber. Fie iluminarea E care rezultă în pupila de intrare a aparatului. Distingem și aici două posibilități:

— Dacă pupila ochiului este acoperită complet de pupila de ieșire a aparatului, adică $\rho' \geqslant \rho_0$, este necesar să se calculeze fluxul prin fracțiunea pupilei de intrare corespunzătoare pupilei ochiului.

Dacă ρ reprezintă raza pupilei de intrare, atunci $\rho\rho_0/\rho'$ reprezintă raza fracțiunii din pupila de intrare corespunzătoare pupilei ochiului. Rezultă claritatea aparatului

$$C = \frac{\Phi'}{\Phi_0} = \frac{\mathcal{T} E\pi(\rho\rho_0/\rho')^2}{E\pi\rho_0^2} = \mathcal{T}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2. \tag{14.64}$$

— Dacă pupila ochiului este acoperită incomplet de către pupila de ieșire, adică raza acesteia $\rho' < \rho_0$, atunci claritatea geometrică este

$$C = \frac{\Phi'}{\Phi_0} = \frac{\mathcal{T} E\pi\rho^2}{E\pi\rho_0^2} = \mathcal{T}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2. \tag{14.65}$$

Aplicație. Studiul clarității unei lunete. În cazul lunetei relația între grosisment și razele pupilelor este (14.56) : $\Gamma = \rho/\rho'$. Dacă se respectă condiția de conectare a tubului luminos care iese din lunetă și intră în ochi $\rho' = \rho_0$ atunci se obține grosismentul normal

$$\Gamma_N = \rho/\rho_0 \tag{14.66}$$

Se observă că $\Gamma < \Gamma_N$ pentru $\rho' > \rho_0$.

Ținînd seama de relațiile (14.56) și (14.66) claritatea lunetei are următoarele expresii, în cele două posibilități privind cîmpul obiect :

— obiect extins (nepunctiform)

$$C = \begin{cases} \mathcal{T}, & \rho' > \rho_0 \to \Gamma < \Gamma_N \\ \mathcal{T}(\Gamma_N/\Gamma)^2, & \rho' < \rho_0 \to \Gamma > \Gamma_N ; \end{cases}$$

— obiect punctiform

$$C = \begin{cases} \mathcal{T}\Gamma^2, & \rho' > \rho_0 \to \Gamma < \Gamma_N \\ \mathcal{T}\Gamma_N^2, & \rho' < \rho_0 \to \Gamma > \Gamma_N. \end{cases}$$

Dacă se reprezintă grafic variația clarității lunetei în funcție de grosismentul acesteia $C(\Gamma)$ se obțin două curbe : curba C_1 reprezintă cazul obiectelor extinse, iar curba C_2 cazul obiectelor punctiforme (fig. 14.40). Se poate constata că în primul caz grosismentul optim care asigură o claritate maximă este $\Gamma = \Gamma_N$, în timp ce în cazul obiectelor punctiforme (lunete astronomice, telescoape) grosismentul poate atinge valori foarte mari.

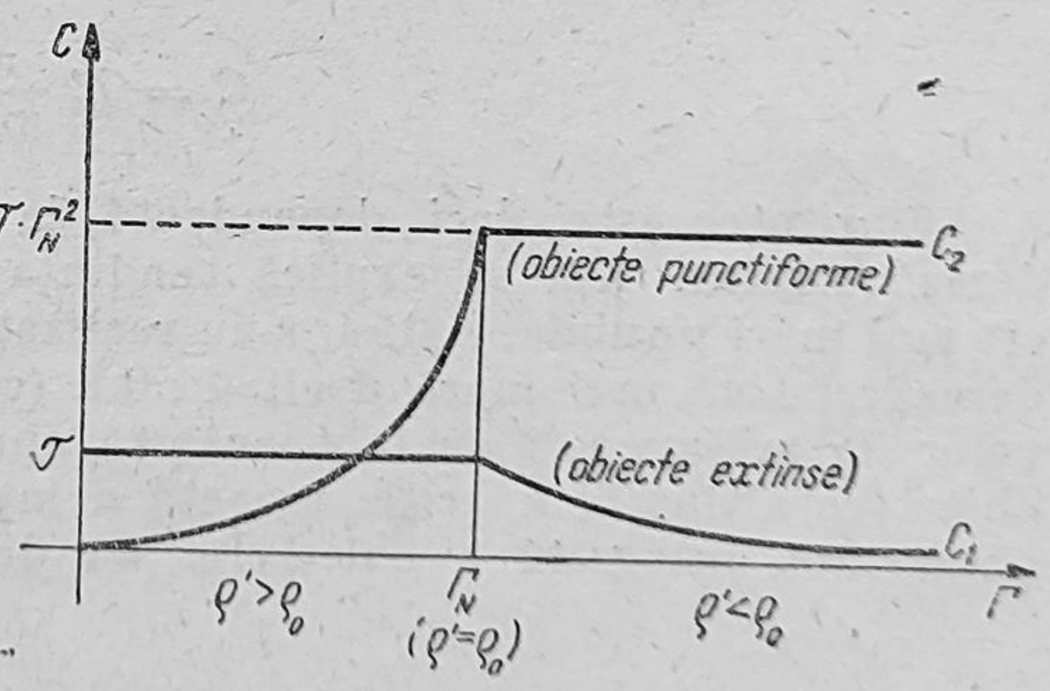


Fig. 14.40

c) *Claritatea aparatelor optice ce dau imagini reale* (aparate foto, aparate de proiecție, proiectoare de profile, spectrograful etc.) se exprimă prin raportul între iluminarea în planul imagine și luminanța obiectului: $C = E'/L$. Ținînd seama de relația între luminanțe (12.21), unde $n' = 1$, rezultă $L' = \mathcal{T}L/n^2$, unde $n = 1$ în cele mai dese cazuri, cu excepția microfotografiei cu imersie

sau a filmării subacvatice. Fluxul luminos elementar care cade pe planul imagine este

$$d\Phi' = L' ds' \cos \sigma' \, d\omega' \; ; \rightarrow dE' = d\Phi'/ds'$$

Pentru un sistem optic cu simetrie de revoluție se ia

$$d\omega' = \sin \sigma' \, d\sigma' \, d\varphi,$$

astfel încît expresia iluminării elementare a imaginii devine

$$dE' = \mathcal{T} \cdot \frac{L}{n^2} \cos \sigma' \sin \sigma' \, d\sigma' \, d\varphi.$$

Presupunînd că luminanța obiectului este independentă de direcția de emisie (verifică legea Lambert), integrarea iluminării se poate face ușor luînd limitele de integrare $\varphi \in [0 ; 2\pi]$, $\sigma' \in [0 ; \sigma'_{max}]$, unde σ'_{max} reprezintă unghiul de deschidere maximă

$$E' = \int_0^{\sigma'_{max}} \int_0^{2\pi} \mathcal{T} \cdot \frac{L}{n^2} \cos \sigma' \sin \sigma' \, d\sigma' \, d\varphi = \mathcal{T} \frac{L}{n^2} \pi \sin^2 . \sigma'_{max}.$$

Conform definiției, claritatea capătă expresia :

$$C = \mathcal{T} \frac{\pi}{n^2} \sin^2 \sigma'_{max}. \tag{14.67}$$

Ținînd seama de relația (14.60), claritatea unui obiectiv foto se poate exprima în funcție de numărul de apertură $N = f'/2\rho$

$$C = \mathcal{T} \frac{\pi}{n^2} \frac{1}{4N^2} \tag{14.68}$$

sau, în funcție de deschiderea relativă $k = 2\rho/f' = 1 : N$,

$$C = \mathcal{T} \frac{\pi}{4n^2} k^2. \tag{14.68'}$$

Claritatea este, deci, dependentă de factorul de transmisie și de deschiderea relativă. Așa se explică tendința de a se obține deschideri relative cît mai mari posibile. Astfel, s-au realizat obiective de spectrograf cu deschiderea relativă mai mare decît 1 : 0,7 (comparabile cu deschiderile obiectivelor de microscop : de fapt această apropiere între aceste două tipuri de obiective a dus la apariția recentă a macrofotografiei și a macroscopiei — observarea integrală a obiectelor cu dimensiuni reduse).

14.7.4. Limita de rezoluție

Datorită fenomenului de difracție care se manifestă la formarea imaginilor prin sisteme optice, imaginea unui punct luminos nu este punctiformă, chiar dacă sistemul optic nu prezintă aberații ; figura de difracție sau discul lui Airy (în cazul diafragmei circulare), care se formează în planul imagine, se compune dintr-o pată centrală foarte luminoasă înconjurată de inele alter-

native întunecate și luminoase. Distribuția energetică în figura de difracție este dată în tabelul 14.2, iar iluminarea relativă este reprezentată în figura 14.41, a.

Tabelul 14.2

Inelul	Raza inelului y'	Iluminarea relativă	Energia, %
Maximul central	0	1	83,9
Primul inel întunecat	$\frac{0{,}61\lambda}{n' \sin \sigma'}$	—	—
Primul inel luminos	$\frac{0{,}82\lambda}{n' \sin \sigma'}$	0,017	7,1
Al doilea inel întunecat	$\frac{1{,}12\lambda}{n' \sin \sigma'}$	—	—
Al doilea inel luminos	$\frac{1{,}33\lambda}{n' \sin \sigma'}$	0,0041	2,8
Al treilea inel întunecat	$\frac{1{,}62\lambda}{n' \sin \sigma'}$	—	—
Al treilea inel luminos	$\frac{1{,}85\lambda}{n' \sin \sigma'}$	0,0016	1,5
Al patrulea inel întunecat	$\frac{2{,}12\lambda}{n' \sin \sigma'}$	—	—
Al patrulea inel luminos	$\frac{2{,}36\lambda}{n' \sin \sigma'}$	0,00078	1
Al cincilea inel întunecat	$\frac{2{,}62\lambda}{n' \sin \sigma'}$	—	—

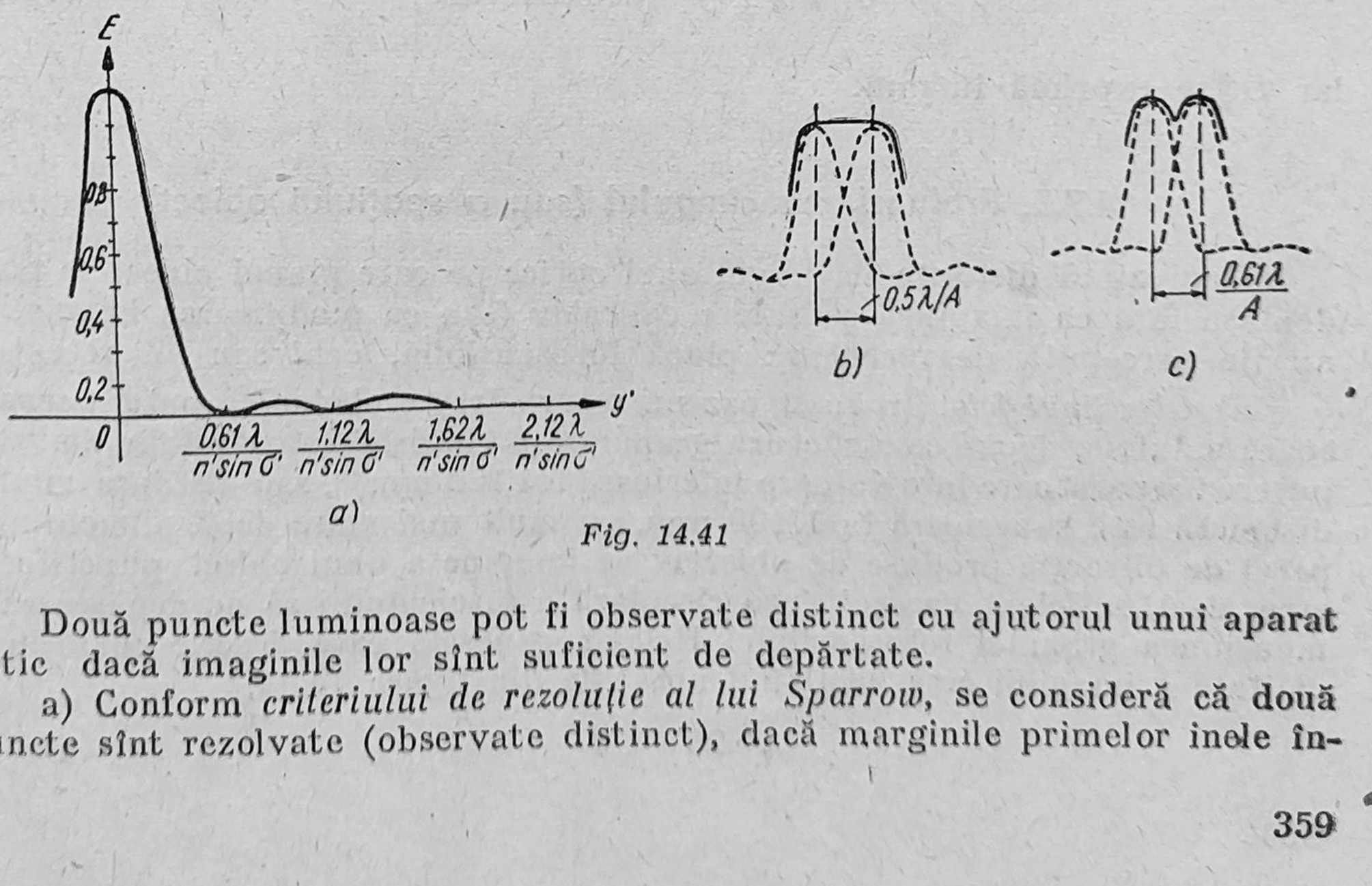


Fig. 14.41

Două puncte luminoase pot fi observate distinct cu ajutorul unui aparat optic dacă imaginile lor sînt suficient de depărtate.

a) Conform *criteriului de rezoluție al lui Sparrow*, se consideră că două puncte sînt rezolvate (observate distinct), dacă marginile primelor inele în-

tunecate depășesc cu puțin centrele petelor centrale (fig. 14.41, b), adică cea mai mică distanță imagine rezolvată, sau limita de rezoluție în spațiul imagine este

$$y' = \frac{0{,}5\lambda}{n' \sin \sigma'} \tag{14.69}$$

b) Conform *criteriului de rezoluție Rayleigh*, adoptat în marea majoritate a țărilor cu industrie optică, se consideră imaginile celor două puncte separate dacă marginile primelor inele întunecate coincid cu centrele petelor centrale (fig. 14.41, c). Așadar, conform criteriului Rayleigh limita de rezoluție (sau de separare) în spațiul imagine este

$$y' = \frac{0{,}61\lambda}{n' \sin \sigma'}. \tag{14.70}$$

Ținînd seama de invariantul Lagrange-Helmholtz, scris pentru întregul sistem optic, relația (14.70) poate fi transcrisă în spațiul obiect. Astfel, limita de rezoluție a unui microscp este dată de relația

$$y = \frac{0{,}61\lambda}{A} \tag{14.71}$$

unde $A = n \sin \sigma$ este apertura numerică a obiectivului microscopului.

Limita de rezoluție se exprimă unghiular în cazul aparatelor care vizează obiecte îndepărtate

$$\sigma_{p\ min} = \frac{1{,}22\lambda}{D} \text{ [radiani]} \tag{14.72}$$

unde $D = 2\rho$ reprezintă diametrul pupilei de intrare (diametrul util al obiectivului, în cazul lunetei). Dacă se consideră o lungime de undă medie $\lambda \simeq$ $\simeq$ 555 nm, limita de rezoluție unghiulară poate fi exprimată în secunde de arc

$$\sigma_{p\ min} \simeq \frac{125}{D} \text{ [secunde arc]} \tag{14.72'}$$

iar D se exprimă în mm.

14.7.5. **Profunzimea cîmpului** (sau a spațiului obiect)

Reprezintă distanța în lungul axei optice pe care planul obiect se poate deplasa fără ca imaginea să sufere calitativ (sau ca modificarea imaginii să nu fie percepută de receptor: placă fotosensibilă, ochi sau alt receptor).

a) *Obiectivul foto.* În acest caz nu se urmărește obținerea puterii separatoare maxime, deoarece structura granulară a emulsiei fotosensibile limitează puterea separatoare la o valoare inferioară lui 100 mm^{-1}, sau distanța minimă distinctă este superioară la 1/100 mm, cu mult mai mare decît dimensiunile petei de difracție produse de obiectiv ca imagine a unui obiect punctiform; este, deci, suficient ca secțiunea circulară a fasciculului să nu depășească dimensiunea granulei fotosensibile. Relația generală care descrie condiția de calitate a imaginii este, utilizînd notațiile din figura 14.42,

$$\varepsilon' \cdot 2\sigma' < d \tag{14.73}$$

unde ε' este deplasarea imaginii, $2\sigma'$ deschiderea fasciculului convergent imagine, d diametrul petei imagine tolerabilă.

Pentru a determina profunzimea cîmpului, ε, se foloseşte relaţia între măriri $\alpha\gamma'^2 = 1 \rightarrow \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 = 1$, unde σ şi σ' se exprimă funcţie de deschiderea relativă a obiectivului $k = 1 : N = D/f'$

$$\sigma \simeq \frac{D}{2s} = \frac{f'}{2s}\frac{1}{N}; \quad \sigma' \simeq \frac{D}{2f'} = \frac{1}{2N}.$$

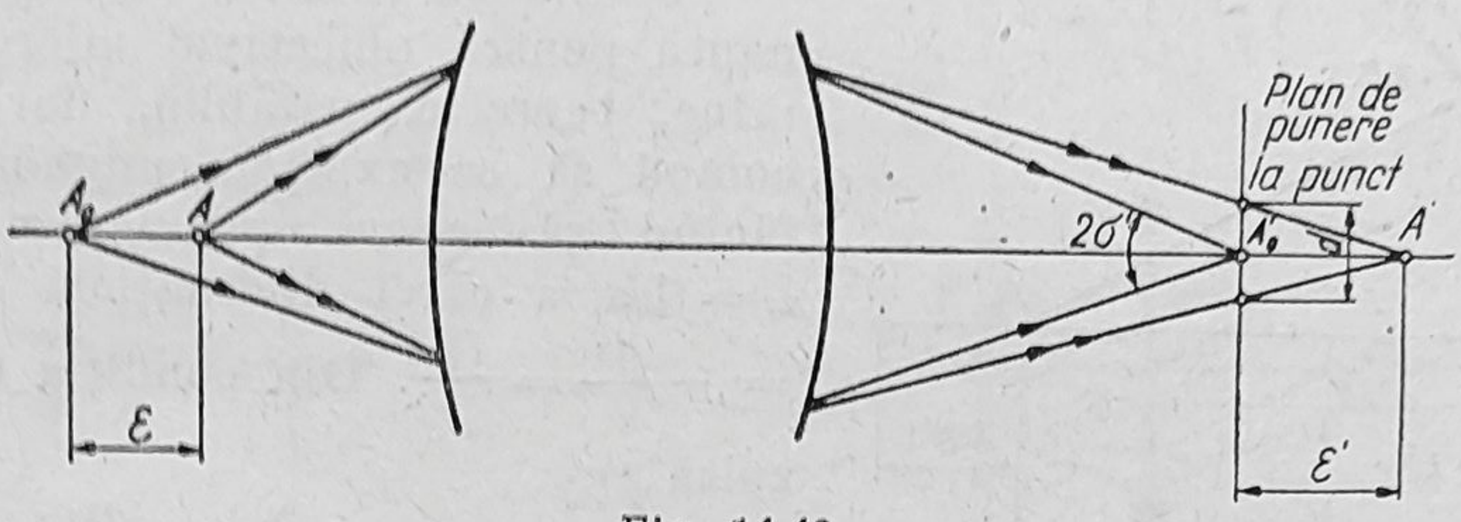


Fig. 14.42

Se introduce *proximitatea obiect* $\xi = 1/s$, a cărei diferenţială $d\xi = -ds/s^2$ se poate scrie $\Delta\xi = \varepsilon/s^2$. Introducînd condiţia de calitate a imaginii (14.73), profunzimea cîmpului capătă forma

$$\Delta\xi = \frac{\varepsilon}{s^2} \leqslant \frac{d}{f'^2/N} = \frac{d}{f'^2 k}. \tag{14.74}$$

Se observă că profunzimea cîmpului este cu atît mai mare cu cît distanţa focală a obiectivului şi deschiderea relativă sînt mai mici. Exemplu numeric : un obiectiv foto cu deschiderea relativă maximă $k = 1 : N = 1 : 5{,}6$ şi distanţa focală $f' = 50$ mm, care utilizează peliculă fotosensibilă asigurînd o rezoluţie de 100 mm^{-1}, are o profunzime a cîmpului obiect exprimată în variaţia proximităţii obiect

$$\Delta\xi = \frac{\varepsilon}{s^2} = \frac{0{,}01 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}6}{(50 \cdot 10^3)^2} \simeq 0{,}02 \text{ dpt}.$$

Pentru $s = 10$ m $\rightarrow \varepsilon \simeq \pm 2$ m, iar pentru $s = 20$ m $\rightarrow \varepsilon \simeq \pm 8$ m. Dacă se reduce deschiderea (în cazul unei iluminări mai puternice) la $1 : N = 1 : 22$, profunzimea cîmpului se măreşte de patru ori.

b) *Obiectivul de microscop*. Se pune problema determinării deplasării minime a obiectivului, care produce scăderea sensibilă a calităţii imaginii : pentru microscoapele de vizare, sau măsurare, utilizate pe bancurile optice, această deplasare este măsura preciziei de punere la punct a microscopului. În acest caz, problema nu poate fi tratată în cadrul opticii geometrice, fiind strict necesară considerarea difracţiei. Conform regulei introduse de Rayleigh, calitatea imaginii este acceptabilă dacă suprafaţa echifază emergentă Σ' nu se depărtează mai mult decît $\lambda/4$ faţă de sfera de referinţă S. Această condiţie, folosind notaţiile din figura 14.43, devine : $\frac{h^2}{2R} - \frac{h^2}{2(R+\varepsilon')} < \frac{\lambda}{4}$ sau, dacă ε' este suficient de mic,

$$\varepsilon' \frac{h^2}{2R^2} < \frac{\lambda}{4} \rightarrow \varepsilon' < \frac{\lambda}{2\sigma'^2}. \tag{14.75}$$

Ținînd seama de măririle sistemului optic și de relațiile între ele, condiția (14.75) poate fi trecută în spațiul obiect : mărirea axială : $\alpha = \varepsilon'/\varepsilon$; mărirea unghiulară : $\gamma = \sigma'/\sigma$; relația între măriri : $\alpha\gamma^2 = 1$. Profunzimea spațiului obiect

$$\varepsilon < \frac{\lambda}{2\sigma^2}. \tag{14.76}$$

Exemplu numeric. Un microscop cu obiectiv „uscat" (lucrînd în aer) cu apertura $A = n \sin \sigma = 0{,}3$ are o precizie de punere la punct de ordinul : $\varepsilon \simeq 5\lambda$.

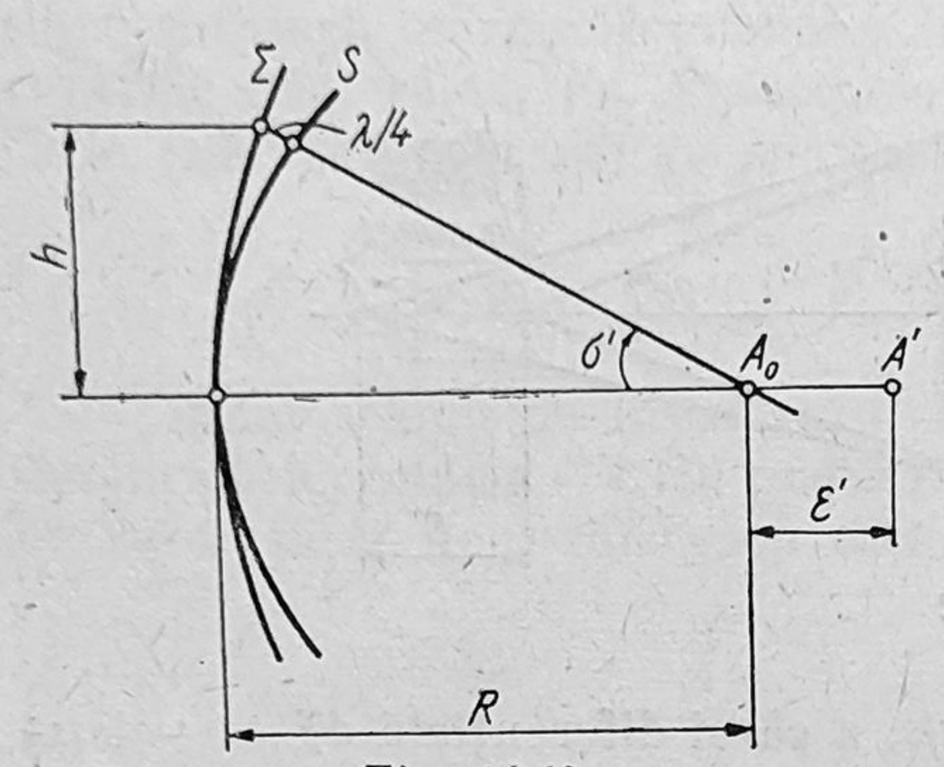


Fig. 14.43

c) *Luneta terestră.* Relația determinantă pentru obiectivul microscopic rămîne, teoretic, valabilă, dar este mai comod să se exprime unghiul $\sigma = \rho/s$, făcînd să apară proximitatea obiect $\xi = 1/s$, a cărei diferențială este $d\xi = -\frac{ds}{s^2} = \frac{\varepsilon}{s^2}$. Din condiția (14.76) rezultă

$$d\xi < \frac{\lambda}{2\rho^2} = \frac{2\lambda}{D^2} \tag{14.77}$$

unde D este diametrul util al obiectivului lunetei.

Exemplu numeric. O lunetă cu obiectivul ∅ 20 mm permite o precizie de punere la punct în spațiul obiect (de telemetrare) : $\Delta\xi \simeq 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ dpt sau, la o distanță de 10 m, precizia de punere la punct este de ordinul $\varepsilon = s^2\, d\xi \simeq 0{,}25$ m, în timp ce la distanța $s = 100$ m, profunzimea cîmpului obiect este $\varepsilon \simeq 25$ m.

14.8. Instrumente optice afocale

14.8.1. Luneta reglată la infinit (tip Kepler)

Luneta este constituită dintr-un obiectiv de distanță focală mare care formează în focarul F'_{OB} imaginea răsturnată a obiectului aflat la infinit ; aceasta este transformată de un sistem optic convergent, ocularul, într-o imagine virtuală mărită care este privită de ochi. Ochiul fiind considerat normal, imaginea virtuală trebuie să se formeze la mare distanță pentru a elimina orice efort de acomodare ; așadar, focarul imagine al obiectivului trebuie să coincidă cu focarul obiect al ocularului, unde se montează și reticulul de măsurare al lunetei (fig. 14.44). Razele pupilare obiective intră în sistem paralele cu axa optică și ies, de asemenea, paralele cu axa, constituind fascicule telecentrice ; luneta constituie un sistem optic afocal. Diafragma de deschidere a lunetei este constituită din montura obiectivului, care este în același timp pupila de intrare a lunetei $D = 2\rho$; imaginea acesteia prin ocular este pupila de ieșire, care este reală în cazul lunetei cu ocular convergent (pozitiv). În planul pupilei de ieșire trebuie să se situeze pupila de intrare a ochiului pentru a primi întreaga cantitate de lumină și pentru a nu se reduce din cîmp.

Caracteristicile lunetei sînt :

Grosismentul $\Gamma = \dfrac{\operatorname{tg} \sigma'_p}{\operatorname{tg} \sigma_p} = \dfrac{f'_{OB}}{f'_{OC}} = \dfrac{2\rho}{2\rho'}$

Grosismentul normal $\Gamma_N = \rho/\rho_0$

Cîmpul unghiular obiect $2\sigma_p$

Cîmpul unghiular imagine (aparent) $2\sigma'_p$

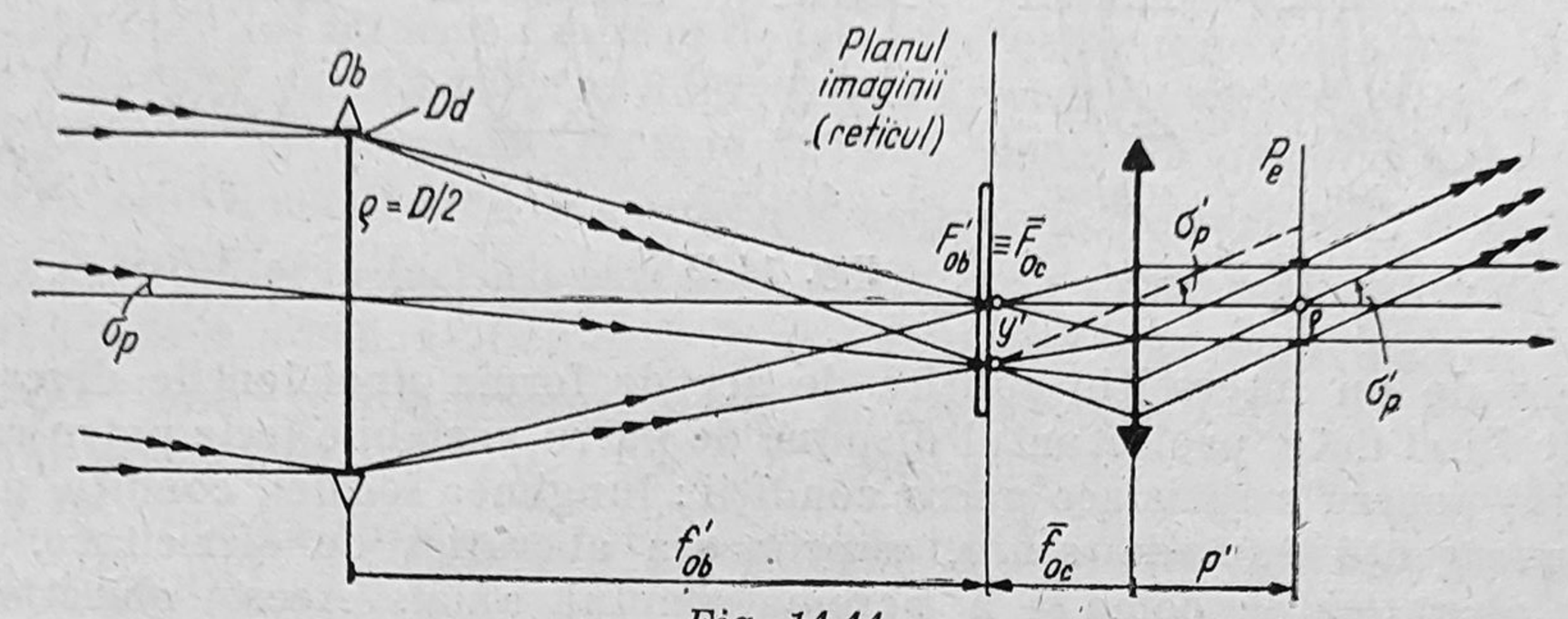


Fig. 14.44

Deschiderea relativă $k = 2\rho/f'_{OB} = 1 : N$

Numărul de apertură $N = f'_{OB}/2\rho$

Claritatea geometrică : $C = \begin{cases} \mathcal{T}\ \Gamma^2, & \rho' > \rho_o \\ \mathcal{T}\ \Gamma_N^2, & \rho' \leqslant \rho_o \end{cases}$; sau $C = \begin{cases} \mathcal{T}, & \rho' > \rho_o \\ \mathcal{T}(\Gamma_N/\Gamma)^2, & \rho' \leqslant \rho_o \end{cases}$

Limita de rezoluție $\sigma_{p\ min} = 60/\rho$ sec. arc

Variația proximității obiect $\Delta\xi = \lambda/2\rho^2$

Profunzimea cîmpului $\varepsilon = s^2\Delta\xi$

Condițiile care trebuie îndeplinite de obiectivul și de ocularul lunetei sînt diferite :

— obiectivul trebuie corectat la aberațiile de cromatism axial, sfericitate și coma. Corecția aberației de coma este esențială, atunci cînd se face măsurarea în planul imaginii reale ;

— ocularul, spre deosebire de obiectiv, primește fascicule luminoase oblice și le trimite sub înclinări și mai mari, astfel încît corecțiile esențiale trebuie făcute aberațiilor de cromatism transversal (de mărire), curbura cîmpului și distorsiune. Corectarea aberației de sfericitate este mai puțin importantă decît la obiective.

Scară de dioptrii. În vederea corectării defectelor ochiului observatorului este necesară posibilitatea de deplasare a ocularului pentru a aduce imaginea într-o poziție convenabilă ochiului. Dacă f'_{OC} este distanța focală a ocularului, deplasarea axială z corespunzătoare deplasării imaginii z' se calculează cu relația lui Newton : $z = f'^2/z'$. O deplasare a imaginii corespunzătoare

la φ dioptrii este $z' = 1\,000/\varphi$; astfel, pentru a corecta vederea unui ochi afectat de defecte egale cu 1, 2, 3, 4 dioptrii, deplasările ocularului vor fi proporționale cu defectele : $z = f'^2\varphi/1\,000$.

Tipuri de obiective pentru lunetă. a) *Obiectiv tip Fraunhofer* (fig. 14.45, a), compus dintr-o lentilă convergentă din crown și o lentilă divergentă din flint,

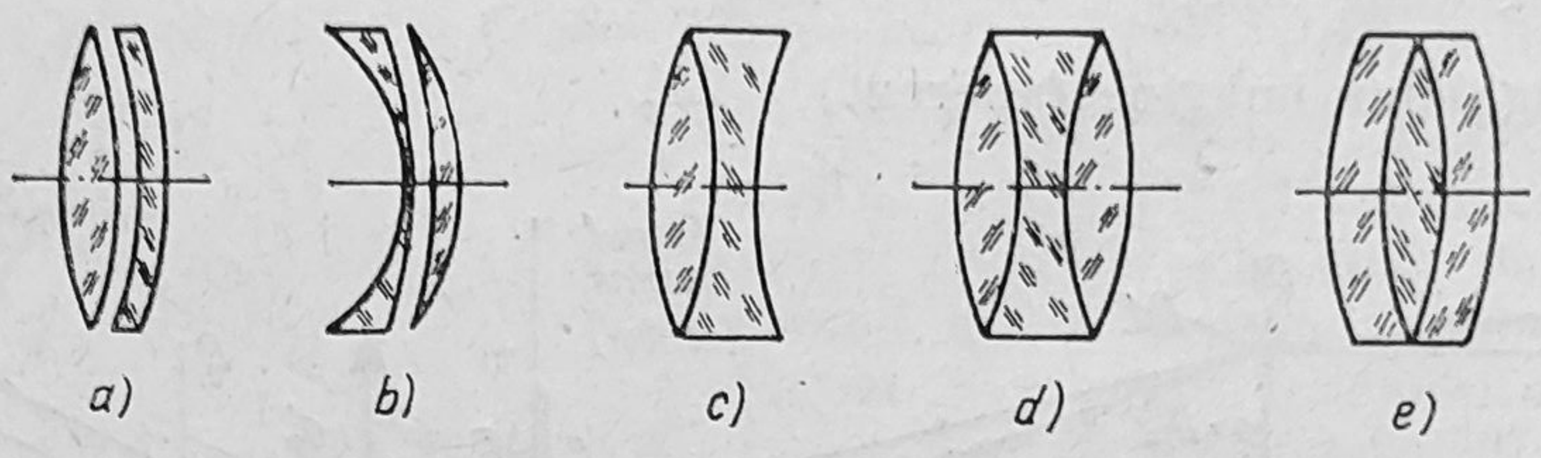


Fig. 14.45

separate de un interstițiu subțire de aer de forma unei lentile divergente. Sticlele fiind date, proiectantul dispune de patru variabile (cele patru raze de curbură) pentru a satisface patru condiții : lungimea focalei, condiție numită de convergență sau de scară, suprimarea aberației de sfericitate, eliminarea aberației de coma și a acromatismului axial. Acest obiectiv este unul dintre puținele care se pretează proiectării pe baza unui calcul algebric. Este bine ca lentila convergentă din crown să fie prima, deoarece sticla crown este mai rezistentă influențelor exterioare, de asemenea, în acest caz, curburile suprafețelor rezultă mai mici. Obiectivele tip Fraunhofer prezintă cromatism secundar, care pentru radiația G' are valoarea $\simeq 0{,}002\ f'_{OB}$. Acest dezavantaj devine important pentru sistemele cu distanță focală mare.

b) *Obiectiv tip Gauss.* Obiectivele de tip Fraunhofer sînt corectate la aberația cromatică axială pentru radiațiile C și F și la aberațiile de sfericitate și coma pentru radiația D. Renunțînd la corecția aberației de coma, este matematic posibilă corectarea sfericității pentru două radiații, rezultînd astfel obiectivul tip Gauss. Un exemplu de obiectiv tip Gauss (fig. 14.45, b), redus la focală unitară are următoarele caracteristici :

$$\begin{aligned} r_1 &= -0{,}11107, \quad e_1 = 0{,}00369, \quad n_{1D} = 1{,}61558 \\ r_2 &= -0{,}19658, \quad d = 0{,}0982, \quad r_3 = -0{,}61728 \\ e_2 &= \ \ 0{,}005898, \quad n_{2D} = 1{,}57605, \quad r_4 = -0{,}13697. \end{aligned}$$

Un astfel de obiectiv prezintă două dezavantaje : curburi mari și sensibilitate mare la defectele de centrare.

c) *Obiectivele de tip Clairaut și tip Mossotti* sînt constituite dintr-un singur dublet lipit, de diametru maxim 100 mm, lentilele mai mari neputînd fi lipite rigid datorită diferențelor de dilatare a sticlelor. În acest caz sistemul prezintă numai trei raze de curbură, putînd fi îndeplinite doar trei condiții : distanța focală, suprimarea aberației de sfericitate, a treia condiție putînd fi acromatizarea axială (obiective tip Clairaut, fig. 14.45, c) sau eliminarea aberației de coma (obiective tip Mossotti).

Totodată, ecuația de acromatizare și condiția sinusurilor nu sînt matematic contradictorii ; Harting a arătat că obiectivele Mossotti care satisfác condiția sinusurilor sînt în același timp acromate, dacă se respectă relația

$$\frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{dn(\text{flint})}{dn(\text{crown})}$$

unde ρ_1, ρ_2, ρ_3 sînt curburile celor trei dioptri.

d) *Obiectivul triplet tip Harling*, este constituit dintr-un triplet lipit, avînd curburile interioare egale și putînd prezenta două forme : o lentilă divergentă din flint intercalată între două convergente din crown (fig. 14.45, d) sau o lentilă convergentă din crown între două divergente din flint (fig. 14.45, e). Prima formă e recomandată în mod special, deoarece puterea este împărțită între cele două lentile convergente asigurînd curburi mai mici, iar în privința rezistenței la factorii exteriori, sticla crown este mai indicată.

Tipuri de oculare. a) *Ocularul de tip Ramsden* este constituit din două lentile plan-convexe din aceeași sticlă, cu convexitățile în interior : lentila de cîmp, care se găsește către obiectiv și lentila de ochi, către observator (fig. 14.46). Forma fundamentală a ocularului Ramsden este caracterizată prin simbolul $f_1' : e : f_2' = 1 : 1 : 1$, unde f_1' și f_2' reprezintă distanțele focale ale primei și, respectiv, a celei de a doua lentile, iar e distanța între ele. Acest ocular verifică condiția de acromatism aparent (13.146). Totuși, ocularul Ramsden fundamental (1 : 1 : 1) prezintă două dezavantaje : planele focale coincid cu suprafețele plane ale lentilelor, ceea ce împiedică montarea unui reticul de măsurare în $\bar{F}_{OC}$, iar pe de altă parte, distanța pînă la pupila de ieșire este prea mică, cu atît cu cît grosismentul lunetei este mai mare. Pentru

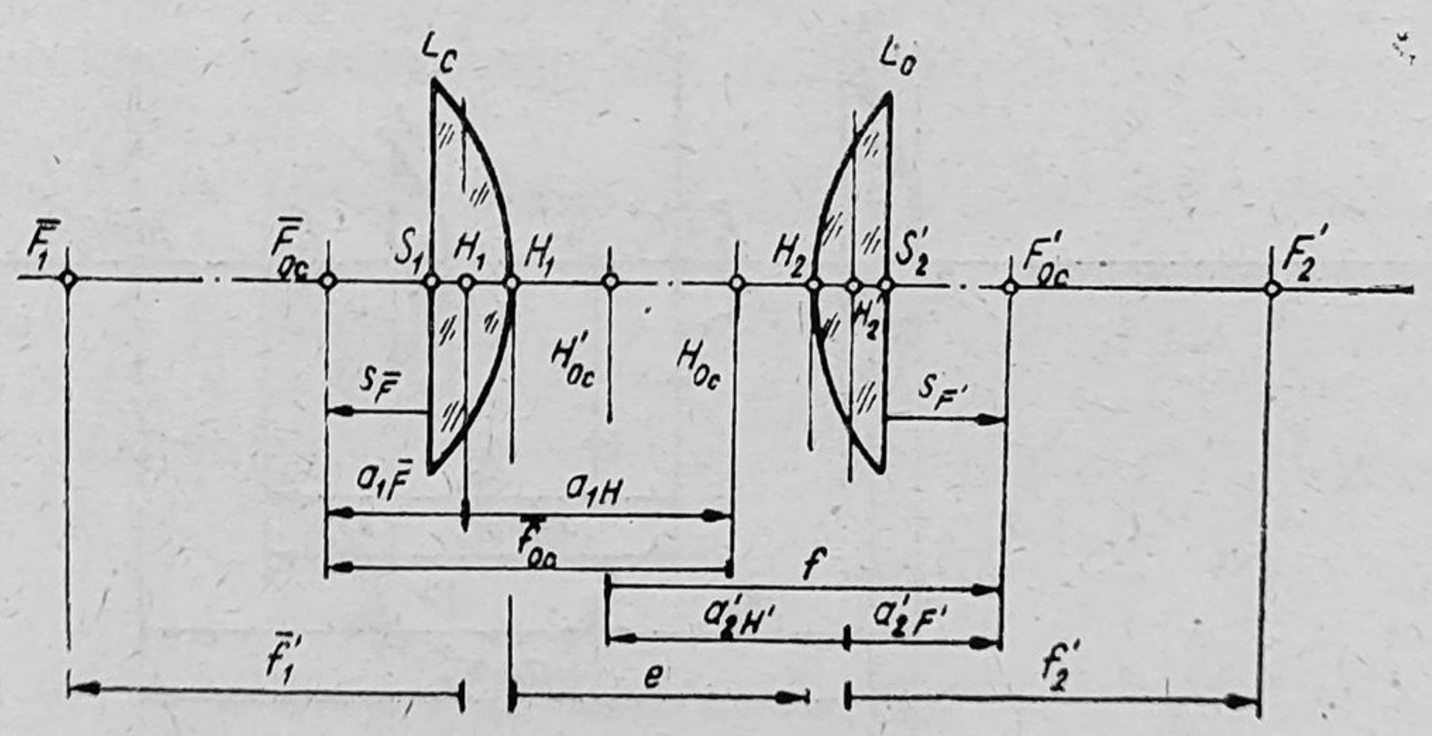


Fig. 14.46

a elimina aceste dezavantaje se apropie între ele cele două lentile, astfel încît ocularul de tip Ramsden pierde din acromatismul său aparent, $e \neq (f_1' + f_2')/2$, imaginea obținută cu radiația albastră (F) fiind mai mare decît cea roșie (C). Cîmpul utilizabil nu depășește 30°. Se pot adopta simbolurile care caracterizează oculare de tip Ramsden : 3 : 2 : 3, 4 : 3 : 4, 5 : 4 : 5, 5 : 3 : 5. Cu simbolul adoptat și cu relațiile de combinare a sistemelor optice se determină

toți parametrii care caracterizează ocularul : distanța focală, poziția imaginii intermediare, distanțele frontifocale, distanța pînă la pupila de ieșire etc.

$$\frac{1}{f'_{oc}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}$$

$$a_{1H} = e\frac{f'_{oc}}{f'_2}\ ;\ a'_{2H'} = -e\frac{f'_{oc}}{f'_1}$$

$$a_{1\overline{F}} = -f'_{oc}\left(1 - \frac{e}{f'_2}\right);\ a'_{2F'} = f'_{oc}\left(1 - \frac{e}{f'_1}\right) \qquad (14.78)$$

$$\begin{cases} s_{\overline{F}} = a_{1\overline{F}} + \overline{S_1H_1}\ ;\ \overline{S_1H_1} = \dfrac{e_1}{n} \\ \\ s'_{F'} = a'_{2F'} + \overline{S'_2H'_2}\ ;\ \overline{S'_2H'_2} = -\dfrac{e_2}{n} \end{cases}$$

b) *Ocularul tip Huygens* este format din două lentile plan-convexe, cu convexitățile orientate către obiectiv (fig. 14.47), forma fundamentală fiind caracterizată prin simbolul $f'_1 : e : f'_2 = 1 : 2 : 3$. Dacă se alege focala unitară pentru întreg ocularul, se determină : $f'_1 = 0{,}6667$, $e = 1{,}3333$, $f'_2 = 2$. Cum $e = (f'_1 + f'_2)/2$ ocularul Huygens realizează acromatismul aparent (relația 13.146). Aberațiile extraaxiale devin sensibile numai pentru unghiuri σ'_p care depășesc 15°. Ocularul Huygens diferă de ocularul tip Ramsden prin poziția focarului obiect, în interiorul ocularului, ceea ce nu permite montarea unui reticul independent de ocular, deci, reticulul se mișcă cu ocularul ;

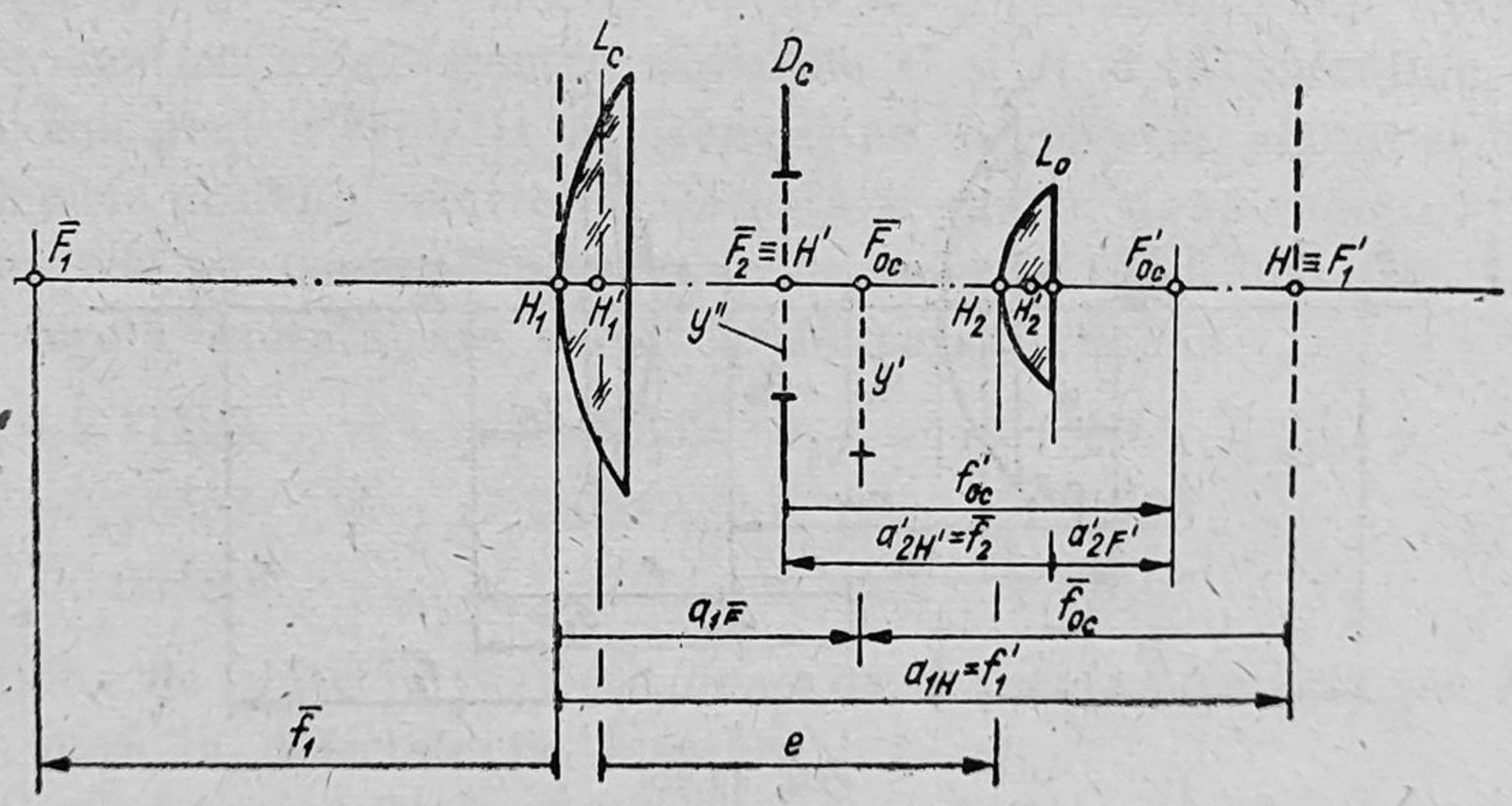


Fig. 14.47

de asemenea, dimensiunile imaginii furnizate de obiectiv sînt modificate de lentila de cîmp. Aceste două dezavantaje exclud utilizarea ocularelor Huygens în aparatele optice de măsurat.

Se pot adopta și alte simboluri pentru ocularele de tip Huygens : 4 : 3 : 2 ; 5 : 4 : 3 etc., toate verificînd condiția de acromatism aparent. Cu relațiile

de combinare a sistemelor optice, în funcţie de simbolul adoptat se determină toţi parametrii care caracterizează ocularul

$$\frac{1}{f'_{oc}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}$$

$$a_{1H} = f'_1 \rightarrow H \cong F'_1 \qquad (14.79)$$

$$a'_{2H'} = -f'_2 = \bar{f}_2 \rightarrow H' \cong \bar{F}_2$$

$$a_{1\bar{F}} = f'_1 - f'_{oc}\,; \quad a'_{2F'} = f'_{oc} - f'_2.$$

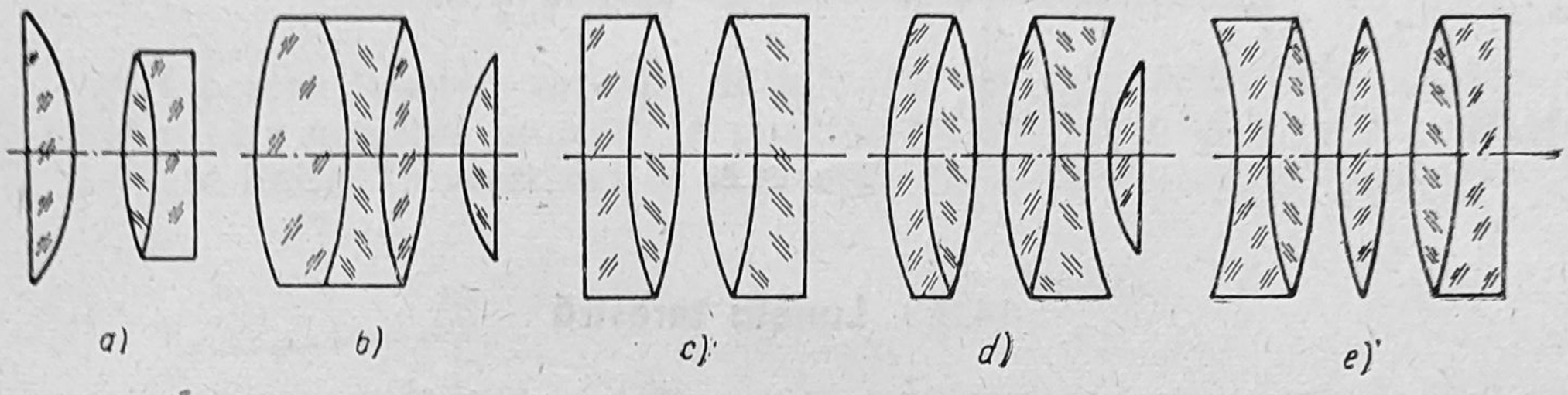


Fig. 14.48

c) *Oculare complexe.* Eforturile proiectanţilor de aparate optice au urmărit diminuarea aberaţiilor introduse de oculare şi totodată mărirea cîmpului aparent (imagine). Au fost realizate diferite tipuri de oculare superioare celor clasice :

— *ocularul Kellner* provine dintr-un ocular de tip Ramsden la care lentila de ochi este înlocuită de un dublet lipit (fig. 14.48, a) ;

— *ocularul Mittenzwei* este constituit dintr-un triplet lipit urmat de un menisc convergent, avînd planele focale în exterior, ceea ce favorizează utilizarea reticulelor micrometrice, iar acromatismul este real (nu numai aparent), (fig. 14.48, b) ;

— *ocularul Plöss*, format din două dublete lipite (fig. 14.48, c), foarte apreciat în astronomie ;

— *ocularele de tip Erfle*, formate din două dublete şi o lentilă, în două variante (fig. 14.48, d şi e), se caracterizează printr-o depărtare remarcabilă a focalelor şi a poziţiei pupilei de ieşire faţă de ocular şi prin cîmpuri imagine mari ($2\sigma'_p > 50°$).

14.8.2. Luneta Galilei

Această lunetă se compune dintr-un obiectiv acromatic de tip Clairaut şi un ocular divergent, de cele mai multe ori format dintr-o singură lentilă, iar uneori un dublet acromatizat (fig. 14.49). Focarul imagine al obiectivului F'_{OB} coincide cu focarul obiect al ocularului $\bar{F}_{OC}$. Imaginea nu mai este răsturnată ; de asemenea, gabaritul este mult mai redus faţă de luneta cu ocularul convergent. Pupila de ieşire este virtuală, situată între obiectiv şi ocular. Această lunetă nu poate fi utilizată ca aparat de măsurare ; în schimb, este

foarte utilizată, în aşezare inversă, la dispozitivele laser pentru expandarea (lărgirea) fasciculului şi, în acelaşi timp, reducerea divergenţei (mărirea colimaţiei fasciculului laser). Această utilizare se explică prin lipsa focarului real intermediar, unde datorită gradului înalt de coerenţă al fasciculului laser ar lua naştere fenomene de difracţie, care ar impune utilizarea unor filtre spaţiale.

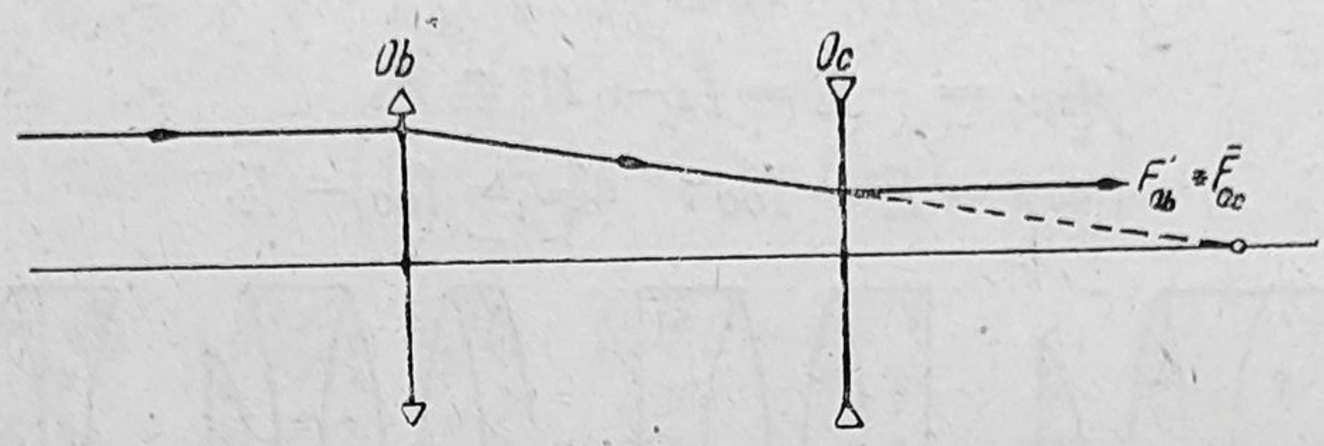


Fig. 14.49

14.8.3. **Luneta terestră**

Lunetele terestre realizează redresarea imaginii fie cu ajutorul unui sistem optic, ceea ce măreşte mult gabaritul lunetei, fie cu ajutorul unui sistem de prisme (de exemplu, în fig. 14.50 este reprezentată schema unei lunete terestre cu prismă Hensoldt). Cele mai folosite sisteme de redresare sînt cele de prisme Porro. De asemenea, se utilizează prisme Leman cu acoperiş. Pentru a produce redresarea imaginii prismele cu acoperiş trebuie să aibă, în afara acoperişului, un număr par de suprafeţe reflectante.

În general, lunetele terestre sînt binoculare, condiţiile tehnice care trebuie îndeplinite pentru a se asigura fusionarea imaginilor furnizate fiecărui ochi fiind paralelismul axelor optice, egalitatea grosismentelor şi absenţa piramidităţii prismelor, ceea ce ar duce la neredresarea completă a imaginii, obiectul apărînd uşor înclinat în cîmpul unuia dintre braţele lunetei binoculare.

Caracteristicile binoclurilor depind de utilizarea lor :

— pentru binoclul de teatru la care gabaritul trebuie să fie redus şi grosismentul nu prea mare, renunţîndu-se şi la majorarea efectului stereoscopic, o soluţie foarte bună o constituie utilizarea a două lunete Galilei ;

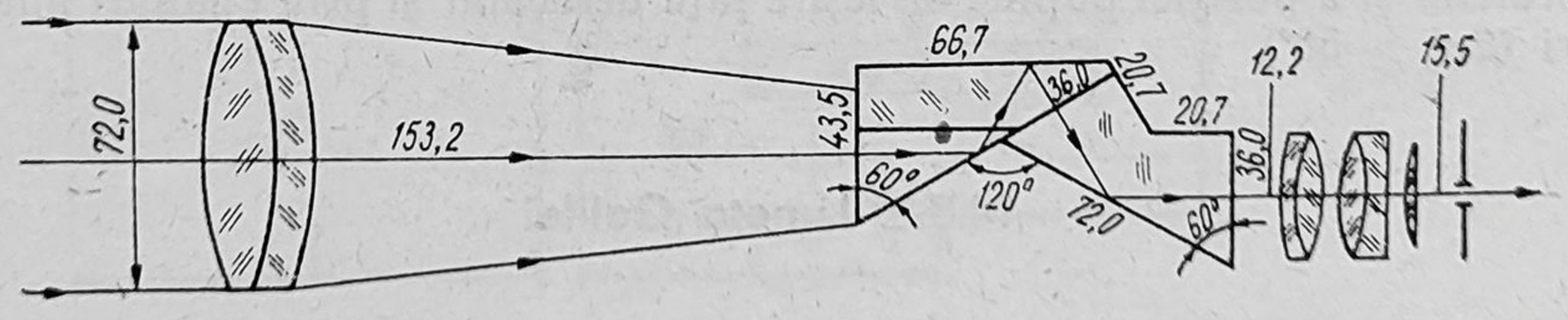


Fig. 14.50

— binoclul de cîmp, utilizat pentru observarea diurnă, are un sistem de prisme Porro tip I, grosismentul de $\simeq$ 6X şi diametrul obiectivelor 15 mm fiind suficiente, ceea ce determină o pupilă de ieşire $2\rho' = 2{,}5$ mm ;

— binoclul cu acelaşi grosisment, dar diametrul obiectivului $2\rho = 30$ mm, are pupila de ieşire $2\rho' = 5$ mm şi o claritate geometrică de patru ori mai

mare, conform relației (14.65), ceea ce permite utilizarea în lumină crepusculară ;

— binoclul cu grosismentul $\Gamma = 8X$ și $2\rho = 40$ asigură o claritate geometrică egală cu cea precedentă, iar cîmpul imagine se mărește de la 50° la $2\sigma'_p = 70°$;

— binoclul cu $\Gamma = 15X$; $2\rho = 60$ mm, la care claritatea rămîne bună, iar cîmpul obiect atinge $2\sigma_p = 4{,}65°$ (81 m la o distanță de 1 000 m).

14.8.4. **Luneta cu focalizare interioară**

Atît pentru lunetele terestre de măsurat cît și pentru cele utilizate în laborator este necesară punerea la punct a imaginii și pentru obiecte aflate la distanțe finite. În acest caz se utilizează un dublet divergent (sau lentilă

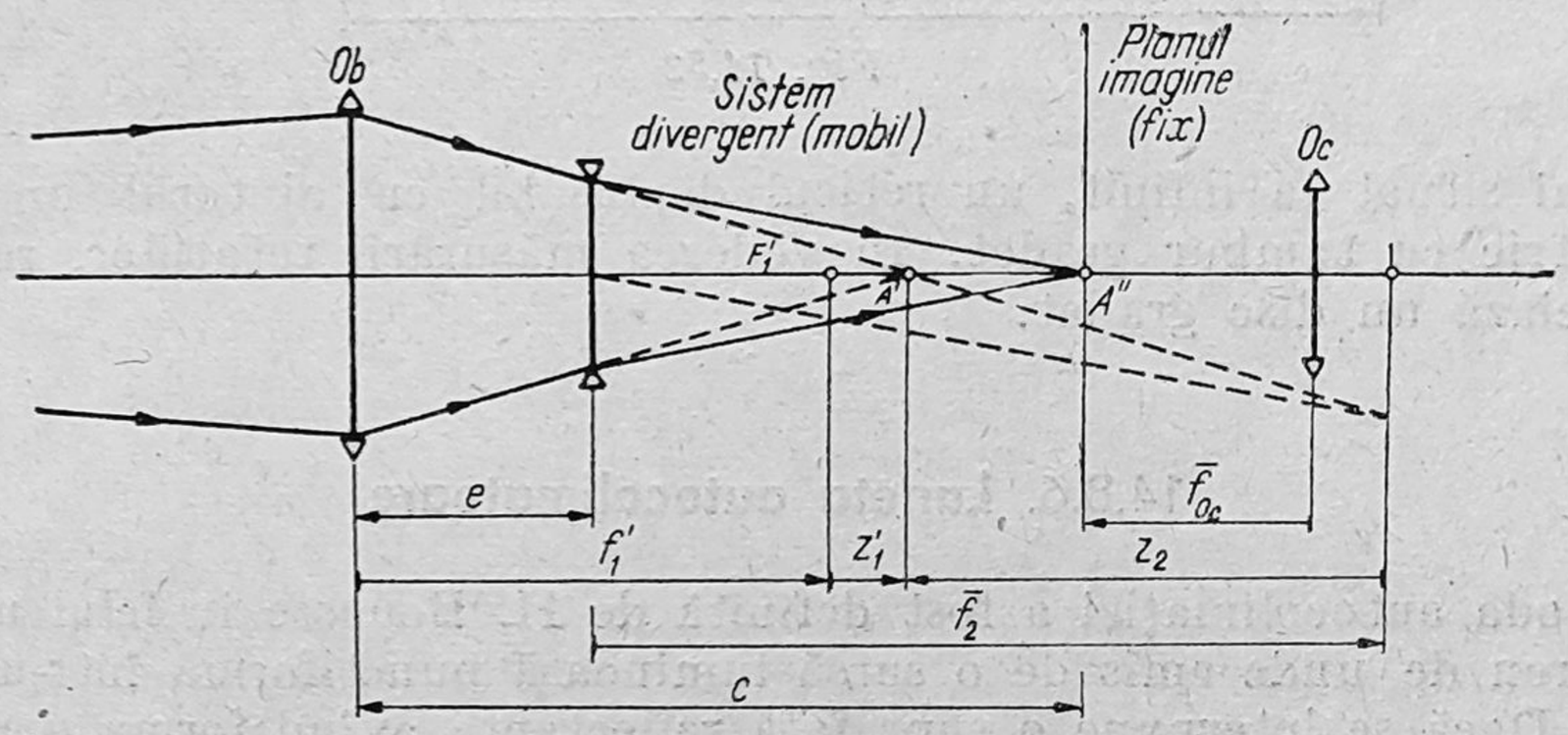


Fig. 14.51

divergentă), deplasabil pe axa optică astfel încît să se facă focalizarea interioară (fig. 14.51).

14.8.5. **Colimatorul**

Colimatorul este un instrument care materializează un reper la infinit. Schematic (fig. 14.52), colimatorul este constituit dintr-un obiectiv în focarul căruia se află montat un reper (două fire reticulare încrucișate, o deschidere circulară de diametru redus, o fantă fină, o lamă plan-paralelă gravată cu o scară gradată, cu cercuri concentrice, cu o spirală, etc.). Imaginea acestui reper se formează la infinit. Sistemul de iluminare al colimatorului constă dintr-o sursă și un condensator care formează imaginea acesteia în planul obiectivului. Precizia colimatorului este cu atît mai bună cu cît distanța focală f_c a obiectivului acestuia este mai mare. Dacă δ este eroarea de montaj a reticulului în focarul colimatorului, incertitudinea determinării distanței focale f' a unui sistem optic oarecare este : $\Delta f' = \delta(f'/f_c)^a$. Este, deci, necesar ca $f_c \gg f'$, adică distanța focală a colimatorului să fie mult mai mare decît a sistemului optic verificat. De asemenea, este necesar ca obiectivul colima-

torului să fie acromatizat, corectat de sfericitate și coma. În privința părții mecanice a colimatorului, este necesar ca axa optică să coincidă cu axa geometrică a tubului în care sînt montate obiectivul și reticulul.

Colimatorul se utilizează împreună cu o lunetă reglată la infinit, care are montat în planul focal al obiectivului, unde se formează imaginea reală a obiectului situat la infinit, un reticul deplasabil cu ajutorul unui șurub micrometric cu tambur gradat. În vederea măsurării rotațiilor, reticulului i se asociază un disc gradat.

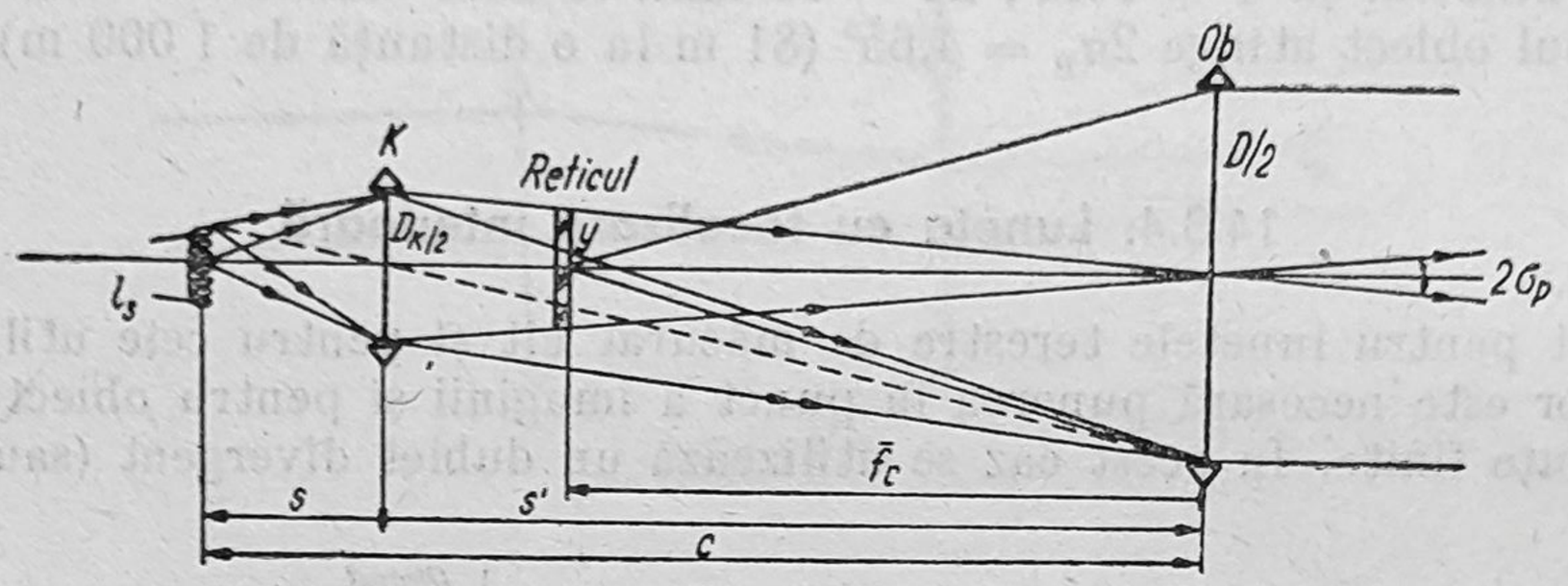


Fig. 14.52

14.8.6. **Luneta autocolimatoare**

Metoda autocolimației a fost definită de H. Bouasse în felul următor: fie un tren de unde emis de o sursă luminoasă punctiformă într-un mediu izotrop. Dacă se interpune o suprafață reflectantă avînd forma unei suprafețe echifaze, razele luminoase vor fi reflectate suprapunîndu-se peste ele însele, conform teoremei lui Malus (razele luminoase sînt normale la suprafețele echifaze), revenind în punctul de unde au plecat, neexistînd nici o inerție sau fenomen de histerezis.

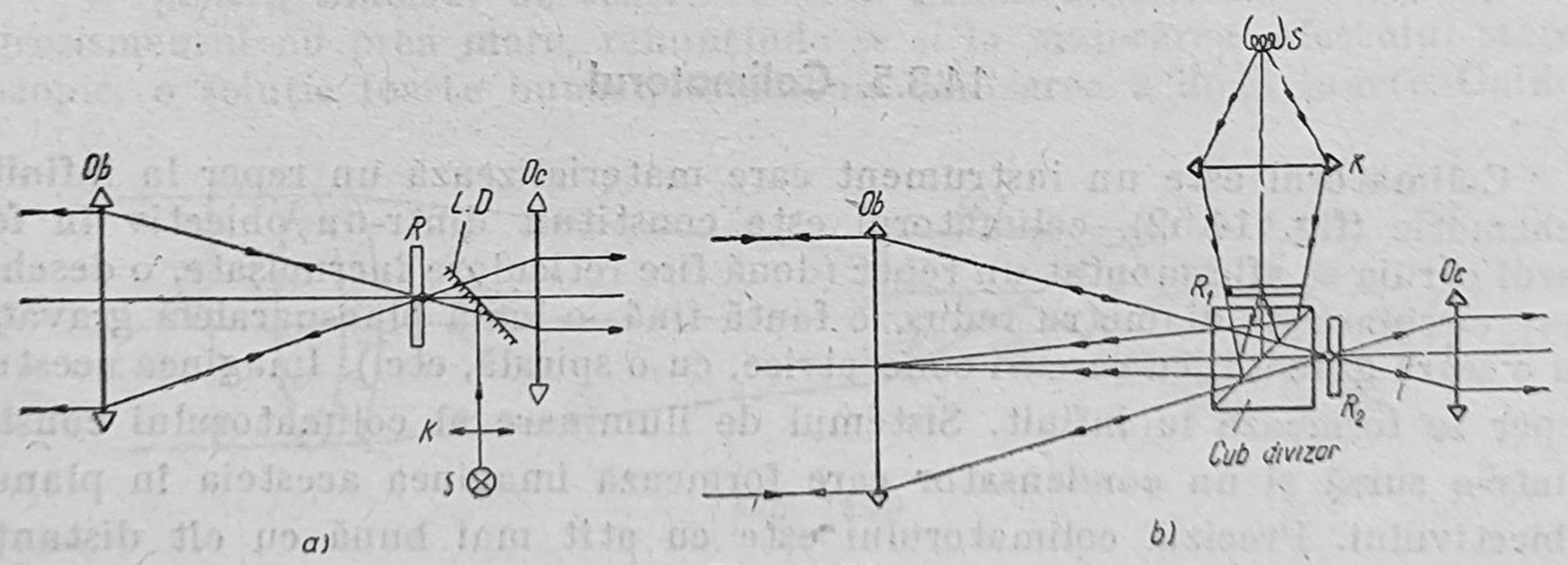


Fig. 14.53

Luneta autocolimatoare reprezintă un colimator la care s-a adăugat un ocular (fig. 14.53, a). Imaginea la infinit a reticulului este reflectată către lunetă de o oglindă plană, perpendiculară pe axa optică ; razele luminoase care pleacă din planul focal al obiectivului se reîntorc pe același drum, făcînd

ca imaginea finală să se suprapună peste reticulul însuși. Nu se realizează coincidența în cazul nereglării la infinit a lunetei (reticulul nu este plasat exact în planul focal al obiectivului) sau dacă oglinda nu este perfect perpendiculară pe axa optică a lunetei (abaterea de la perpendicularitate poate fi măsurată : $\alpha = x/2f$ radiani, unde x reprezintă depărtarea liniară între reticul și imaginea sa, măsurată în planul focal).

Ocularele cele mai utilizate la lunetele autocolimatoare sînt de tip Ramsden, deoarece acestea au planul focal obiect, în care se formează imaginea reală dată de obiectiv, în afară. Între reticulul R plasat în focarul obiect al ocularului și lentila de cîmp a acestuia se montează lama semireflectantă la 45°, pentru iluminarea reticulului ; acest montaj necesită un spațiu relativ mare între focarul obiect și lentila de cîmp a ocularului, ceea ce duce la utilizarea de oculare Ramsden cu grosismente reduse. Pentru a putea utiliza oculare mai puternice, care au distanța între focarul obiect și lentila de cîmp foarte mică, se introduce un reticul-obiect în afara axei (orificiu, fantă, miră, fire reticulare), iar lama semireflectantă la 45° se montează între obiectiv și reticulul ocularului (fig. 14.53, b).

Metoda autocolimației asigură o precizie foarte bună în reglajele de perpendicularitate, paralelism, în verificările rectilinității, planeității etc.

14.9. Microscopul

Microscopul este constituit esențial din două sisteme optice convergente, obiectivul și ocularul, fixate la extremitățile unui tub, care poate fi deplasat în lungul axei pentru a fi apropiat sau depărtat de obiect (fig. 14.54, a). De asemenea, un rol important îl are sistemul de iluminare, în care condensorul joacă rolul principal. Obiectul este plasat foarte aproape de focarul $\bar{F}_{Ob}$ al obiectivului, care are distanța focală foarte scurtă și care formează o imagine reală mărită în planul focal $\bar{F}_{Oc}$ al ocularului, care acționează ca o lupă, furnizînd ochiului normal o imagine situată la infinit. Formînd diferite combinații de obiective și oculare se obțin valori diferite ale grosismentului. Pentru asigurarea interschimbabilității obiectivelor și ocularelor, utilizînd același tub, s-au stabilit dimensiunile de bază pentru microscoape de laborator (fig. 14.54, b). În STAS 6851/2-75 sînt indicate următoarele valori ale dimensiunilor de bază : $l_1 = 45$ mm, $l_2 = 150$ mm, $l_3 = 10$ mm, $c = 195$ mm, $L_T = 160$ mm.

În ceea ce privește mersul razelor prin microscop, poziția diafragmei de deschidere nu este mereu aceeași, variind în funcție de caracteristicile constructive. În orice caz, diafragma nu se află în ocular ; ea poate fi constituită din montura primei lentile (fig. 14.54, a), sau situată în sistemul de iluminare (fig. 14.54, c). În cazul microscoapelor de măsurare sau la obiectivele puternice, pupila de ieșire a obiectivului se află în focarul imagine F'_{OB}.

În cazul diafragmei de deschidere constituită de montura primei lentile, caracteristicile microscopului sînt următoarele :

— grosismentul microscopului $\Gamma_M = \beta_{Ob} \cdot \Gamma_{Oc}$; $\Gamma_{Oc} = 250/f'_{Oc}$

— apertura numerică $A = n \sin \sigma_0$

— limita de rezoluție $y_{min} = 0{,}61\ \lambda/A$.

Ținînd seama de mărirea transversală a obiectivului $\beta_{ob} = y'_{min}/y_{min}$ și de relația $\sigma'_{min} \simeq \operatorname{tg} \sigma'_{min} = y'_{min}/f'_{oc}$, se pune condiția ca $\sigma'_{min} \geqslant \varepsilon_0$, unde $\varepsilon_0 = 1' \simeq 3{,}3 \cdot 10^{-4}$ radiani este limita de rezoluție a ochiului. Rezultă o relație care delimitează parametrii tehnici ai microscopului

$$A \gtrsim \beta_{ob}/f'_{oc} \text{ [mm]}. \tag{14.80}$$

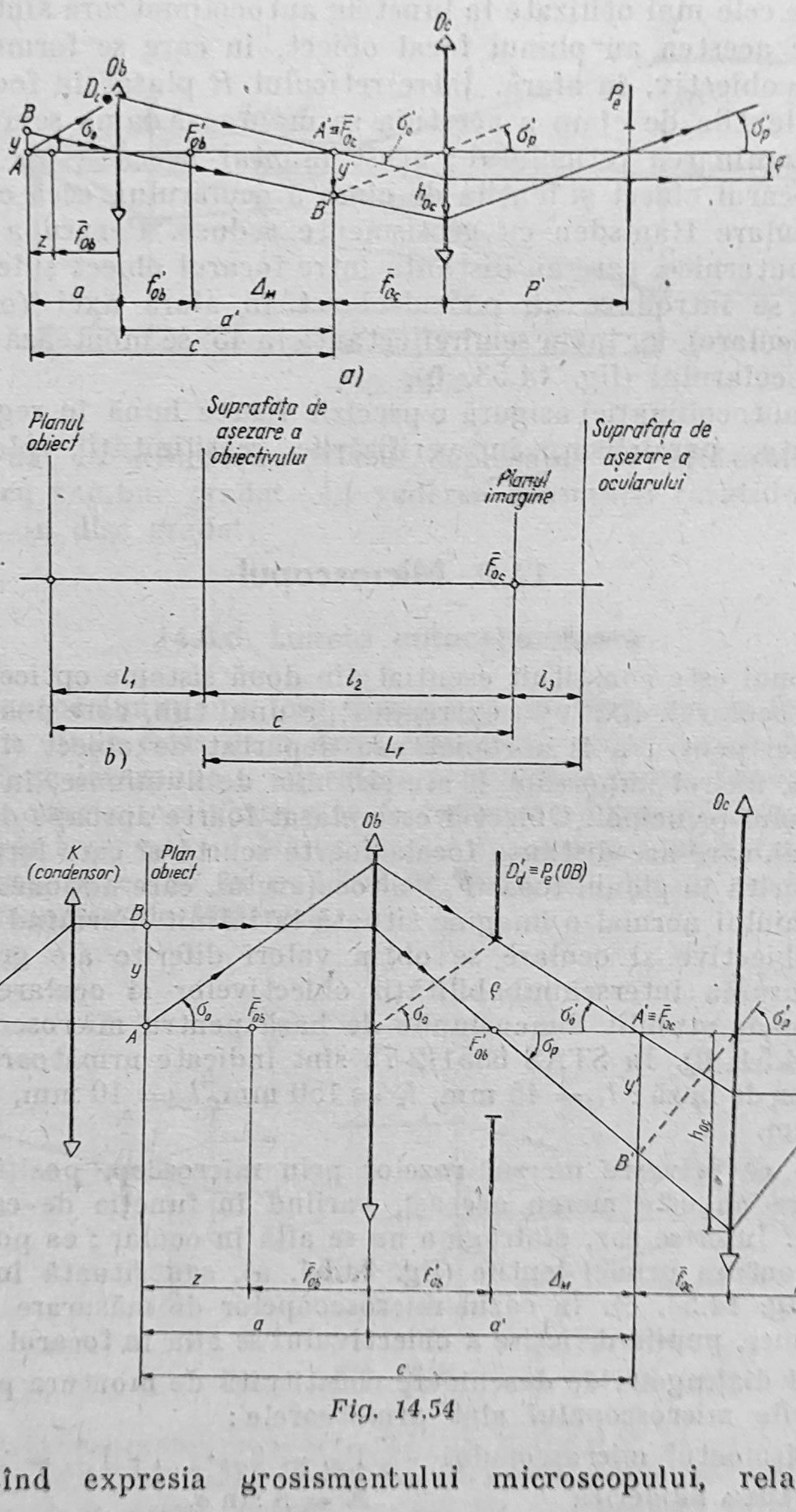


Fig. 14.54

Introducînd expresia grosismentului microscopului, relația (14.80) devine

$$A \gtrsim (\Gamma_M)_{min}/250.$$

Mărirea transversală a obiectivului: $\beta_{OB} = \frac{2y'}{2y} = \frac{\Delta_M}{f_{OB}} = \frac{f'_{OB}}{z}$. Valorile măririlor sînt normalizate în STAS 7353/81.

Obiectivul de microscop, verificînd legea sinusurilor $ny \sin \sigma_0 = n'y' \sin \sigma'_0$, rezultă o relaţie între apertura numerică, raza pupilei de ieşire şi mărirea transversală

$$\sin \sigma'_0 \simeq \operatorname{tg} \sigma'_0 = \frac{\rho'}{f'_{Oc}} \rightarrow \frac{A}{\rho'} = \beta_{Ob} \frac{1}{f'_{Oc}} = \frac{\Gamma_M}{250}, \tag{14.81}$$

relaţie, comparabilă cu (14.58), care furnizează diametrul pupilei de ieşire.

Ţinînd seama de expresia clarităţii geometrice în cazul microscopului, pupila de ieşire trebuie să îndeplinească condiţia $\rho' \geqslant \rho_0$ unde ρ_o reprezintă raza pupilei ochiului. Poziţia pupilei de ieşire se determină din figura 14.54, a, urmărind mersul razei pupilare principale:

$$p' = \frac{f'_{Ob} + \Delta_M + f'_{Oc}}{f'_{Ob} + \Delta_M} f'_{Oc} \tag{14.82}$$

În general, ocularele se pot dimensiona transversal pentru două mărimi ale cîmpului:

— cîmp normal $2y' \leqslant 20$ mm;
— cîmp mare $2y' \leqslant 28$ mm.

Cîmpul imagine unghiular rezultă: $\operatorname{tg} \sigma'_p = y'/f'_{Oc}$ şi poate fi comparat cu cîmpul unghiular al ochiului imobil:

$$\sigma_o = 15°.$$

În cazul microscopului avînd pupila de ieşire a obiectivului în F'_{OB} (fig. 14.54, c), de diametru 2ρ, mărimea pupilei de ieşire a microscopului este dată de mărirea transversală produsă de reprezentarea ocularului

$$\beta_p(Oc) = \frac{2\rho'}{2\rho} = \frac{p'}{\Delta_M + f'_{Oc}} = \frac{f'_{Oc}}{\Delta_M}$$

relaţie care furnizează atît mărimea $2\rho'$, cît şi poziţia p' pupilei de ieşire a microscopului.

a) *Obiective de microscop.* Obiectivele de microscop pot fi clasificate în patru categorii:

— obiective de putere mică, cu apertură numerică $A < 0{,}50$;
— obiective de putere medie, avînd $A \in [0{,}50\ ;\ 0{,}65]$;
— obiective uscate puternice, avînd $A \in [0{,}65\ ;\ 0{,}95]$;
— obiective cu imersie, la care $A > 1$.

Condiţiile care trebuie îndeplinite variază în funcţie de categorie. Toate obiectivele de microscop trebuie corectate la aberaţia de sfericitate şi coma şi acromatizate axial pentru radiaţiile C şi F (cele care lucrează în domeniul vizibil). Pentru obiectivele de putere mare este necesară reducerea spectrului secundar, ceea ce se obţine asigurînd coincidenţa focarelor produse de trei radiaţii. Curbura cîmpului, prezentă la toate obiectivele utilizate curent, nu aduce inconveniente majore, cel puţin pentru microscoapele de observare vizuală. În cazul înregistrării fotografice, se utilizează obiective prezentînd planeitate anastigmatică.

Pentru obiectivele cu apertura numerică cuprinsă între 0,15 și 0,5 și distanța focală între 25 și 10 mm s-a recurs la forma dată de Lister: două dublete lipite, acromate, la care imaginea dată de primul dublet este obiect pentru al doilea, iar puterile sînt descrescătoare de la primul la al doilea (fig. 14.55, a).

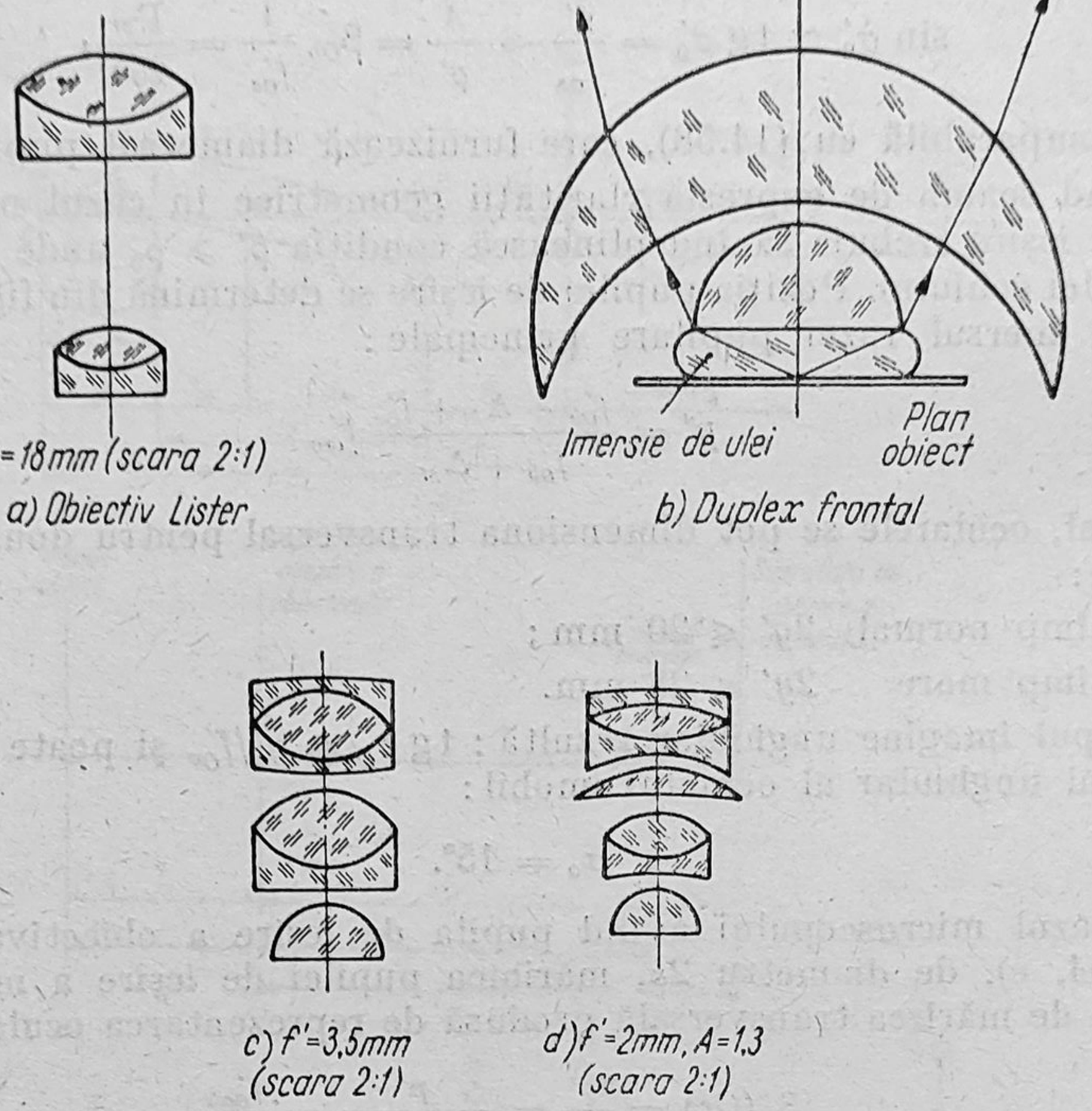


Fig. 14.55

Utilizarea ca lentilă frontală a unei semisfere (semisfera Amici), componentă esențială a combinației numită *duplex frontal* (fig. 14.55, b), ca și a imersiei de ulei a permis creșterea substanțială a aperturii numerice și reducerea corespunzătoare a limitei de rezoluție a microscopului de cercetare. De asemenea, Amici a determinat influența lamei *acoperă-obiect* asupra calității imaginii: această influență, care constă într-o supracorecție, este cu atît mai pronunțată cu cît apertura este mai mare și lama mai groasă. Așadar, pentru a compensa această influență, obiectivele trebuie subcorectate pentru o grosime de lamă determinată (în general s-a adoptat 0,17 mm).

Firmele producătoare de microscoape, puține la număr și foarte specializate, nu dau caracteristici numerice în privința obiectivelor. După obiectivele acromate, constituite dintr-un singur dublet și obiectivele de tip Lister formate din două dublete separate, urmează obiectivele acromatice medii și puternice formate dintr-o lentilă semisferică, urmată de două dublete și uneori triplete (apertura numerică cuprinsă între 0,2 și 0,8, iar distanța focală între 15 și 4 mm; fig. 14.55, c). Peste aceste puteri urmează obiecti-

vele cu imersie de ulei, avînd apertura numerică $A \in [0{,}7\ ;\ 1{,}3]$ și distanța focală f'_{ob} între 4,5 și 1,8 mm. În forma cea mai simplă, aceste obiective conțin patru componente (fig. 14.85, d), un duplex frontal urmat de două dublete (6 lentile cu 8 suprafețe libere).

Urmează obiectivele foarte puternice, care se apropie cel mai mult de limita de rezoluție a microscopului optic, numite *apocromate*, deoarece satisfac condiții de acromatizare severe (coincidența focarelor pentru trei radiații), realizează anularea aberației de sfericitate pentru două radiații, cu apertura numerică $A \in [1\ ;\ 1{,}4]$ și distanța focală f'_{ob} între 5 și 1,5 mm. Construcția acestor obiective este foarte complexă, conținînd cel puțin cinci componente, un duplex frontal urmat de un dublet apoi de două triplete (10 lentile cu 10 suprafețe libere).

În ultimii ani a apărut o generație nouă de obiective pentru microscop : *planapocromate cu cîmp mare* (imaginea intermediară are un diametru de 28 mm), care satisfac condiția lui Petzval de eliminare a curburii cîmpului, aceasta permițînd extinderea microfotografiei și atașarea camerelor de luat vederi la microscoapele de cercetare. Schemele optice ale unor astfel de obiective sînt prezentate în figura 14.56, a și b, iar în figura 14.56, c obiectivul planacromat Boegehold care a stat la baza acestei noi generații de obiective.

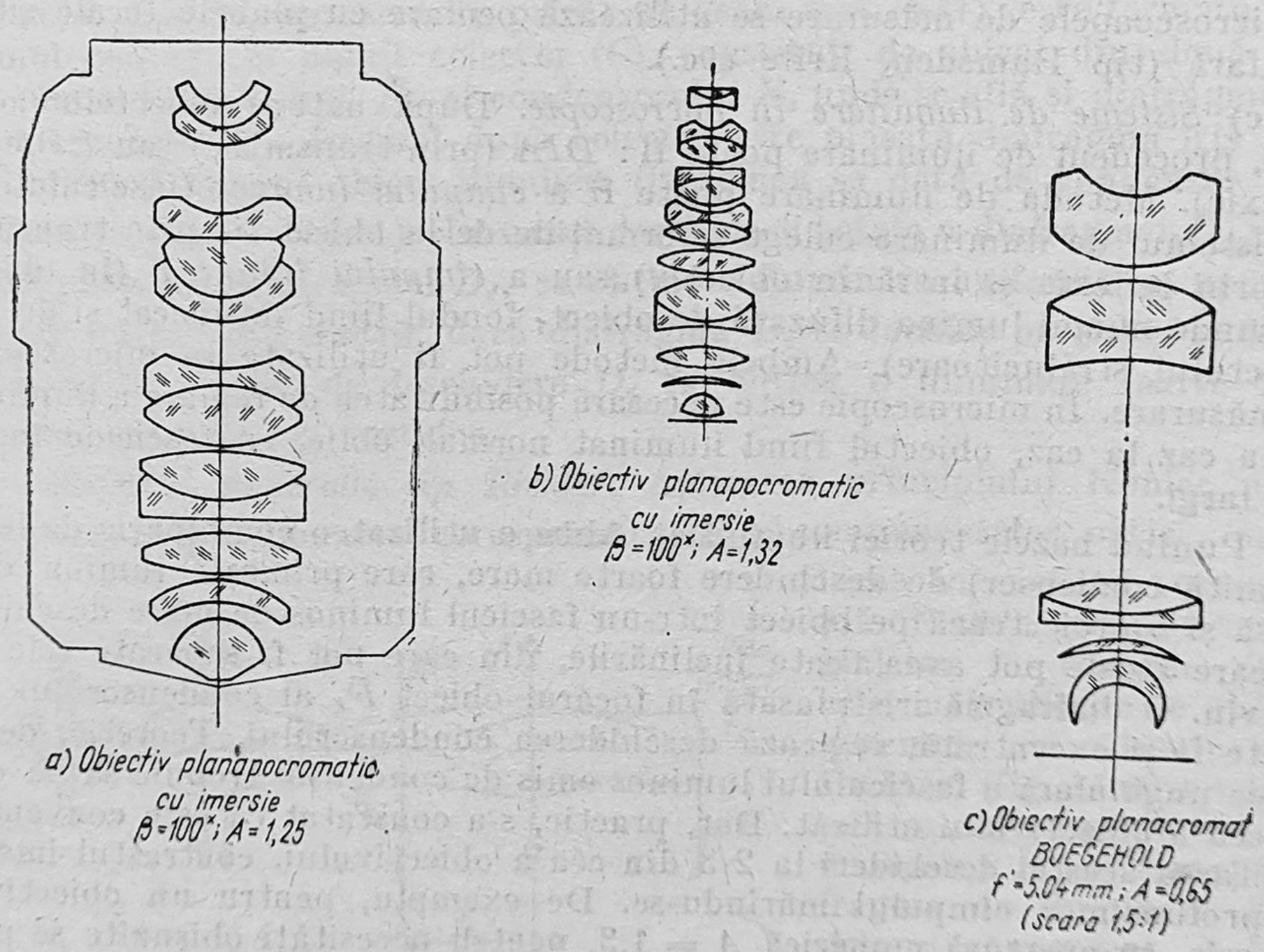


Fig. 14.56

O categorie specială o constituie obiectivele microscoapelor de măsurare. Acestea trebuie corectate la aberațiile de curbură a cîmpului și distorsiune, și mai puțin la aberațiile cromatice, deoarece lucrează în lumină monocromatică. Diferite tipuri constructive sînt prezentate în figura 14.57.

b) *Oculare de microscop.* Fasciculul luminos care formează imaginea în planul focal obiect al ocularului are o deschidere unghiulară mică $\simeq 7°$ (condiționată de raportul diametrului tubului, 20 mm și lungimea sa, 160 mm), așa încît ocularul nu are de satisfăcut condiții atît de severe ca obiectivul; de notat că nu este necesară o corecție riguroasă a aberației de sfericitate. Ceea ce se impune ocularului de microscop este o reducere pe cît posibilă a aberațiilor extraaxiale, a astigmatismului, a aberației cromatice de mărire și, într-o măsură mai mică, a distorsiunii. În ceea ce privește curbura cîmpului, aceasta este pronunțată la obiectivele medii și la cele puternice, astfel încît o corecție a ocularului nu ar produce decît o ameliorare nesemnificativă.

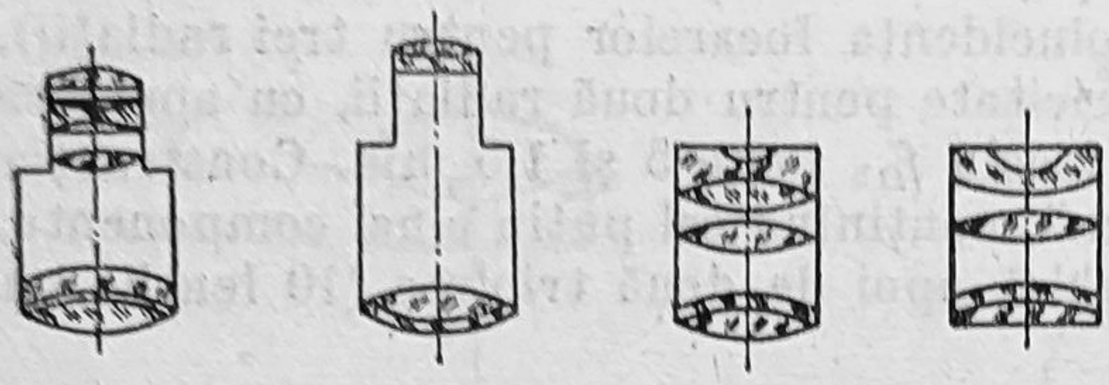


Fig. 14.57

Pentru grosismente mici se adoptă în general oculare Huygens care nu prezintă nici o particularitate față de cele utilizate la lunete. În vederea compensării aberațiilor geometrice ale obiectivelor se utilizează oculare compensatoare constituite dintr-o lentilă de cîmp și un dublet lipit. De asemenea, la microscoapele de măsurare se utilizează oculare cu planele focale situate în afară (tip Ramsden, Erfle etc.).

c) *Sisteme de iluminare în microscopie.* După natura obiectelor observate, procedeul de iluminare poate fi: *DIA* (prin transmisie) sau *EPI* (prin reflexie). Metoda de iluminare poate fi a *cîmpului luminos* (fasciculul emis de sistemul de iluminare culege informațiile de la obiect fie prin transmisie, fie prin reflexie și intră în obiectiv) sau a *cîmpului întunecat* (în obiectiv pătrunde numai lumina difuzată de obiect, fondul fiind întunecat și detaliile obiectului strălucitoare). Ambele metode pot fi utilizate la microscoapele de măsurare. În microscopie este necesară posibilitatea de reglare a iluminării, de la caz la caz, obiectul fiind iluminat normal, oblic, cu fascicule înguste sau largi.

Punînd bazele teoriei iluminării, Abbe a utilizat o combinație de lentile (numită condensor) de deschidere foarte mare, care primește lumina de la sursă și o proiectează pe obiect într-un fascicul luminos de mare deschidere, în care razele pot avea toate înclinările, din care pot fi separate cele care convin. O diafragmă iris plasată în focarul obiect $\bar{F}_k$ al condensorului, care poate fi și excentrată, reglează deschiderea condensorului. Teoretic, deschiderea unghiulară a fasciculului luminos emis de condensor trebuie să fie egală cu cea a obiectivului utilizat. Dar, practic, s-a constatat că este convenabilă limitarea acestei deschideri la 2/3 din cea a obiectivului, contrastul imaginii și profunzimea cîmpului mărindu-se. De exemplu, pentru un obiectiv cu imersie, cu apertură numerică $A = 1{,}3$, pentru necesități obișnuite se poate utiliza un condensor cu apertura numerică 0,95.

Deoarece condensorul nu este un sistem destinat formării imaginii, nu este necesară corectarea la aberațiile cromatice, iar cele geometrice se corectează sumar. În general, condensorul este de forma unui obiectiv inversat. Cel mai simplu condensor, utilizat pentru deschideri mici, este constituit dintr-o singură lentilă convergentă. Pentru aperturi numerice între

0,5—0,6 condensorul este format dintr-o semisferă Amici precedată de o lentilă convergentă (fig. 14.58, a). Pentru aperturi numerice supraunitare condensorul are trei lentile : o lentilă colectoare și un duplex așezat invers (fig. 14.58, b). Condensorii astfel constituiți au o distanță focală de ordinul 10 mm și apertura numerică reglabilă cu ajutorul diafragmei iris montată în focarul obiect $\bar{F}_K$ (către sursa de lumină), între valorile $A \in (0{,}9\ ;\ 1{,}3)$; diametrul condensorilor este cuprins între 25—30 mm.

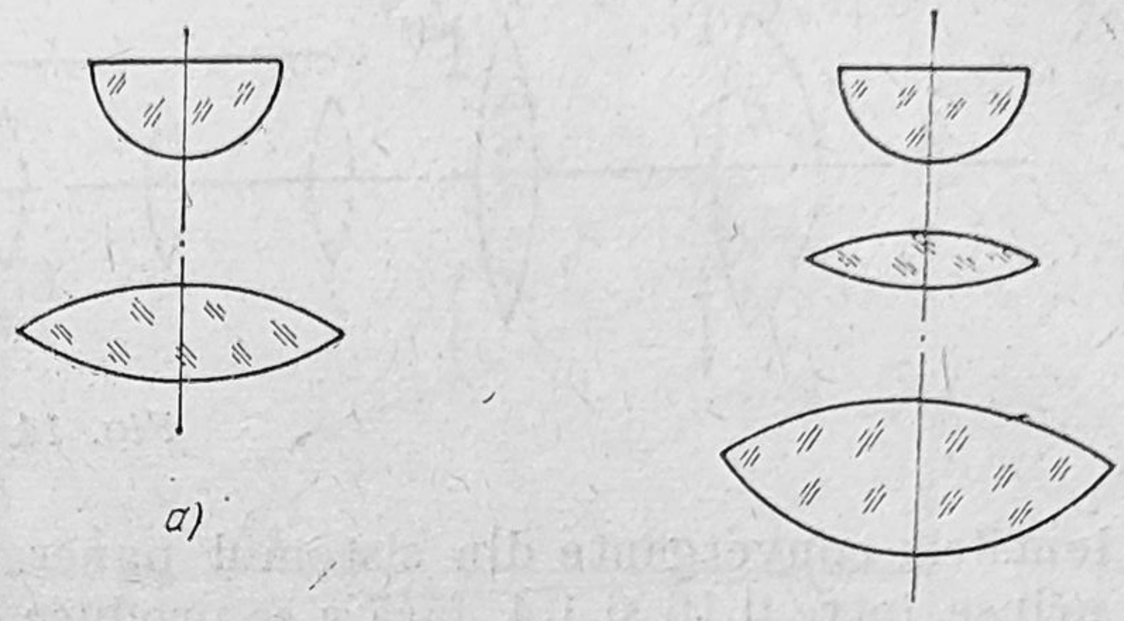


Fig. 14.58

Sistemul de iluminare tip Köhler răspunde următoarelor cerințe în microscopie : cîmpul obiect poate fi întins și trebuie iluminat uniform sau este foarte restrîns și trebuie iluminat intens. Pentru a putea trece de la o situație la alta în mod rapid și cu minimum de reglaj, sistemul Köhler are la bază următorul principiu (fig. 14.59) : imaginea sursei de lumină S, deseori reprezentată printr-un geam mat (GM), este formată de sistemul convergent numit colector (C), constituit de obicei din două lentile, în planul focal obiect $\bar{F}_K$ al condensorului K, unde se află și diafragma iris a condensorului D_K. Imediat după colector este plasată diafragma iris D_c care delimitează cîmpul obiect iluminat (imaginea sa dată de condensor se formează în planul obiect). În cazul deschiderii totale a diafragmei D_c și închiderii parțiale a diafragmei D_d, se obține o iluminare uniformă a unui cîmp obiect întins ; din contră, dacă diafragma D_c se închide parțial și se deschide complet diafragma de deschidere D_d se obține o iluminare foarte intensă a unui cîmp obiect restrîns.

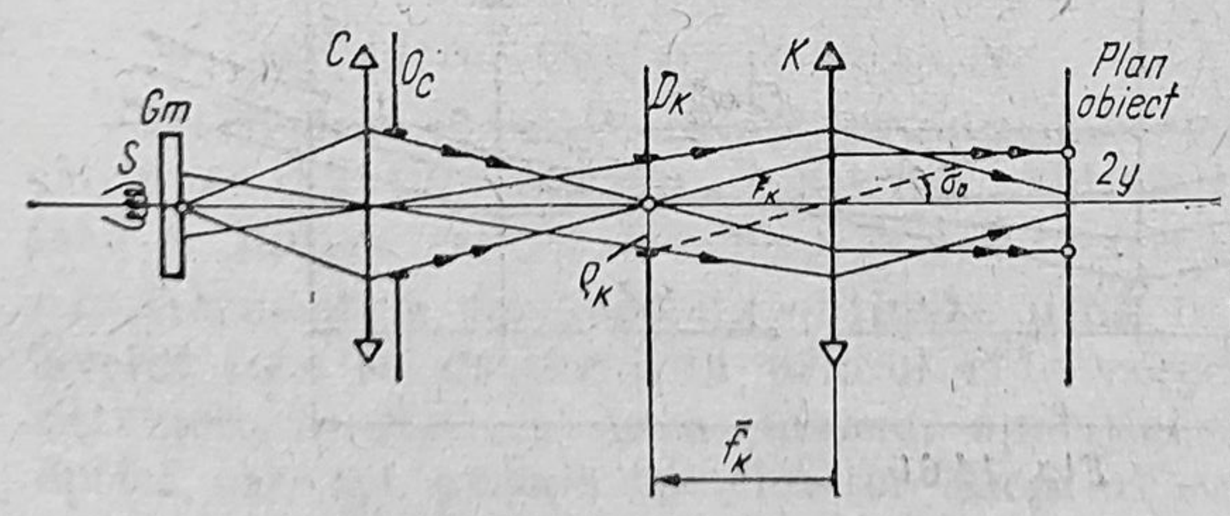


Fig. 14.59

Sistemul pancratic tip Richter. Aplicarea principiului Köhler necesită alegerea și poziționarea corespunzătoare a componentelor optice, manipularea lor nefiind tocmai simplă. Pentru simplificarea reglajelor în cazurile practice cele mai diferite se utilizează sistemul de iluminare tip Richter (fig. 14.60). Acest sistem se compune dintr-o sursă de lumină S, colectorul C, diafragma de iluminare D_c, un sistem convergent L_c după care urmează o diafragmă de deschidere D_d și sistemul pancratic *S.P.* constituit dintr-o lentilă centrală divergentă fixă, încadrată de două lentile convergente, cuplate mecanic astfel încît să se poată deplasa axial, simetric față de lentila divergentă ; urmează condensorul microscopului K avînd focarul $\bar{F}_K$. Colectorul C formează imaginea sursei în planul

diafragmei de deschidere D_d. Sistemul convergent L_c transmite imaginea diafragmei de iluminare D_c prin sistemul pancratic *S.P.* în planul focal obiect $\bar{F}_K$ al condensorului. Sistemul pancratic împreună cu sistemul convergent L_c au mărirea $\beta = 1$ între planele conjugate D_c și $\bar{F}_K$. Deplasînd

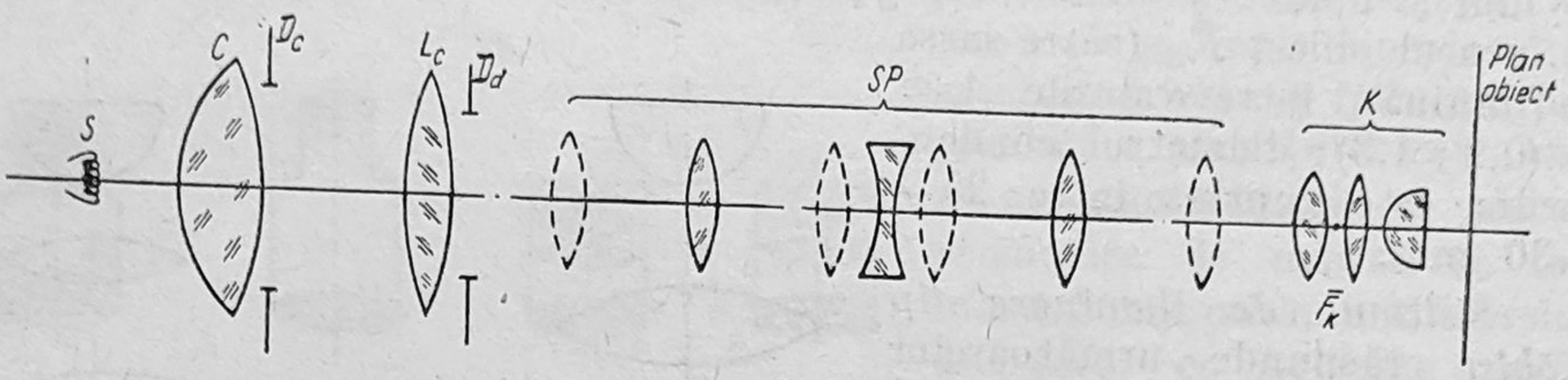


Fig. 14.60

lentilele convergente din sistemul pancratic se obțin aperturi numerice cuprinse între 0,16 și 1,4, fără a se produce deplasări axiale ale imaginii finale.

Microscopul cu lentilă de tub. La acest microscop obiectul este situat în focarul obiectivului, imaginea reală fiind focalizată cu ajutorul unei lentile de tub (fig. 14.61). Grosismentul se calculează, conform STAS 7353/2-81, cu relația

$$\Gamma_M = \Gamma_{Ob} q_\infty \Gamma_{Oc}, \tag{14.84}$$

unde $\Gamma_{Ob} = \frac{250}{f'_{Ob}}$ este grosismentul obiectivului, $q_\infty = \frac{f'_{lt}}{250}$ factorul de tub, iar $\Gamma_{Oc} = \frac{250}{f'_{Oc}}$ grosismentul ocularului.

Se observă că obiectivul împreună cu lentila de tub (poate fi și un dublet lipit) formează un sistem optic, des întîlnit în aparatele optice, care dă o imagine y' mărită

$$\beta = y'/y = f'_{lt}/f'_{Ob} \tag{14.85}$$

astfel încît grosismentul microscopului devine

$$\Gamma_M = \beta \Gamma_{Oc} \tag{14.86}$$

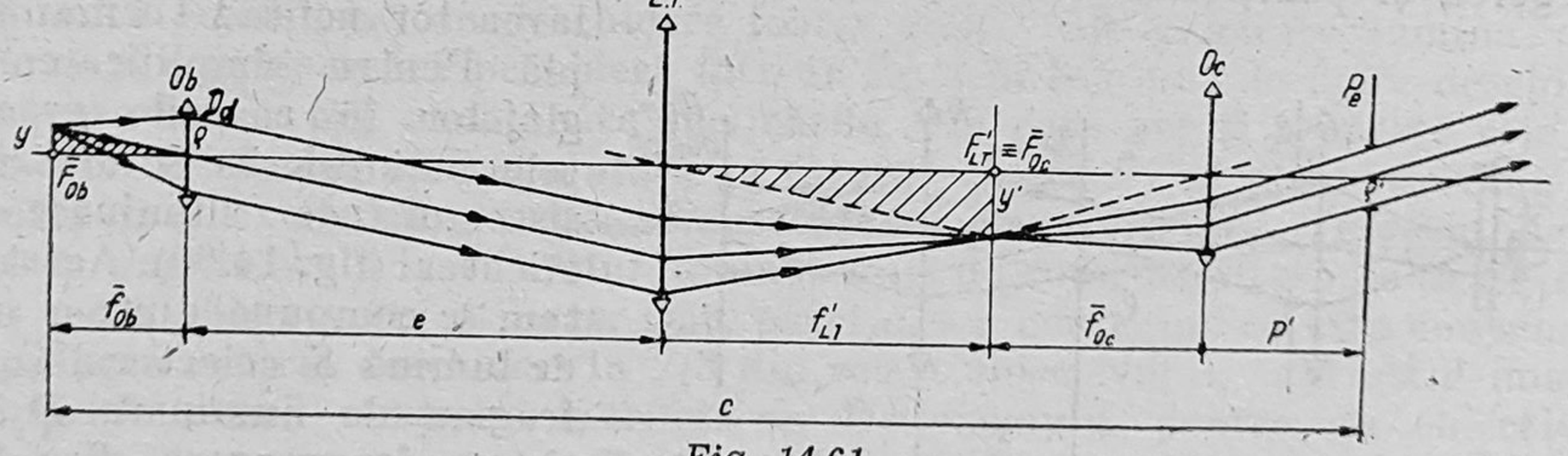


Fig. 14.61

Remarcă. Lentila de tub împreună cu ocularul formează o lunetă care observă imaginea formată la infinit de obiectiv.

Microscopul cu proiecție. Pentru ușurarea observării sau măsurării cu microscopul se utilizează în locul ocularului obișnuit un *ocular de proiecție*, a cărui poziție față de imaginea dată de un obiectiv este definită prin z_{Oc}

(fig. 14.62). În acest caz caracteristica principală a microscopului este mărirea totală :

$$\beta_M = \beta_{Ob}\beta_{Oc} = \frac{z'_{Ob}}{f'_{Ob}} \frac{z'_{Oc}}{f'_{Oc}}. \qquad (14.87)$$

Ocularul de proiecție poate fi convergent (pozitiv) sau divergent (negativ) corectat de curbura cîmpului.

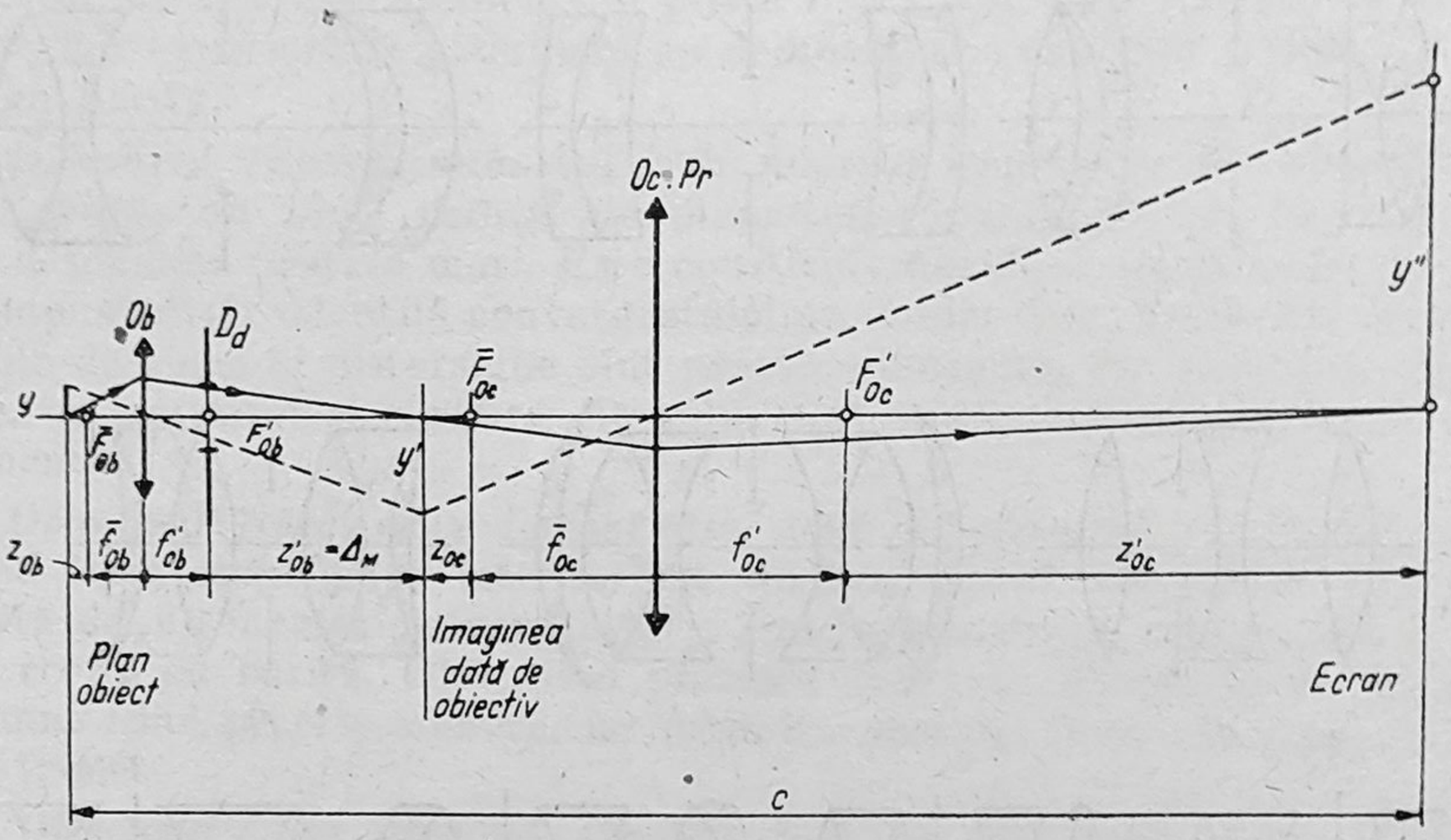


Fig. 14.62

14.10. **Obiectivul foto**

Caracteristicile generale ale obiectivului foto sînt :
— mărirea transversală $\beta = y'/y$;
— scară de reproducere $1 : \beta$;
— distanță focală $y'/\sigma = f'$;
— număr de apertură $N = f'/2\rho$;
— deschidere relativă $k = 1 : N$.

Claritatea obiectivului și profunzimea cîmpului pot fi estimate prin calcul cu relațiile (14.68) și (14.74). Aplicînd legea sinusurilor obiectivului foto se obține relația (14.60) : $N = (2 \sin \sigma')^{-1}$.

Rezultatele remarcabile obținute pînă în prezent în construcția obiectivelor foto se datoresc în primul rînd cercetărilor în domeniul calculelor sistemelor optice și, de asemenea, apariției unor sorturi variate de sticlă optică care au permis opticienilor adoptarea unor soluții optime. Condițiile de calitate care se impun obiectivelor foto sînt mult mai complexe decît cele ce se pun obiectivelor de lunetă și chiar obiectivelor de microscop. În afara faptului că trebuie eliminate aberațiile proprii celor două clase de sisteme optice, adică aberația de sfericitate, coma, aberațiile cromatice de poziție și de mărire, trebuie suprimate și aberațiile extraaxiale care apar la repre-

zentarea cîmpurilor întinse : eliminarea astigmatismului și a curburii cîmpului (realizarea planeității anastigmatice), de asemenea reducerea pe cît posibil a distorsiunii.

Primele obiective cu performanțe notabile, considerate obiective fundamentale, sînt reprezentate schematic în figura 14.63 :

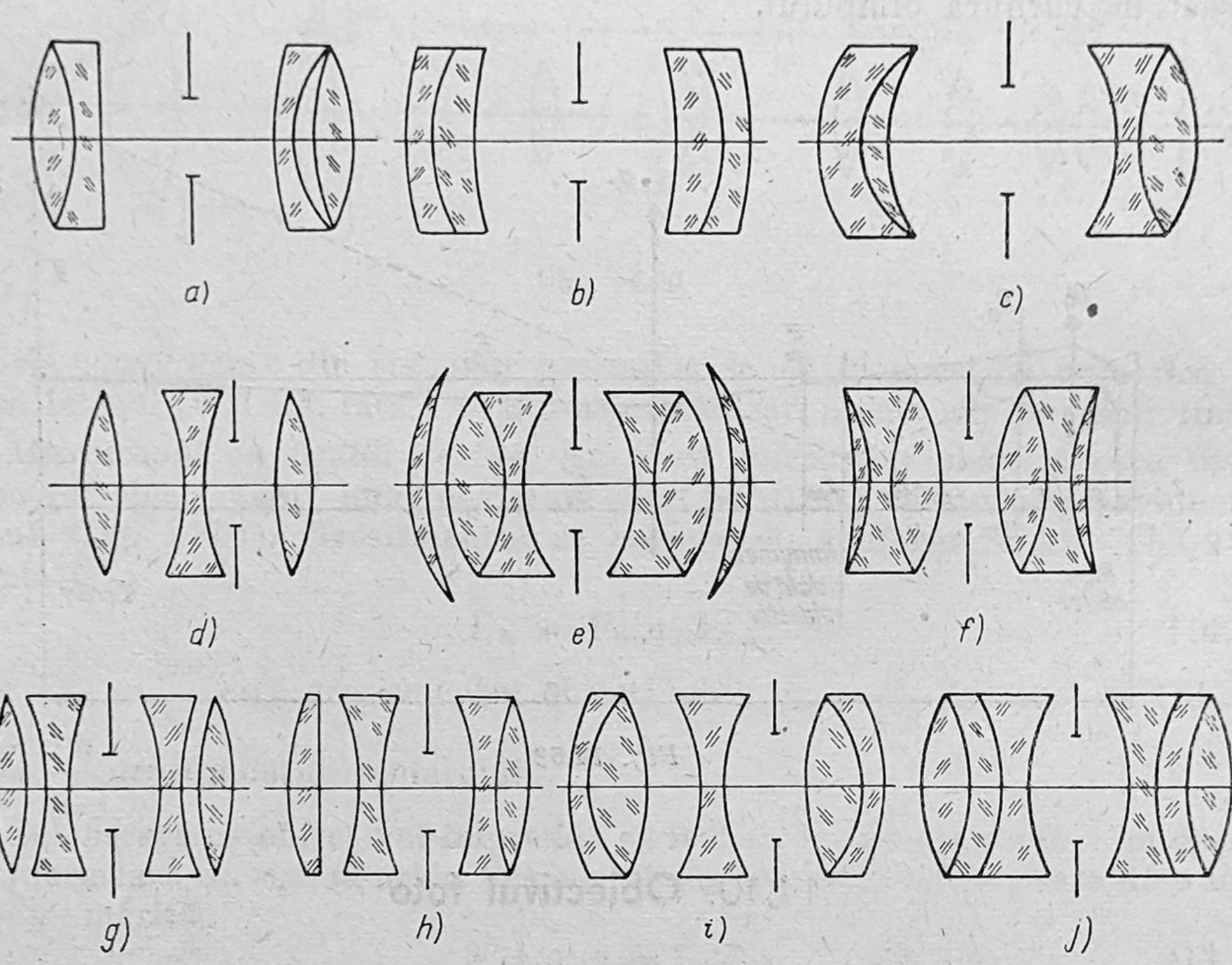


Fig. 14.63

a) *Obiectivul Petzval*, format din două componente separate printr-un interval larg : un dublet lipit crown-flint și un al doilea dublet dezlipit flint-crown, care are la mijloc o lamă subțire de aer în formă de menisc convergent. În afara curburii cîmpului, aberațiile reziduale denotă o bună corecție, obiectivul Petzval mai fiind încă utilizat în cazurile în care se urmărește o bună luminozitate și un cîmp imagine mediu (portrete, proiecție, fotografii astronomice).

b) *Obiectivul aplanat Steinheil* este constituit din două dublete identice, separat acromatizate și corectate de aberația de sfericitate, dispuse simetric față de diafragma de deschidere. Acest obiectiv este corectat foarte bine la aberația de sfericitate și acromatismul de poziție ca și, practic, aberațiile de coma și de distorsiune. Pentru o distanță convenabil aleasă între cele două componente (56,4% din distanța focală întreagă) se realizează aproximativ și planeitatea anastigmatică.

c) *Obiectivul Protar* este primul la care s-a realizat planeitatea anastigmatică. Este constituit din două dublete, primul normal, al doilea anormal (indicele de refracție al sticlei crown mai mare decît cel al sticlei flint), acromatizate separat, celelalte aberații compensîndu-se reciproc.

d) *Tripletul Taylor* reprezintă una dintre cele mai valoroase invenții în domeniul obiectivelor fotografice, permițînd rezolvarea cu mijloace de o simplitate remarcabilă a condițiilor impuse acestor sisteme. Acest obiectiv este format din trei lentile independente : o lentilă biconcavă între două lentile biconvexe. Tripletul Taylor este unul din're puținele sisteme la care este posibil antecalculul analitic ; el poate fi realizat cu sticle crown și flint ordinare, dar experiențele ulterioare au demonstrat avantajul utilizării sticlei crown cu barită.

e) *Obiectivul Planar*, cunoscut sub numele impropriu de obiectiv tip Gauss, atinge un nivel ridicat de planeitate anastigmatică, fiind utilizat pentru deschideri relative mari. Este constituit din două părți simetrice, fiecare compusă dintr-o lentilă convergentă și un dublet lipit. Datorită simetriei, aberațiile de coma și distorsiune sînt practic eliminate, iar aberațiile de sfericitate, astigmatism și curbura cîmpului sînt suprimate în cele două părți componente.

f) *Obiectivul Höegh* este format din două triplete lipite anastigmate. Tripletul lipit anastigmat este format dintr-o lentilă biconcavă din flint încadrată de un menisc convergent și o lentilă biconvexă, din crown și, respectiv, crown cu barită. Obiectivul prezintă simetrie, aberațiile de coma și distorsiune fiind practic anulate, iar celelalte aberații fiind corectate pentru fiecare triplet.

g) *Obiectivul Celor* prezintă simetrie față de diafragma de deschidere. Aberația de sfericitate este redusă la deschideri relative de pînă la 1 : 5,6. Lentilele convergente sînt din crown cu barită (dens), iar cele divergente din flint borosilicat, spectrul secundar fiind redus. Obiectivul nu este prea răspîndit datorită numărului mare de suprafețe libere, de unde rezultă o pierdere importantă de flux luminos.

h) *Obiectivul Tessar* realizează planeitate anastigmatică pentru un unghi de deschidere $\simeq 30°$, asigură o luminozitate medie și poate fi utilizat în majoritatea cazurilor, cu excepția acelora care necesită superangulare. Dată fiind corecția foarte bună a distorsiunii (pînă la unghiuri de 35°) a fost considerat foarte mult timp ca cel mai bun obiectiv utilizat în fotogrammetrie. Deschiderea relativă a evoluat de la 1 : 6,3, la 1 : 4,5 și chiar la 1 : 3,5 și 1 : 2,8.

i) *Obiectivul Heliar* constituie o soluție derivată de la tripletul Taylor. Aberațiile reziduale sînt reduse pentru unghiuri pînă la 25°.

j) *Obiectivul Coliniar* este obiectiv fotografic aprocromat, utilizat la reproducerea în culori tricromatică (corectat pentru trei radiații) ; prezintă simetrie față de diafragma de deschidere, fiind format din două triplete lipite identice.

Pornind de la formele fundamentale prezentate mai sus, între care apariția planeității anastigmatice a constituit etapa cea mai importantă, cercetările în domeniul obiectivelor foto s-au orientat în următoarele direcții : obținerea unei luminozități din ce în ce mai mare ; mărirea cîmpului și a stigmatismului ; eliminarea distorsiunii ; fotografierea la distanță. Aceste cercetări au fost stimulate de expansiunea cinematografiei, de răspîndirea metodelor fotogrametrice, de progresele obținute în depunerile de straturi subțiri antireflex. ș.a. Tipurile și variantele de obiective

foto care au fost publicate în revistele de specialitate sau brevetele de invenţii sînt extrem de numeroase. Dintre ele, cele mai semnificative pot fi grupate, după caracteristica predominantă, în: obiective luminoase, obiective cu cîmp unghiular mare, teleobiective şi obiective cu distanţă focală variabilă.

14.10.1. Obiective luminoase

Numerele de apertură, normalizate internaţional, se află într-o progresie geometrică cu raţia $\sqrt{2}$: 0,7 ; 1 ; 1,4 ; 2 ; 2,8 ; 4 ; 5,6 ; 8 ; 11,3 ; 16 ; 23 ; 32 ; 45 ; 64 : Sînt considerate obiective luminoase cele care au deschiderea relativă mai mare decît 1 : 4,5. În literatura de specialitate se obişnuieşte să se indice caracteristicile unui obiectiv normalizat pentru focală unitară ($f' = 1$), astfel încît deschiderea relativă $k = D/f' = 1/N$ poate fi considerată deschiderea obiectivului (diametrul pupilei de intrare), deoarece : $D = f'/N$.

În funcţie de k, obiectivele luminoase se împart în trei categorii :

1°. *Obiective foto cu deschiderea relativă* $k \in [1 : 4,5 ; \ 1 : 2,8]$. Aceste obiective constituie perfecţionări moderne ale obiectivului Tessar şi ale tripletului Taylor.

2°. *Obiective cu deschiderea relativă* $k \in [1 : 2,8 ; \ 1 : 1]$. La baza dezvoltării acestor obiective au stat tripletul Taylor, obiectivul Planar şi obiectivul Petzval. Dintr-o primă grupă de obiective derivînd din tripletul Taylor fac parte (fig. 14.64) :

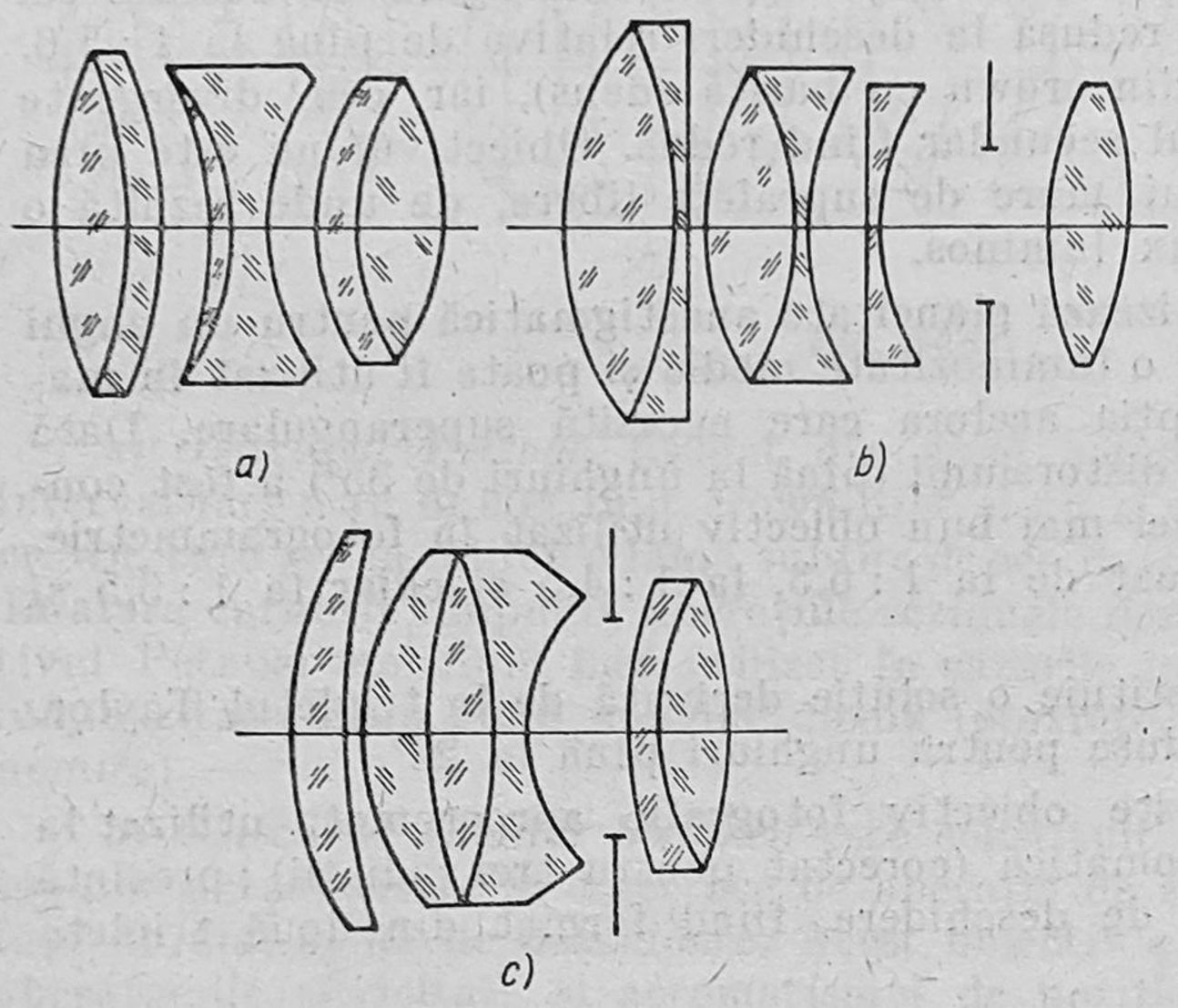


Fig. 14.64

a) *obiectivul Hektor* avînd deschiderea maximă $f'/2{,}5$ şi sumele lui Seidel (în focală unitară) $S_I = +0{,}377$, $S_{II} = +0{,}108$, $S_{III} = -0{,}005$, $S_{IV} = +0{,}399$, $S_V = 0{,}002$;

b) *obiectivul Ernostar* corectat foarte bine la aberaţiile de sfericitate şi coma pentru deschiderea maximă de $f'/2$; Sumele lui Seidel sînt : $S_I = +0{,}021$, $S_{II} = +0{,}037$, $S_{III} = +0{,}099$, $S_{IV} = +0{,}298$, $S_V = 0{,}441$;

c) *obiectivul Sonnar* caracterizat de deschiderea maximă $f'/2$, poate fi realizat cu distanţe focale cuprinse între 50 şi 250 mm. Astigmatismul şi curbura cîmpului sînt practic suprimate pentru înclinări pînă la 40°. Poate atinge deschiderea $f'/1{,}5$ fără a pierde din netitatea imaginii. Sumele lui Seidel au următoarele valori : $S_I = +0{,}522$, $S_{II} = -0{,}070$, $S_{III} = 0{,}108$, $S_{IV} = +0{,}266$, $S_V = -0{,}450$.

O altă grupă de obiective, denumite impropriu tip Gauss, derivă de fapt din obiectivul Planar. Din această grupă, mai reprezentative sînt cele reprezentate în figura 14.65 :

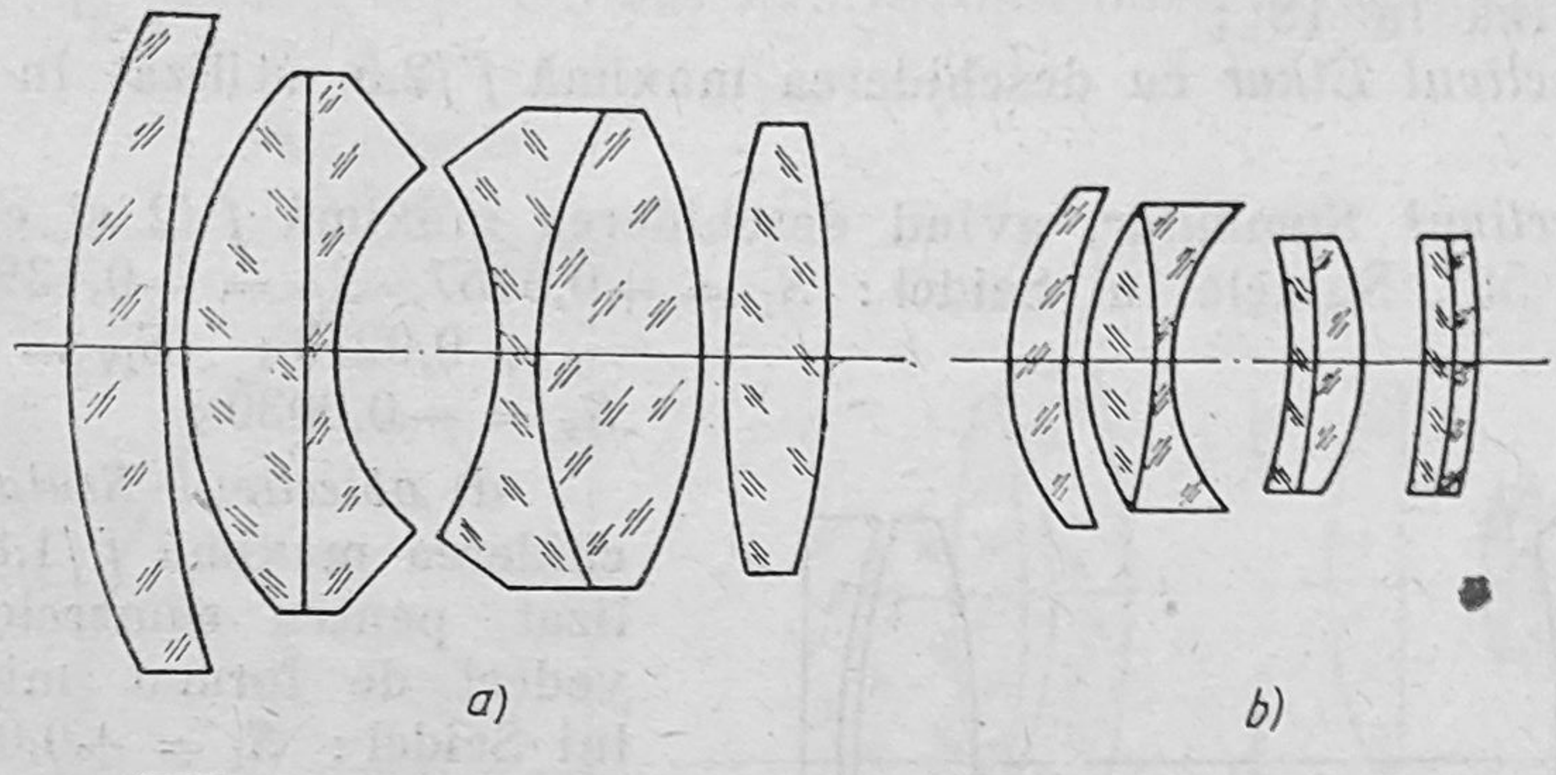


Fig. 14.65

a) *obiectivul tip Gauss* cu deschiderea maximă $f'/1{,}4$ avînd aberațiile de sfericitate și coma corectate, ca și astigmatismul și curbura cîmpului, pentru unghiuri pînă la 18° ;

b) *obiectivul Etkar* cu deschiderea maximă $f'/2{,}5$, utilizat în topografia aeriană ;

c) *obiectivul Summitar*, avînd deschiderea maximă $f'/2$ și cîmpul unghiular de 50°. Sumele lui Seidel : $S_I = +0{,}3157$, $S_{II} = +0{,}1395$, $S_{III} = +0{,}0273$; $S_{IV} = +0{,}2825$; $S_V = -0{,}0030$;

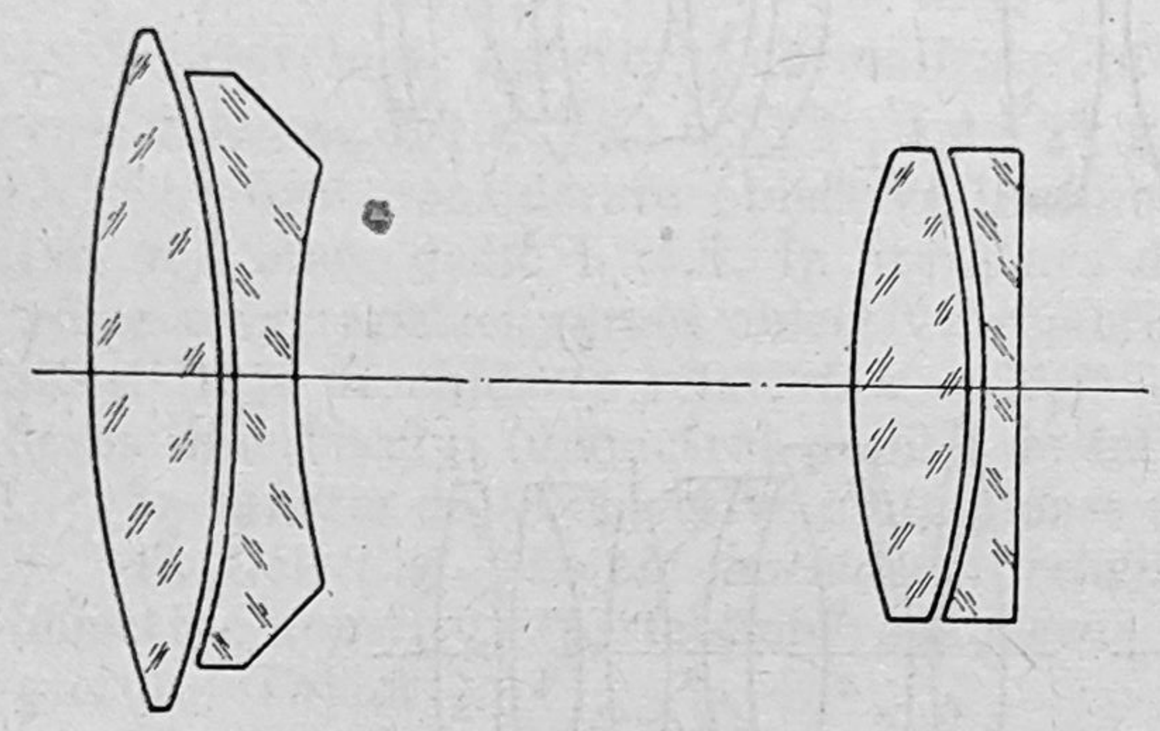


Fig. 14.66

d) *obiectivul Svitar* cu deschiderea maximă $f'/1{,}8$ este utilizat pentru camerele de luat vederi de format mic. Sumele lui Seidel : $S_I = +0{,}068$, $S_{II} = +0{,}029$, $S_{III} = -0{,}075$, $S_{IV} = +0{,}206$;

e) *obiectivul Aero-Xenon*, utilizat cu succes în fotografia aeriană are deschiderea maximă f' : 1,2 (poate da imagini clare și în lumină crepusculară) ;

f) *obiectivul Biotar*, cu deschiderea $f'/1{,}8$, se caracterizează prin prezența unei lentile de corecție care anulează curbura cîmpului. Apropierea (practic contactul) cu planul imagine nu lasă spațiul necesar dezvoltării aberațiilor de sfericitate și de culoare, dar aduce și un mare inconvenient din punct de vedere constructiv.

În sfîrșit, cea de-a treia grupă a obiectivelor foto cu deschidere relativă între 1 : 2,8 și 1 : 1 are la bază obiectivul de portrete Petzval. Din această grupă este reprezentativ obiectivul cu deschidere maximă $f'/1{,}4$ constituit din 4 lentile, prezentat în figura 14.66. Deoarece sticla optică *La K2*, din care sînt confecționate prima și a treia lentilă, conține toriu și prezintă o anumită radioactivitate, obiectivul este utilizat mai ales în proiecție.

3°. *Obiective cu deschiderea relativă supraunitară.* Aceste obiective nu sînt utilizate decît în scopuri științifice. Față de un obiectiv fundamental cu deschiderea $f'/8$, obiectivele avînd deschiderile $f'/4{,}5$; $f'/1{,}4$; $f'/0{,}8$ au luminozitatea în planul imagine de respectiv 10,33 ; 31,6 ; 56,3 ori mai mare. Dacă se ține seama că emulsiile fotografice actuale sînt de 50 de ori mai sensibile decît cele utilizate acum 30—40 ani, se poate constata ce progrese uriașe au fost făcute în acest domeniu.

Pentru a demonstra dificultățile și limita de realizare a obiectivelor cu deschidere relativă supraunitară se consideră legea sinusurilor (care este respectată de toate obiectivele foto, pentru a da imagini clare în afara axei optice): $ny \sin \sigma = n'y' \sin \sigma' = \text{const}$. Această relație exprimă condiția ca planul principal imagine al unui sistem aplanetic să fie curb (de forma unei semisfere cu centrul în focarul paraxial imagine). În figura 14.67 se reprezintă direcțiile razelor emergente provenind dintr-un fascicul paralel ce traversează un sistem optic aplanetic, pentru diferite deschideri. Se constată că pînă la deschideri $\simeq f'/1{,}4$ razele emergente taie axa optică sub unghiuri

moderate, dar peste această valoare razele taie planul focal sub unghiuri din ce în ce mai mari. La deschiderea $f'/0{,}5$, limita de la care un sistem optic nu mai poate fi aplanetic, raza emergentă este perpendiculară pe axă, trecînd razant pe lîngă stratul fotosensibil. Pentru deschideri relative supraunitare

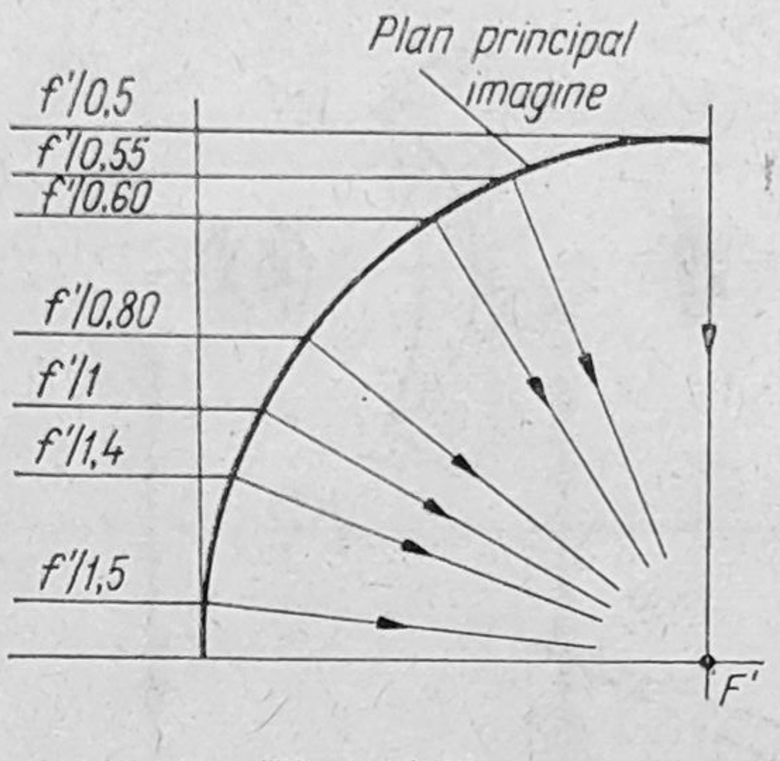


Fig. 14.67

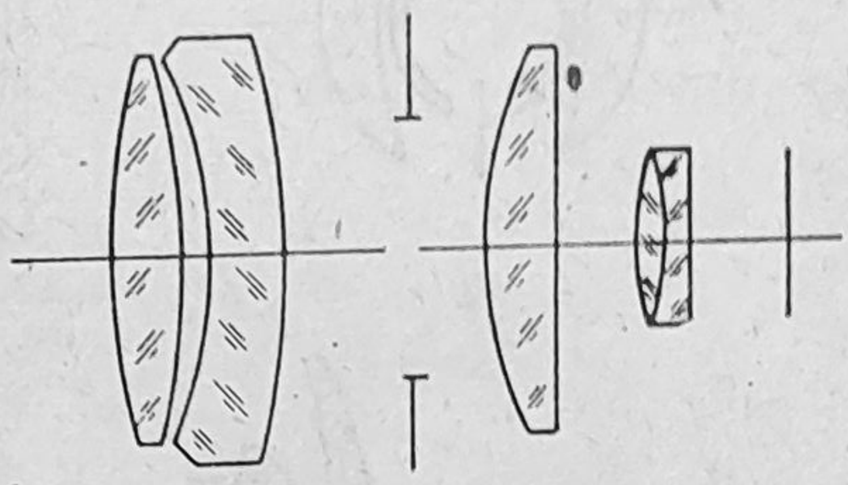


Fig. 14.68

obiectivele foto lucrează în condiții asemănătoare obiectivelor de microscop de mare putere, o consecință defavorabilă fiind creșterea sensibilității la variația distanței obiect ; aceste obiective trebuie corectate pentru distanță determinată a obiectului. Un astfel de obiectiv este *R-Biotar* cu deschiderea relativă maximă 1 : 0,90 și distanța focală $f' = 50$ mm, (fig. 14.68). Primele două sume Seidel sînt foarte mici $S_I = +0{,}0454$; $S_{II} = +0{,}0942$.

14.10.2. **Obiective foto cu cîmp unghiular mare**

Aceste obiective se împart în *grandangulare* (avînd cîmpul unghiular între $30° \div 70°$) și *superangulare* (avînd cîmpul unghiular peste 70°).

Obiectivele grandangulare se caracterizează prin diametre ale cîmpului imagine sensibil mai mari decît distanța lor focală ; de exemplu $2y' \geqslant 1{,}2f'$, ceea ce corespunde unui cîmp unghiular de aproximativ 60°. Utilizările cele mai frecvente sînt în arhitectură, topografie, interioare, reproducerea documentelor, fotografii aeriene, meteorologie. Obiectivul fotografic care a constituit primul grandangular este considerat a fi *Protar* (fig. 14.63, c) cu deschiderea maximă $f'/18$, care pentru distanțe focale scurte asigură un cîmp unghiular de 85°, iar pentru distanțe focale mai mari asigură cîmpuri de 70°—75°.

Obiectivul Topogon asigură un cîmp unghiular de aproximativ 100° și se remarcă printr-o luminozitate foarte bună (fig. 14.69, a) ; deschiderea maximă $f'/6{,}3$. Sumele lui Seidel au următoarele valori : $S_I = +4{,}85$; $S_{II} = +0{,}239$, $S_{III} = -0{,}063$, $S_{IV} = +0{,}029$, $S_V = -0{,}018$.

Obiectivul Supergon de distanță focală $f' = 25$ mm a atins cîmpul limită de 180°. Este constituit (fig. 14.69, b) dintr-o lentilă divergentă urmată de un triplet convergent (asemănător tripletului anastigmat a lui Höegh — fig. 14.63, f, cu deosebirea că prima lentilă este dezlipită).

Creșterea cîmpului unghiular impune micșorarea distanței focale, limitată de distanța de la obturator la planul peliculei, utilizarea vizării reflex (prin obiectiv) nemaifiind posibilă. Pentru eliminarea acestui inconvenient au fost elaborate obiective retrofocale cu cîmp unghiular mare, care au schema

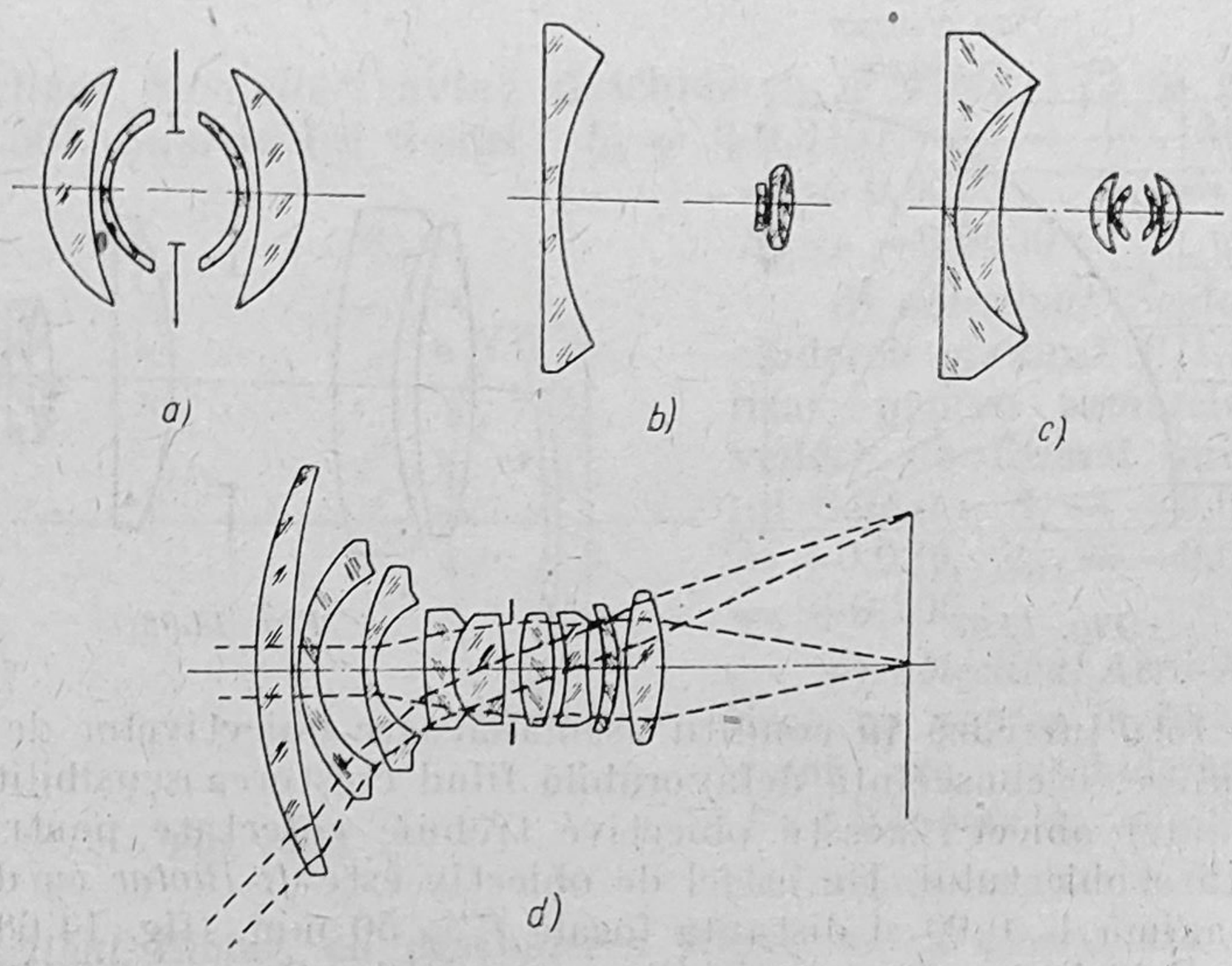


Fig. 14.69

unui teleobiectiv inversat ; la aceste obiective distanța între vîrful ultimei lentile și peliculă este mai mare decît distanța focală.

Obiectivul Pleon, care reprezintă o perfecționare a obiectivului Topogon, funcționează ca un teleobiectiv așezat invers. Deschiderea relativă maximă este 1 : 6,3, iar cîmpul unghiular 136° pentru distanța focală $f' = 25$ mm (fig. 14.69, c).

În figura 14.69, d este reprezentat unul dintre cele mai recente obiective foto superangulare : *obiectivul Fleklogon* care asigură un cîmp unghiular net de 93° și o luminozitate foarte ridicată datorită deschiderii relative de 1 : 2,8 ; distanța focală este $f' = 20$ mm.

14.10.3. Teleobiective

Un teleobiectiv reprezintă o combinație de două sisteme optice, primul convergent, al doilea divergent, aflate la o distanță $d < f_1$, astfel încît să rezulte o distanță focală mare și un gabarit redus, planul principal imagine fiind „aruncat" în fața obiectivului. Într-adevăr, dacă se consideră figura 14.70 și relațiile de la combinarea sistemelor optice rezultă

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = \frac{f_1' f_2}{\Delta} > 0, \tag{14.88}$$

deoarece

$$\Delta = d + \bar{f}_2 - f_1' > 0 \tag{14.88}$$

$$a_{2H'}' = z_{2H'}' + f_2' = z_{2F'}' - f' - \bar{f}_2 = -\frac{\bar{f}_2}{\Delta} \cdot d < 0 \tag{14.89}$$

$$a_{1H'} = a_{2H'}' + d = \frac{d - f_1'}{\Delta} \cdot d < 0 \tag{14.90}$$

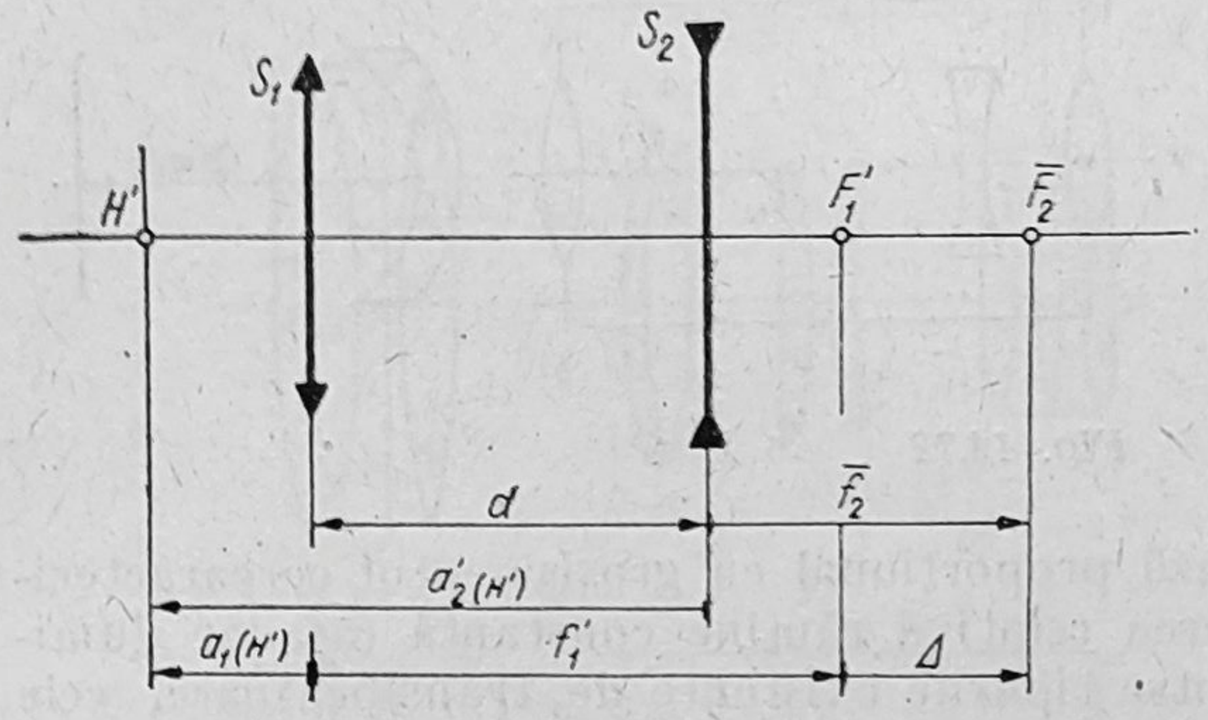


Fig. 14.70

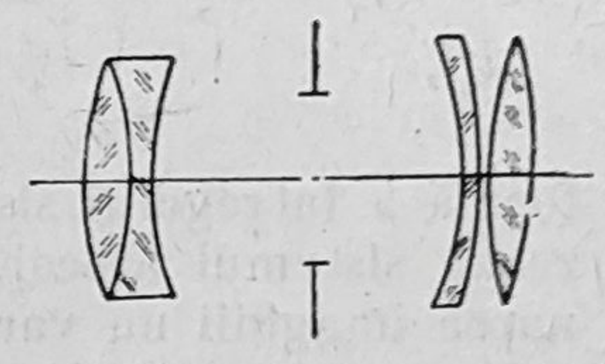


Fig. 14.71

deoarece

$$d < f_1'.$$

Aşadar, condiţia

$$f_1' - \bar{f}_2 < d < f_1' \tag{14.91}$$

este suficientă ca să rezulte un teleobiectiv caracterizat prin distanţa focală $f' > 0$ (mare) şi gabarit mic : planul imagine H' situat în faţa primului sistem.

De asemenea, se remarcă că focarul este situat după sistemul divergent S_2, adică

$$-a_{2H'}' < f'$$

$$\frac{\bar{f}_2}{\Delta} d < \frac{f_1' \bar{f}_2}{\Delta} \rightarrow d < f_1' \tag{14.92}$$

Acest avantaj se obţine făcînd anumite sacrificii asupra deschiderii maxime, cîmpului şi calităţii imaginii. Teleobiectivele sînt folosite în special la fotografierea obiectelor depărtate. Variind distanţa dintre cele două sisteme, distanţa focală a teleobiectivului variază continuu ; dar teleobiectivul poate funcţiona şi cu distanţa d fixă, reglîndu-se distanţa pînă la planul imagine.

Dintre teleobiectivele existente se poate considera reprezentativ *teleobiectivul Telikon*, cu deschiderea $f'/6{,}3$; este caracterizat printr-o corecţie foarte bună a aberaţiilor de sfericitate şi de coma, astigmatismul şi curbura cîmpului sînt insensibile pînă la înclinări de 10°, iar distorsiunea este anulată pentru înclinări de pînă la 16°, ceea ce a determinat utilizarea acestui teleobiectiv în fotogrammetrie (fig. 14.71).

14.10.4. Obiective cu distanța focală variabilă

Aceste obiective permit obținerea unor măriri diferite la o poziție fixă a imaginii. Soluția a fost dată în 1930 de Gramatzki și constă în combinarea unui sistem afocal de grosisment variabil cu un obiectiv fotografic ordinar, care formează imaginea în planul său focal, sistemul care rezultă fiind numit *transfocator*. Pe de altă parte, cum diametrul pupilei de intrare și distanța

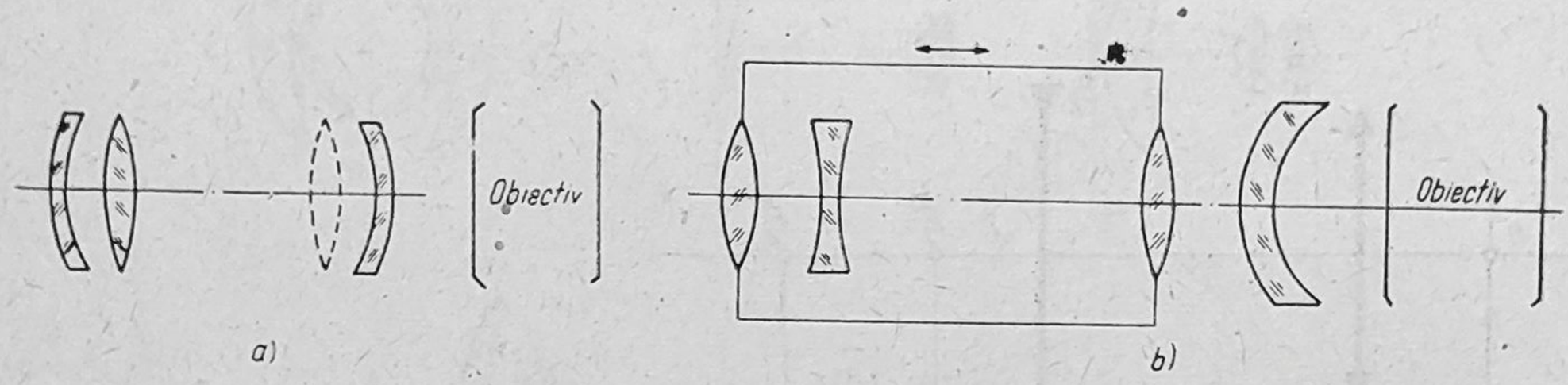


Fig. 14.72

focală a întregului sistem variază proporțional cu grosismentul ce caracterizează sistemul afocal, deschiderea relativă rămîne constantă (așadar iluminarea imaginii nu variază). Dintre tipurile existente de transfocatoare, cele mai reprezentative sînt următoarele :

— două lentile divergente de aceeași distanță focală și între ele o lentilă convergentă deplasabilă în lungul axei (fig. 14.72, a). Dacă raportul grosismentelor se notează $\Gamma_{min}/\Gamma_{max} = m^2$, din condiția $f'_1 = f'_3$ și pentru ca sistemul să fie afocal rezultă relațiile

$$d = (m - 1)f'_1 = -(m^2 - 1)\cdot f'_2/m \; ; \; f_2 = -m\cdot f'_1(m + 1) \; ; \qquad (14.93)$$

— sistem afocal format din două lentile convergente între care se poate deplasa axial o lentilă divergentă. Relațiile care leagă distanțele focale, distanțe între lentilele fixe și variația grosismentului se determină pe baza ecuațiilor de combinare a sistemelor optice ;

— obiectiv cu distanța focală variabilă (fig. 14.72, b), avînd două lentile mobile legate rigid.

Obiectivele utilizate în filmare necesită extensii mai mari ale distanțelor focale. Un salt calitativ în acest domeniu s-a produs în jurul anului 1960, cînd majoritatea firmelor constructoare au aplicat principiul adaptorului afocal (sau telescopic) în două trepte. După această perioadă obiectivele cu focală variabilă mai reprezentative sînt (fig. 14.73) :

a) *transfocatorul Lenar*, avînd un obiectiv de bază cu $f'_{OB} = 77$ mm, asigurînd o variație a distanței focale $f' = 40 \div 162$ mm și o deschidere relativă maximă 1 : 3,8, este utilizat la aparatele de filmat de 35 mm ;

b) *transfocatorul Meteor*, cu o deschidere relativă foarte mare $k = 1 : 1{,}9$, utilizat la aparate de filmat de 16 mm, asigură o variație a distanței focale între $17 \div 70$ mm ;

c) *transfocatorul Monital*, cu deschiderea relativă $k = 1 : 2$, utilizat tot la aparate de filmat de 16 mm, asigură o extensie de la 17 la 170 mm, grație deplasării în sens contrar a componentei centrale convergente ;

d) *vario-obiectivele Angenieux*, care în prezent sînt cele mai apreciate, sînt construite astfel încît obiectivul cu focală variabilă constituie un sistem

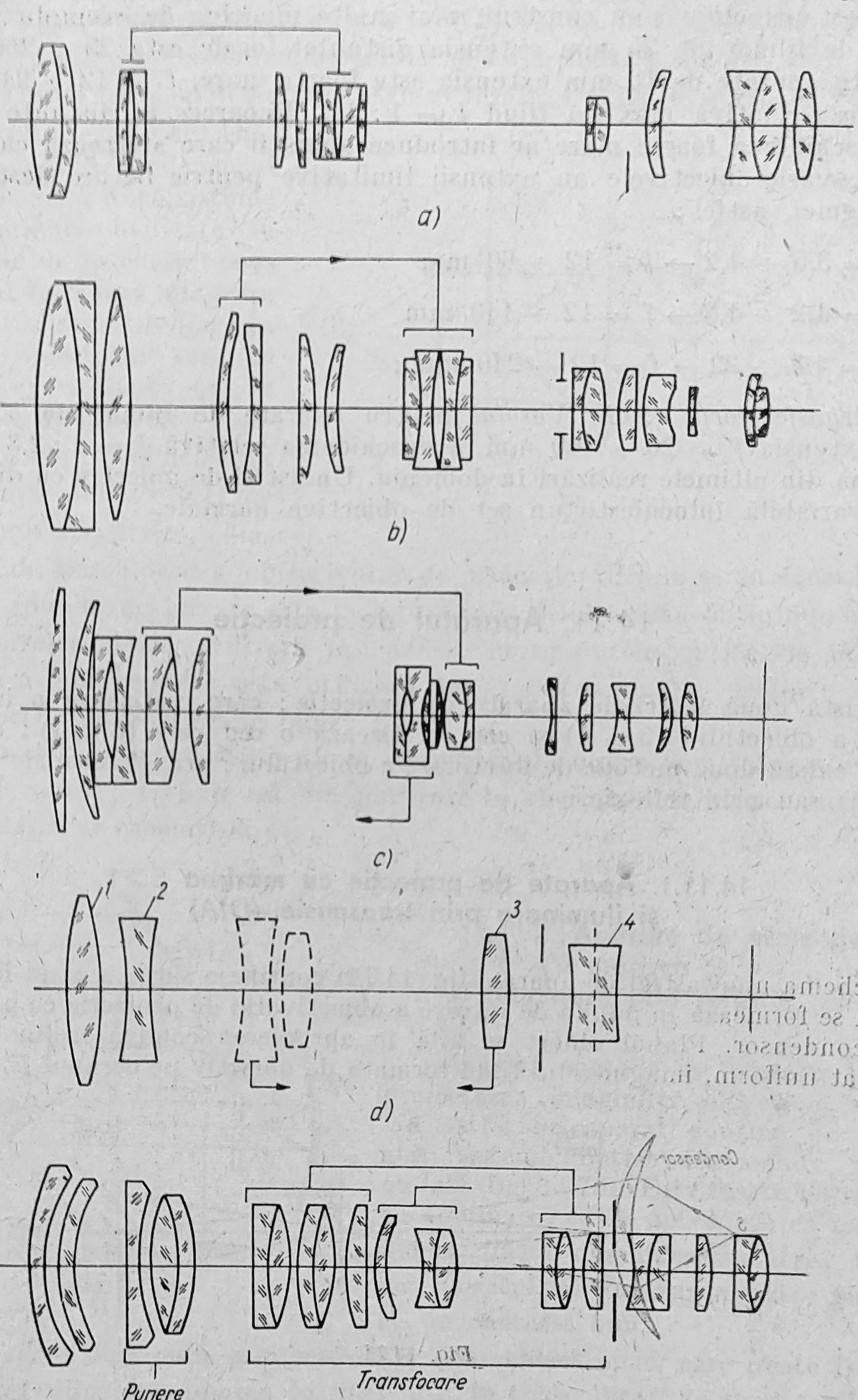


Fig. 14.73

optic unitar și nu o asociere a două sisteme (ca în cazul transfocatorului). După acest principiu s-au construit mai multe modele ; de exemplu pentru aparate de filmat de 35 mm extensia distanței focale este $25 \div 250$ mm, iar pentru aparate de 16 mm extensia este foarte mare, $f' = 12 \div 240$ mm, deschiderea relativă maximă fiind $k = 1 : 3{,}5$. Deoarece la distanțe focale lungi deschiderea foarte mare ar introduce aberații care afectează calitatea imaginii, vario-obiectivele au extensii limitative pentru fiecare deschidere a diafragmei, astfel :

$$N = 3{,}5 \div 4{,}2 \rightarrow f = 12 \div 60 \text{ mm}$$

$$N = 4{,}2 \div 4{,}8 \rightarrow f = 12 \div 140 \text{ mm}$$

$$N = 4{,}8 \div 22 \rightarrow f = 12 \div 240 \text{ mm} ;$$

e) *transfocatorul Cooke Varotal* pentru aparate de filmat de 35 mm, având extensia $f' = 20 \div 100$ mm și deschiderea relativă $k = 1 : 2{,}8$ reprezintă una din ultimele realizări în domeniu. Un astfel de obiectiv cu distanță focală variabilă înlocuiește un set de obiective normale.

14.11. Aparatul de proiecție

Există două feluri de aparate de proiecție : care realizează o imagine mărită a obiectului ($\beta > 1$) și care realizează o reducere ($\beta < 1$) ; de asemenea, există două metode de iluminare a obiectului : prin transmisie (transparență) sau prin reflexie.

14.11.1. Aparate de proiecție cu mărirea $\beta > 1$ și iluminare prin transmisie *(DIA)*

Schema unui astfel de aparat (fig. 14.74) conține o sursă a cărei imagine mărită se formează în pupila de intrare a obiectivului de proiecție cu ajutorul unui condensor. Planul obiect se află în apropierea condensorului și este iluminat uniform, imaginea lui fiind formată de obiectiv pe ecranul *E*.

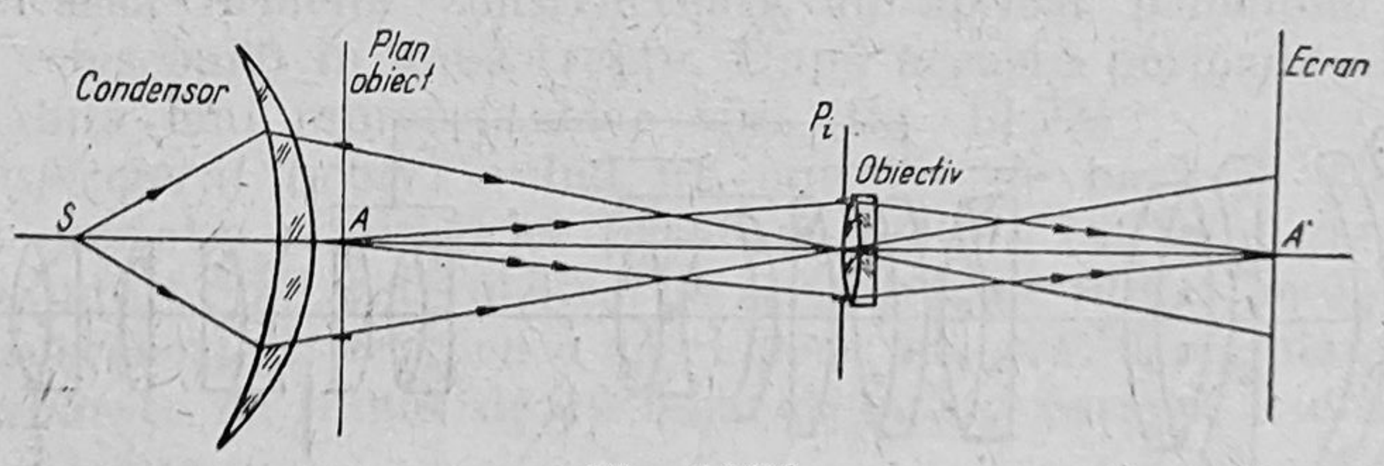


Fig. 14.74

Rolul sistemului de iluminat, condensorul, este determinant în buna funcționare a aparatului de proiecție, deoarece acesta asigură iluminarea întregului obiect, captînd razele de înclinări mari ce ies din sursă și trimițîndu-le în pupila de intrare a obiectivului (fără condensor aceste raze nu

ar intra în obiectiv). Condensorul cel mai utilizat este constituit din două lentile plan-convexe identice, cu convexitățile față în față, foarte apropiate. Mai rar, acest condensor este completat cu o lentilă menisc care permite captarea unei părți mai mari a fluxului luminos emis de sursă și, totodată, reduce într-o oarecare măsură aberațiile condensorului. Mai există două sisteme de iluminare utilizate la aparatele de proiecție: condensorul formează imaginea mărită a sursei chiar în planul obiectului sau în apropierea acestuia (ca la aparatele de proiecție cinematografică); condensorul ilumineză planul obiect cu fascicule telecentrice, diafragma de deschidere a obiectivului de proiecție aflîndu-se în focarul imagine F' (pupila de intrare este la infinit), în felul acesta obținîndu-se perspectiva telecentrică utilizată în special în aparatele optice de măsurat. Această a doua soluție este utilizată în proiectoarele de profile; schema optică este reprezentată în figura 14.75.

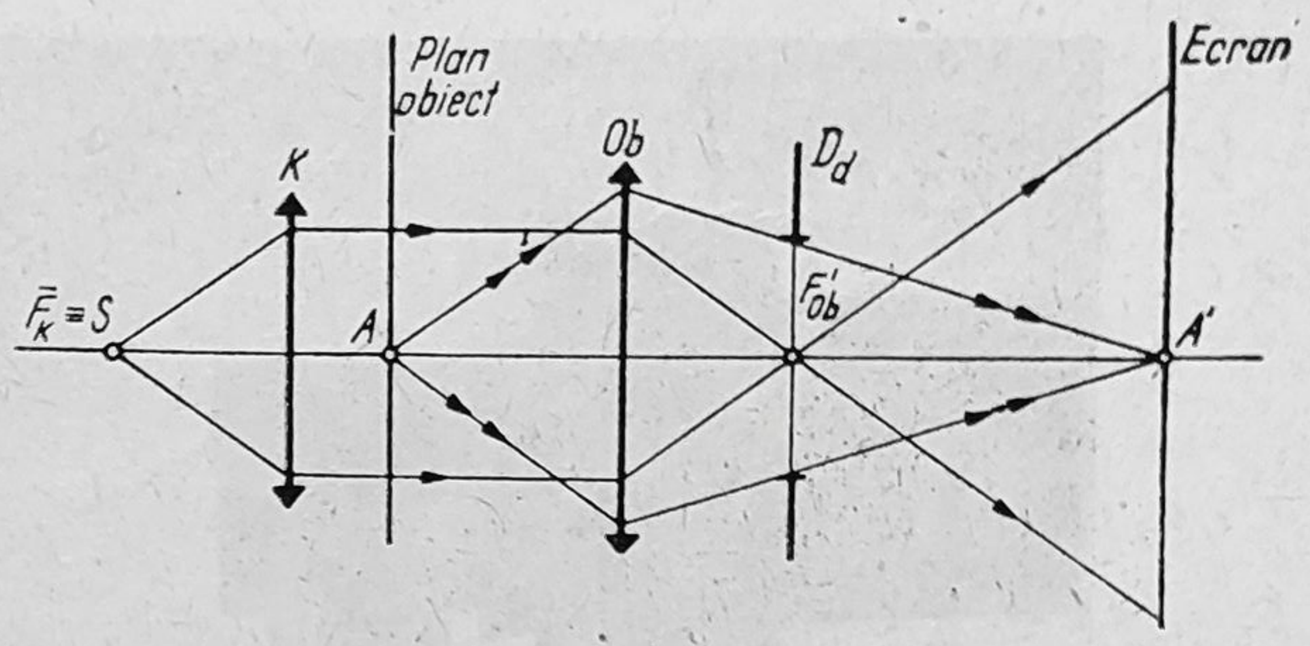


Fig. 14.75

Obiectivele de proiecție nu se deosebesc de obiectivele fotografice normale (de bază); trebuie să fie corectate la aberațiile de sfericitate, coma, astigmatism și cromatism.

14.11.2. Aparate de proiecție cu mărirea $\beta > 1$ și iluminare prin reflexie *(EPI)*

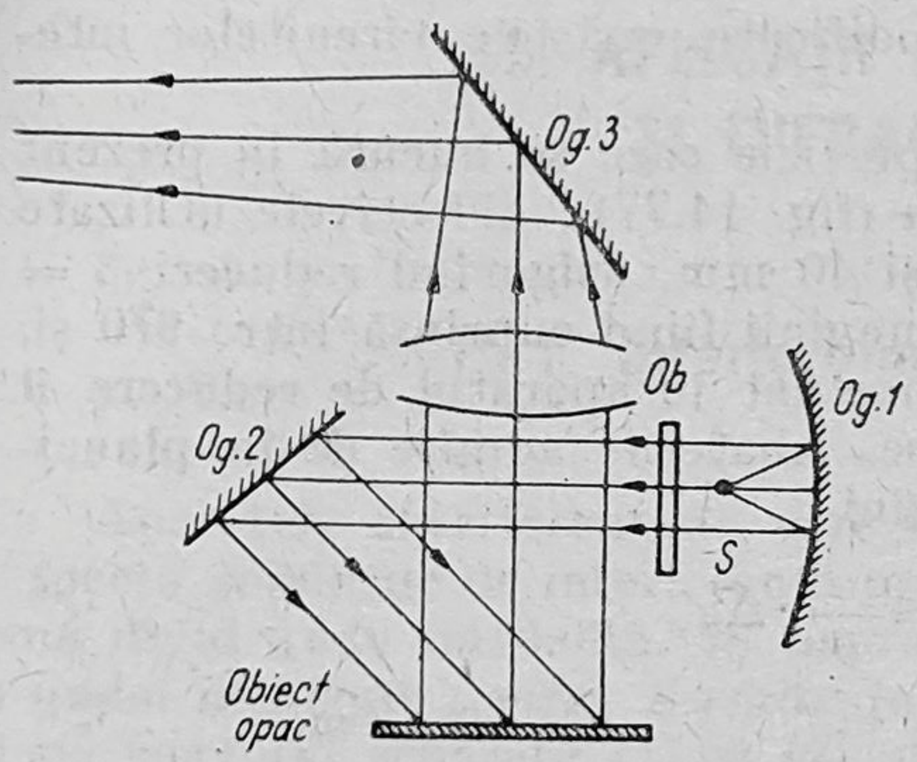


Fig. 14.76

Această metodă se folosește pentru proiectarea imaginilor obiectelor opace. Un astfel de aparat conține de obicei atît sisteme optice lenticulare cît și oglinzi (fig. 14.76). Este foarte important ca iluminarea să fie puternică, ca obiectivul să aibă o deschidere relativă mare, iar obiectul să fie aproximativ plan și cu un contrast bun.

În cazul iluminării prin reflexie a unui obiect opac, care poate fi considerat că difuzează lumina în mod egal în toate direcțiile unei semisfere, fluxul care iese dintr-un obiectiv cu deschiderea relativă 1 : 4 nu reprezintă decît 1/64 din fluxul incident. Din această cauză sistemul de iluminare și sursa joacă un rol foarte important în aparatele de proiecție *EPI*.

14.11.3. Aparate de proiecție cu mărirea $\beta < 1$

Tehnica reducerii la scară se bazează în special pe fotografiere, necesitînd obiective bine corectate la distorsiune și astigmatism. Principiul acestei metode este foarte simplu : prin micșorarea la scará a unui desen, toleranțele

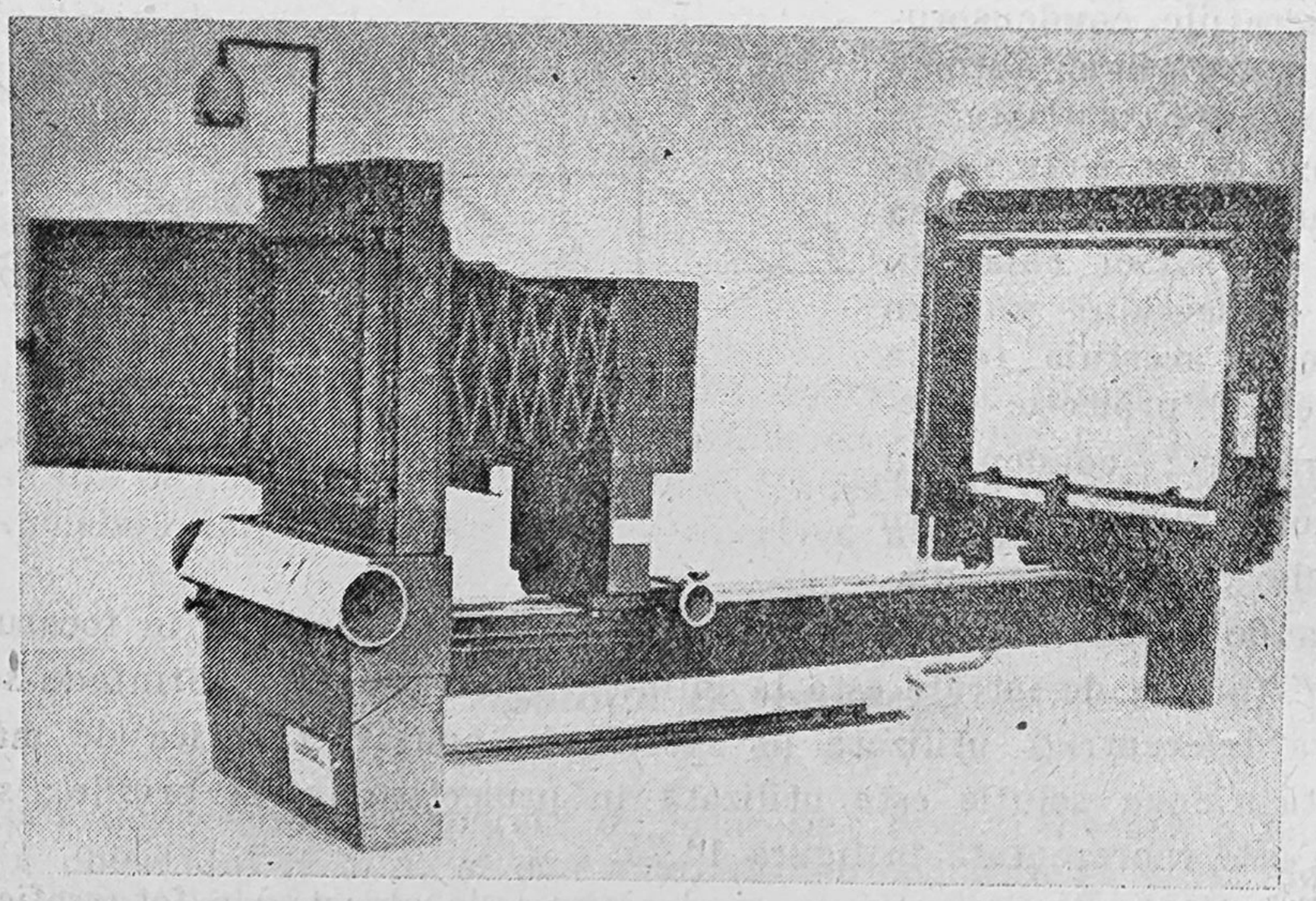


Fig. 14.77

de precizie sînt reduse la aceeași scară. În acest mod se obțin reticulele și scările de înaltă rezoluție ale aparatelor optice, de asemenea discurile și riglele incrementale, ca și discurile și riglele codificate, măștile circuitelor integrate etc.

Un aparat specializat în reduceri de precizie care se bucură în prezent de o largă apreciere este *aparatul Klimsch* (fig. 14.77) ; obiectivele utilizate au distanțele focale cuprinse între 1 000 și 40 mm, asigurînd reduceri $\beta = 1 : 1{,}8$ pînă la $\beta = 1 : 108$, diagonala imaginii fiind cuprinsă între 970 și, respectiv, 21 mm. Un rol deosebit de important în aparatul de reducere îl are iluminarea uniformă în planul imagine. Abaterile admise de la planeitatea obiectului și a imaginii (fig. 14.78) sînt

$$d = \frac{a}{y} \cdot \Delta y \; ; \; d' = \frac{a'}{y'} \cdot \Delta y'.$$

Exemplu numeric : $f' = 600$ mm ; $\beta = 1 : 1$; $a = 2\,000$ mm

$2y = 1\,200$ mm ; $\Delta y = 0{,}04$ mm ; $(\ )_{max} = 0{,}2$ mm

$2y' = 300$ mm ; $\Delta y' = 0{,}01$ mm ; $(\ )_{max} = 0{,}05$ mm.

Abaterile de poziționare ale planului obiect, a obiectivului și a planului imagine sînt

$$\Delta a = \frac{f'}{2y} \cdot \frac{1 + \beta}{\beta} \cdot \Delta y \; ; \; \Delta l = \frac{f'}{2y} \cdot \Delta y \; ;$$

$$\Delta a' = \frac{f'}{2y} \cdot \frac{1}{1 + \beta} \cdot \Delta y$$

Exemplu numeric : $f' = 600$ mm ; $\beta = 1 : 4$; $2y = 1\,200$ mm ;
($\Delta s = 0{,}04$ mm ; $\Delta s' = 0{,}01$ mm) ; $\Delta a = 0{,}1$ mm ;
$\Delta l = 0{,}020$ mm ; $\Delta a' = 0{,}016$ mm.

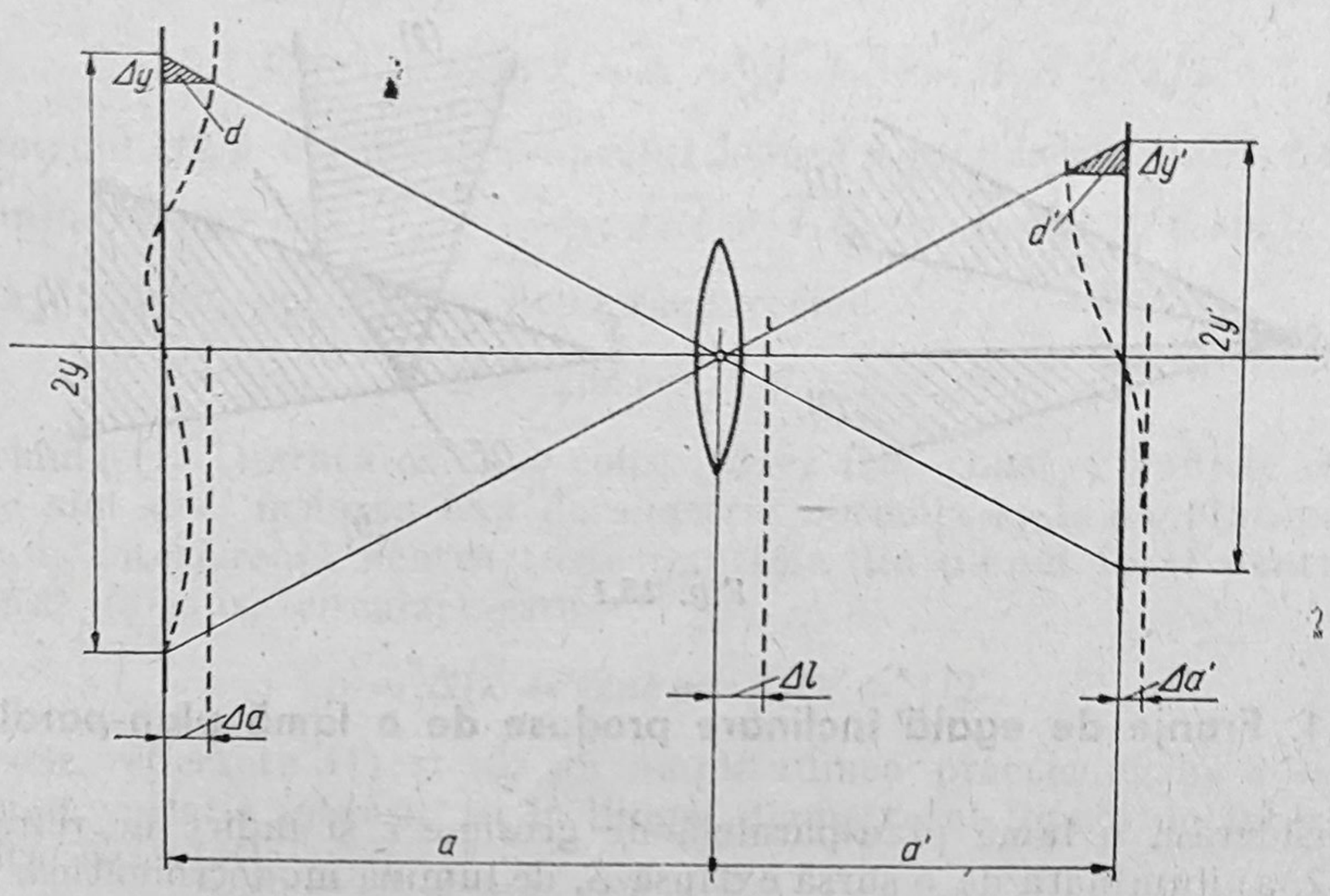


Fig. 14.78

15. APLICAȚII ALE INTERFERENȚEI ȘI DIFRACȚIEI LUMINII

15.1. Interferometre cu două unde

Aparatele interferențiale care utilizează surse de lumină obișnuite și respectă condițiile de interferență prezentate la 4.2 pot fi clasate după modul cum divid unda incidentă. În figura 15.1, a se prezintă metoda de divizare a undei incidente : sursa S emite în toate direcțiile, dar se utilizează numai două porțiuni separate (1) și (2) ale fasciculului. Aceste două fascicule se suprapun apoi în regiunea unde se observă fenomenul de interferență. Pe acest principiu se bazează dispozitivul cu fante Young, dispozitivul cu oglinzi Fresnel, dispozitivul cu bi-lentile Billet și altele similare. În figura 15.1, b se prezintă principiul de divizare a amplitudinii cu ajutorul unui divizor de fascicul *D.F.* care transmite o parte a fasciculului incident (1) și reflectă o altă parte (2). Cele două fascicule (1) și (2) se suprapun apoi în regiunea unde se observă fenomenul de interferență. Pe acest principiu se bazează

dispozitivele cu lame plan-paralele, cu lame de grosime variabilă, interferometrul Michelson, interferometrul Twyman-Green, interferometrul Mach-Zender, interferometrul Jamin, interferometrul Fizeau, interferometrul Kösters și altele.

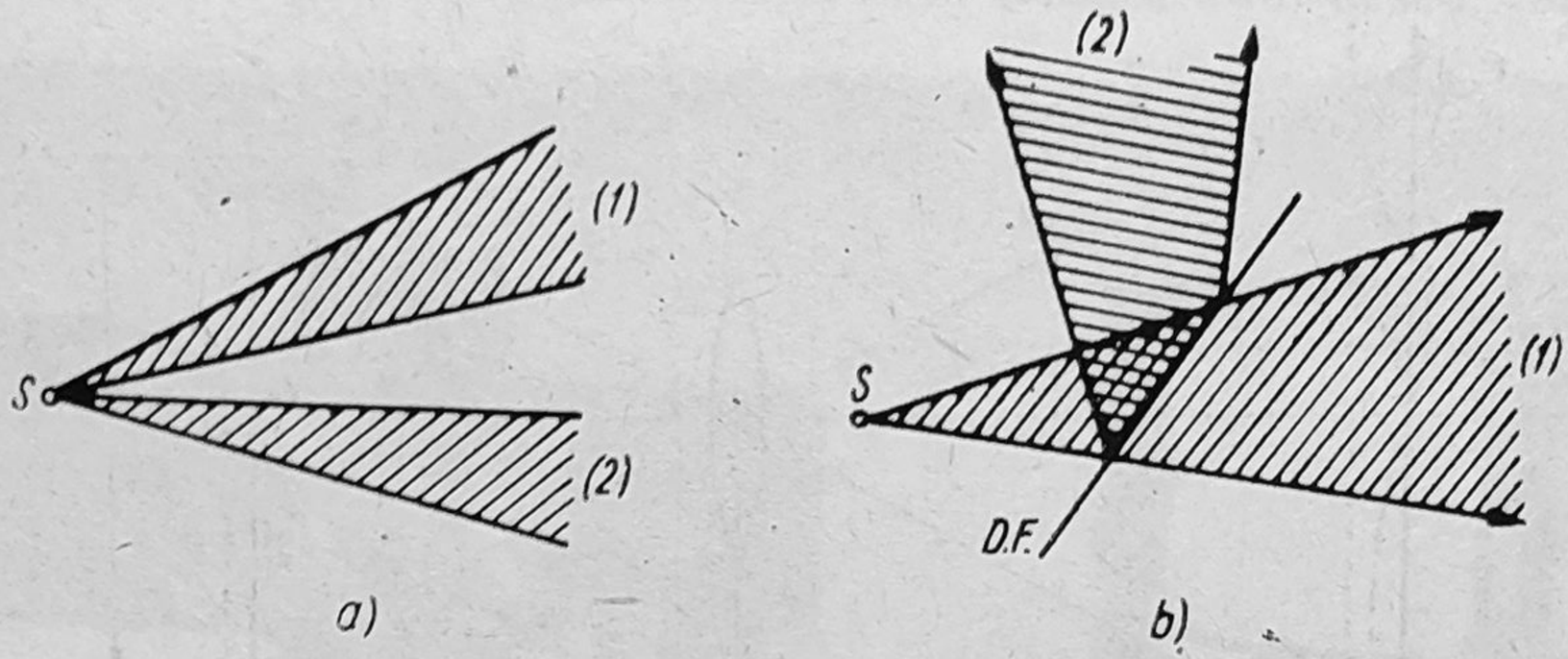
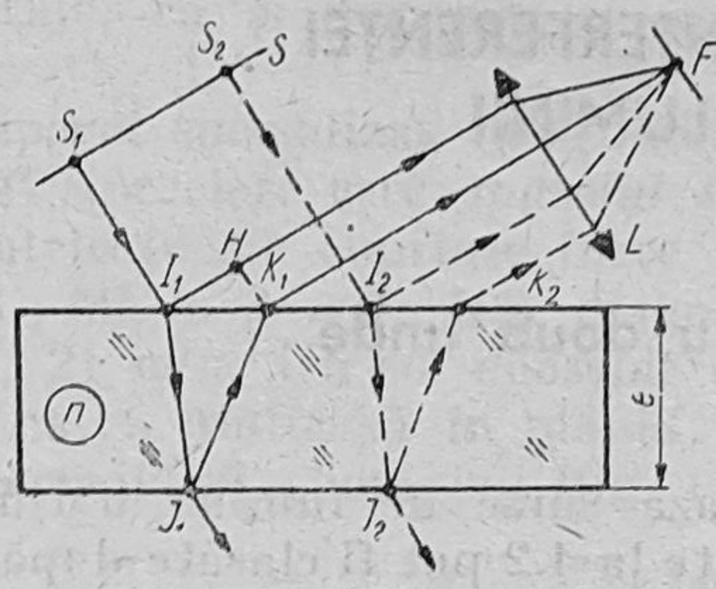
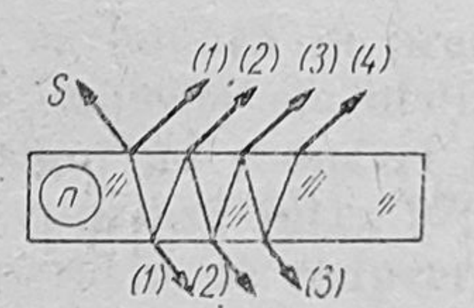


Fig. 15.1

15.1.1. Franje de egală înclinare produse de o lamă plan-paralelă

Considerăm o lamă plan-paralelă de grosime e și indice de refracție n' (fig. 15.2, a) iluminată de o sursă extinsă S, de lumină monocromatică. O rază incidentă S_1I_1 se dedublează în I_1 producînd, după o reflexie în I_1 și o transmisie în K_1, două raze paralele care interferă în planul focal F' al lentilei L. Dintr-un alt punct S_2 al sursei S considerăm o rază S_2I_2 paralelă cu S_1I_1, care suferă aceleași fenomene. Este ușor de remarcat că diferențele de drum $(I_1J_1K_1F') - (I_1F')$ și $(I_2J_2K_2F') - (I_2F')$ sînt egale. Fenomenele de inter-





	(1)	(2)	(3)
Reflexie	0.20	0.13	0.008
Transmisie	0.96	0.038	0.001

b)

Fig. 15.2

ferență produse în F' de S_1 și S_2 sînt necoerente între ele, dar cum ele sînt identice, vizibilitatea fenomenului rămîne aceeași. Această proprietate este valabilă pentru toate razele emise de diferitele puncte ale sursei S, în direcții paralele cu S_1I_1. Razele incidente paralele cu o altă direcție ajung în alt punct al planului focal al lentilei L, unde produc un fenomen perfect vizibil. În general, se neglijează razele reflectate de mai multe ori, datorită descreșterii rapide a amplitudinii lor. Considerînd incidența aproape normală și $n = 1{,}5$,

cu formulele lui Fresnel se determină raportul amplitudinilor razelor reflectate și transmise (fig. 15.2, b) față de amplitudinea razei incidente. Se observă că amplitudinile sînt practic neglijabile începînd cu ordinul (3).

Diferența de drum între razele (1) și (2), în cazul incidenței apropiate de normală este (fig. 15.2, a)

$$(I_1J_1K_1F') - (I_1F') = \Delta = 2n\overline{I_1J_1} - \overline{I_1H} + \lambda/2$$

unde termenul $\lambda/2$ se datorează avansului de fază π produs la reflexia aer-sticlă în I_1. Ținînd seama că $\overline{I_1J_1} = \frac{e}{\cos i'}$; $\overline{I_1H} = \overline{I_1K_1} \cdot \sin i = 2\, e\, \mathrm{tg}\, i' \sin i$, rezultă diferența de drum optic între două raze vecine

$$\Delta = 2ne \cos i' + \lambda/2. \tag{15.1}$$

Formula (15.1) arată că $\Delta = \text{const.}$, dacă $i' = \text{const.}$; franjele de egală înclinare sînt deci inele cu axa de simetrie normală la lama plan-paralelă. Ordinul de interferență pentru toate punctele din planul focal pentru care $\Delta = \text{const.}$ (dispuse circular) este

$$p = \Delta/\lambda = (2ne \cos i')/\lambda + 1/2. \tag{15.2}$$

Razele reflectate (1) și (2) au amplitudinea practic egală $a = 0{,}2\, A$, astfel încît variația intensității în lungul diametrului figurii de interferență este dată de relația

$$I = 2\, a^2 \cos^2 (\pi p). \tag{15.3}$$

Pentru $p = k$ se obțin inele luminoase, iar pentru $p = k + 1/2$ inele întunecoase ($I_{min} = 0$). În centrul planului focal ordinul de interferență este

$$p_0 = \Delta_0/\lambda = 2ne/\lambda + 1/2 \tag{15.4}$$

Contrastul franjelor* obținute în lumină reflectată, dat de relația $\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$, este maxim $\gamma = 1$, deoarece $I_{min} = 0$.

Fenomenul de interferență se poate observa și în lumină transmisă, diferența de drum între două raze vecine fiind $\Delta = 2ne \cos i'$, deoarece nu mai apare defazajul suplimentar $\lambda/2$. Dar, cum razele care interferă au amplitudini diferite $a_1 = 0{,}96\, A$, $a_2 = 0{,}038\, A$, contrastul este $\gamma \simeq 0{,}15$. Așadar, franjele de egală înclinare prin transmisie au un contrast slab.

15.1.2. Franje de egală grosime produse de o lamă de grosime variabilă iluminată telecentric

Presupunem că variațiile de grosime ale lamei sînt mici și că incidența este apropiată de normală. Lama este iluminată de un fascicul paralel (fig. 15.3). În aceste condiții diferența de drum între două raze vecine (1) și (2) este dată de relația

$$\Delta = 2\, ne + \lambda/2, \tag{15.5}$$

---

* Denumit și vizibilitate.

deoarece între K și K' drumurile optice sînt egale, iar raza (2) suferă în K o reflexie la suprafața aer-sticlă. Razele (1) și (2) avînd practic aceleași amplitudini a, se va obține în planul figurii de interferență o intensitate

$$I = 4a^2 \cos^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda} = 4a^2 \cos^2 \frac{\pi(2ne + \lambda/2)}{\lambda}. \tag{15.6}$$

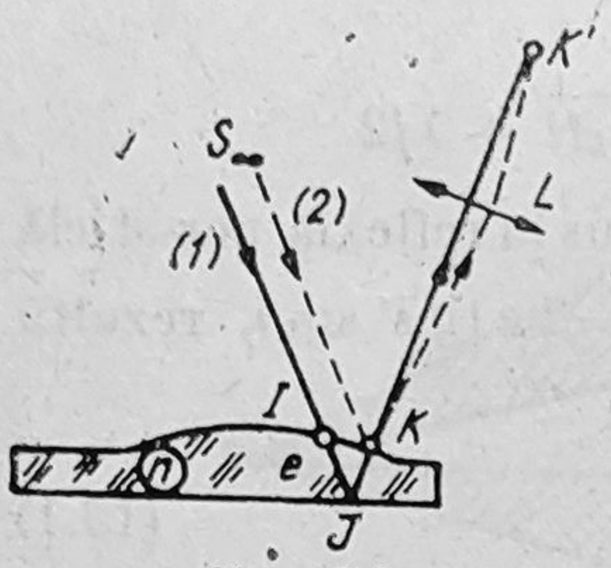


Fig. 15.3

Relațiile (15.5) și (15.6) arată că $\Delta = \text{const.}$, sau $I = \text{const.}$, dacă $e = \text{const.}$ Așadar; privind lama (lentila L poate fi ochiul observatorului acomodat pentru K, iar K' retina ochiului) se observă franje de egală grosime Fizeau. Franjele luminoase se obțin pentru $p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda} + \frac{1}{2} = k$ și franjele întunecoase ($I_{min} = 0$) pentru $p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda} + \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2}$.

În cazul incidenței oblice relația (15.5) se înlocuiește cu relația (15.1): $\Delta = 2\,ne \cos i' + \lambda/2$, iar franjele luminoase și întunecoase se obțin pentru

$$p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2ne\,\cos i'}{\lambda} + \frac{1}{2} = \begin{cases} k \\ k + 1/2. \end{cases}$$

Contrastul franjelor de egală grosime obținute prin reflexie este maxim $\gamma = 1$, deoarece intensitatea franjelor întunecoase este nulă.

Franjele de egală grosime pot fi observate și în lumină transmisă, cu următoarele deosebiri:

-- diferența de drum în cazul incidenței normale $\Delta = 2ne$;

— ordinul de interferență $p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda} = \begin{cases} k \\ k + 1/2. \end{cases}$

În cazul iluminării oblice,

— diferența de drum este $\Delta = 2ne \cos i'$;

— ordinul de interferență $p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2ne\,\cos i'}{\lambda}$.

Dar contrastul franjelor de egală grosime prin transmisie este slab $\gamma \simeq 0{,}15$, datorită diferenței mari între amplitudinile razelor care interferă.

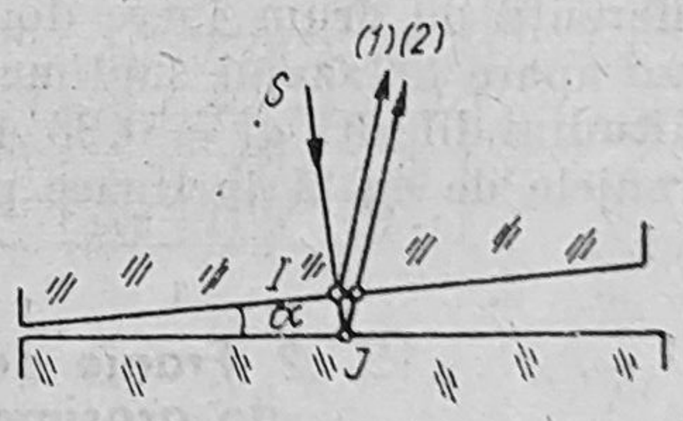


Fig. 15.4

Caz particular. Pana de aer iluminată telecentric. Considerăm o pană de aer formată între suprafețele a două lame plan-paralele din sticlă, făcînd un unghi mic α între ele (fig. 15.4); în cazul iluminării telecentrice normale diferența de drum optic între razele reflectate I și J este: $\Delta = 2e + \lambda/2$, unde e reprezintă grosimea lamei de aer în punctul J. În punctul J se va observa o franjă neagră dacă ordinul de interferență este: $p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} + \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2}$ sau $e = k\frac{\lambda}{2}$. Pentru franja neagră alăturată ordinul de interferență

este $p' = p + 1 \rightarrow e' = (k + 1)\ \frac{\lambda}{2}$. Așadar, pana de aer se va vedea brăzdată de franje rectilinii echidistante și paralele cu muchia penei, grosimea penei crescînd de la o franjă la alta cu : $\Delta e = e' - e = \lambda/2$.

15.1.3. Aplicații ale interferenței luminii la studiul suprafețelor pieselor optice

a) *Studiul planeității unei suprafețe.* Se așază suprafața prelucrată oglindă pe o suprafață etalon a unei lame plan-paralele (cală) și se studiază franjele de egală grosime datorate lamei de aer cuprinse între cele două suprafețe. Presupunînd că aspectul franjelor este cel prezentat în figura 15.5, putem aprecia că suprafața S este fie convexă, fie concavă, săgeata secțiunii normale prin mijlocul suprafeței fiind de ordinul $\lambda/2$, sau de o franjă. Pentru a preciza concavitatea sau convexitatea suprafeței, se exercită o ușoară presiune pe suprafața S : dacă apăsînd pe margini franjele se depărtează de la centru spre margini, suprafața S este convexă ; dacă franjele se deplasează spre centru cînd presiunea se exercită în mijlocul suprafeței, aceasta este concavă, deoarece franjele se etalează în regiunile unde înclinarea relativă a celor două suprafețe variază.

Observație. Dacă lama de aer este foarte subțire, se pot observa franje în lumină albă ; în acest caz, ordinea de succesiune a culorilor la marginea franjelor dă sensul defectului suprafeței S : grosimea lamei de aer crește în sensul în care se succed culorile violet, albastru, galben, roșu, adică în sensul de creștere a lungimii de undă a luminii.

În cazul defectelor inferioare unei franje, se introduce o cală subțire între suprafața verificată și planul etalon; franjele care apar sînt cu atît mai dese cu cît cala este mai groasă. Dacă suprafața verificată este perfect plană, franjele sînt rectilinii și echidistante, altfel ele sînt curbe și distanțele între ele variază. Fie aspectul franjelor cel prezentat în figura 15.6, iar dreapta A_1B_1 linia de cea mai mare pantă a suprafeței studiate în raport cu planul etalon. În lungul acestei drepte se măsoară abscisele punctelor de intersecție a franjelor cu A_1B_1 și se raportează pe un grafic în care pe ordonată se trasează intervale

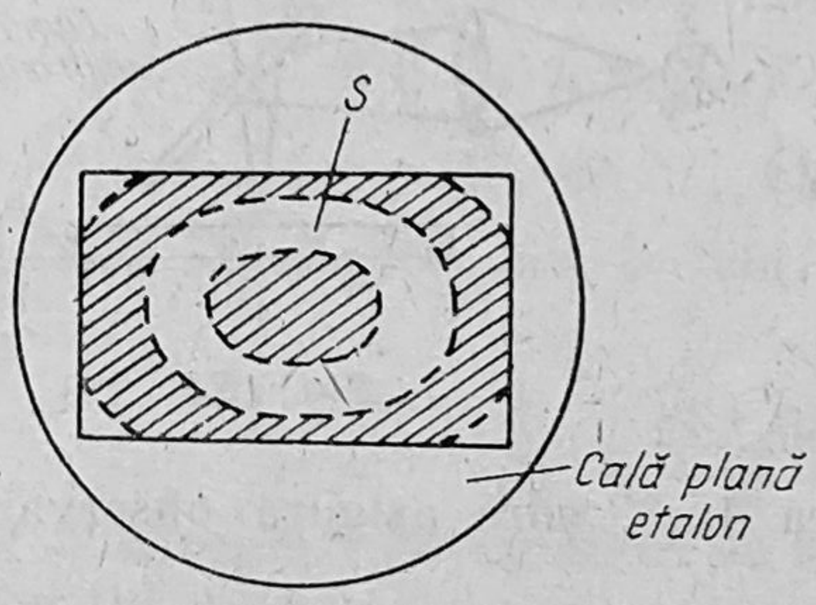


Fig. 15.5

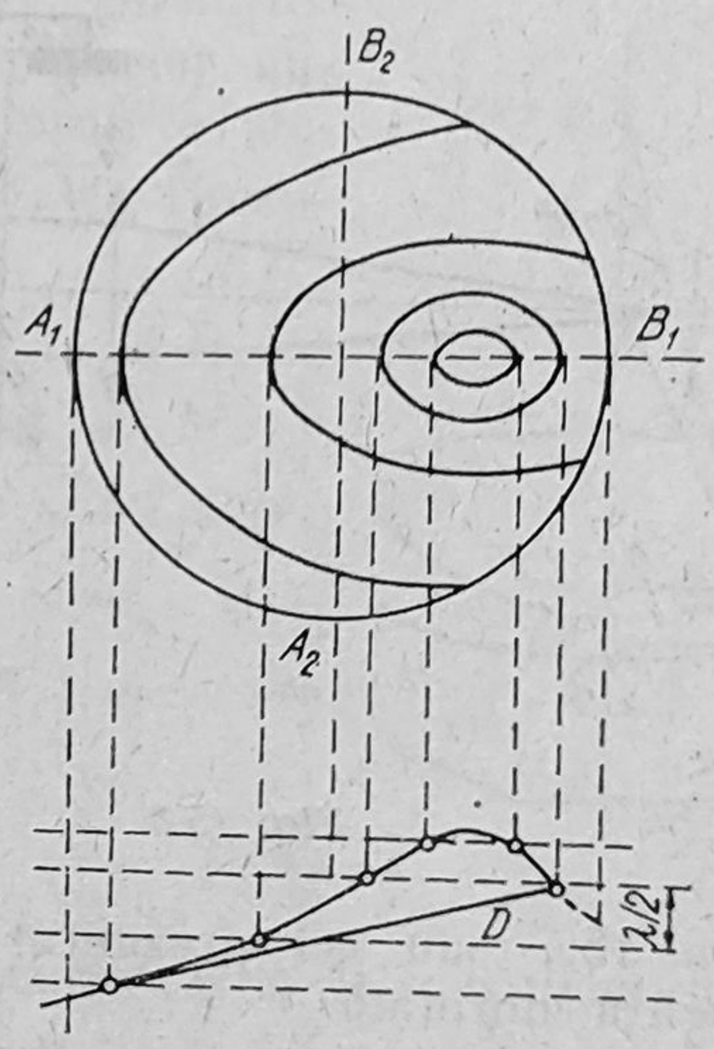


Fig. 15.6

egale cu $\lambda/2$, deoarece o franjă corespunde unei variații a grosimii cu $\lambda/2$. Unind printr-o dreaptă D punctele corespunzătoare franjelor extreme se obțin depărtările de la un plan perfect, cu o incertitudine la extremitățile diametrului A_1B_1. Precizia metodei poate atinge $\lambda/20$ în cazul aplicării corespunzătoare.

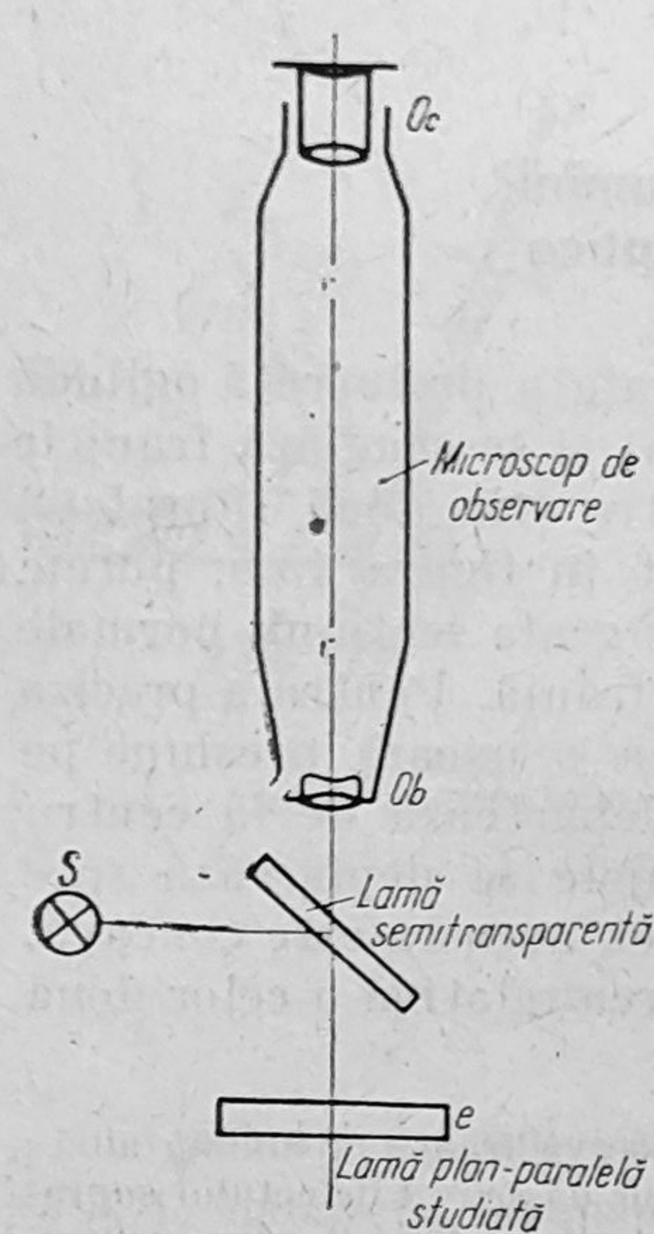


Fig. 15.7

b) *Studiul paralelismului unei lame.* Se poate realiza fie cu franje de egală grosime, fie cu franje de egală înclinare. Se studiază franjele de egală grosime produse între fețele lamei prin reflexie. Dacă fețele lamei sînt riguros paralele se va observa o tentă plată, iar dacă nu, numărul franjelor va indica defectul de paralelism, adică unghiul între suprafețele lamei : $\alpha = \lambda/2ne$, unde e reprezintă distanța între două franje, iar n indicele de refracție al lamei de sticlă. Dispozitivul utilizat poate fi cel din figura 15.7 sau cel prezentat în figura 15.8, care asigură observarea în incidență normală.

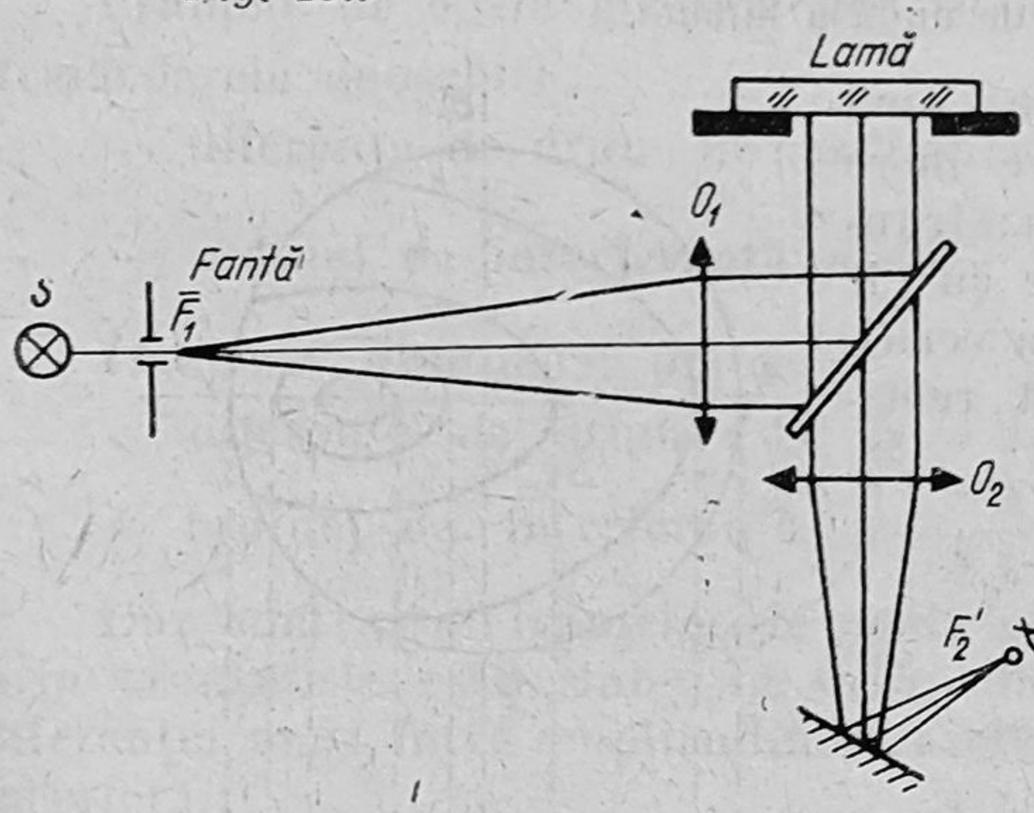


Fig. 15.8

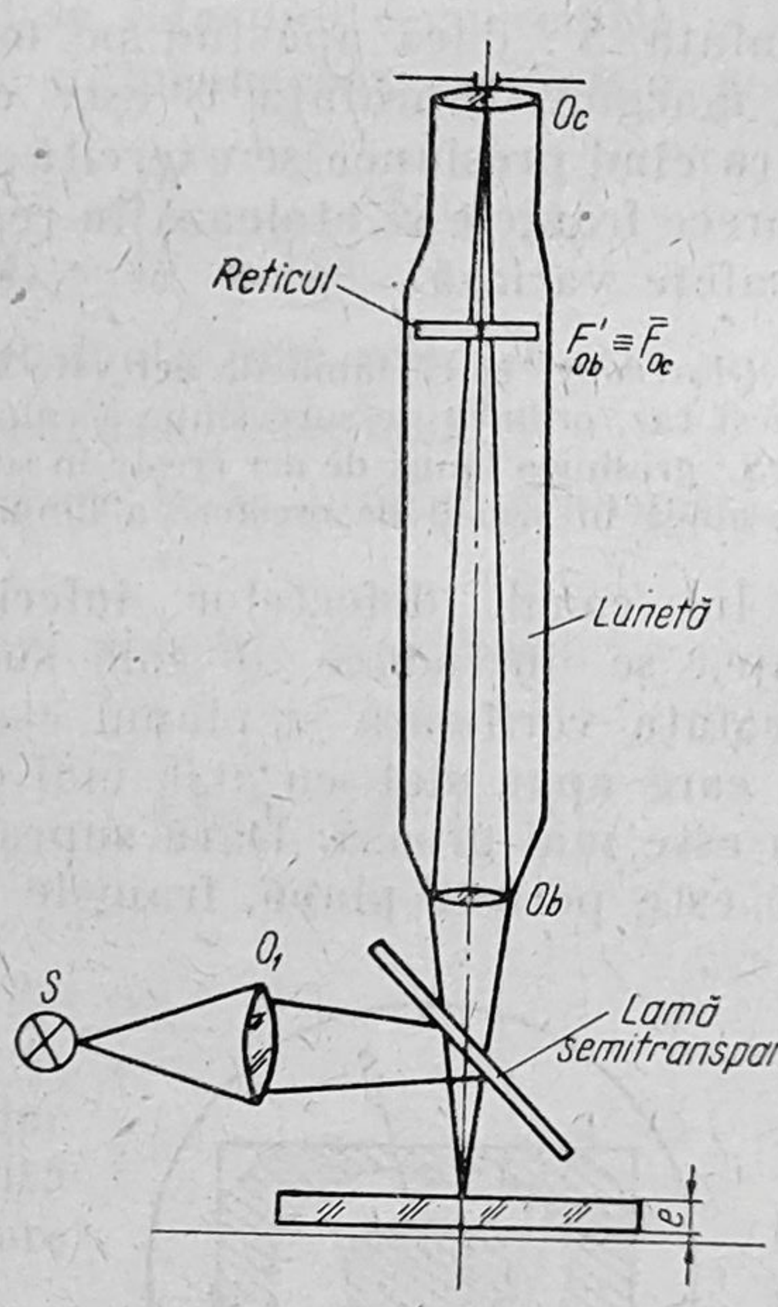


Fig. 15.9

În cazul studierii franjelor de egală înclinare se utilizează un dispozitiv pentru observarea franjelor inelare la infinit (fig. 15.9). Ocularul lunetei are un reticul cu fire încrucișate. Se deplasează lama în planul său : dacă variația grosimii lamei face ca prin centrul reticulului figura de interferență să se deplaseze cu o franjă, înseamnă că diferența de drum optic a variat cu λ și grosimea lamei cu $\lambda/2n$, adică cu aproximativ 0,18 μm. Dacă abaterile de la paralelism sînt foarte mici, nu se mai observă decît o fracțiune de franjă deplasîndu-se în planul reticulului. În acest caz se procedează astfel : fie p or-

UNIV. „AL. I. CUZA" SIBIU BIBL. DE FIZICĂ

dinul de interferență (necunoscut) corespunzător primului inel; în centrul lamei ordinul de interferență va fi $p + \varepsilon$, unde $0 < \varepsilon < 1$: $p + \varepsilon = 2ne/\lambda$. Deplasînd lama verificată în planul său, grosimea devine e', iar ordinul de interferență în centru: $p + \varepsilon' = \frac{2ne'}{\lambda}$, rezultînd variația grosimii

$$\Delta e = e' - e = \lambda(\varepsilon' - \varepsilon)/2n. \tag{15.7}$$

Pentru calculul lui ε și ε' se procedează în felul următor: considerăm inelul numărul N pornind din centru; ordinul de interferență a acestui inel va fi $p - (N - 1)$, iar raza unghiulară

$$\alpha_N = (n\lambda/e)^{1/2}[(p + \varepsilon) - (p - N + 1)]^{1/2}.$$

Raza unghiulară a inelului următor este $\alpha_{N+1} = (n\lambda/e)^{1/2} \cdot [(p + \varepsilon) - [(p - N)]^{1/2}$. Eliminînd $\frac{n\lambda}{e}$ între cele două relații, rezultă

$$\varepsilon = \frac{\alpha_N^2}{\alpha_{N+1}^2 - \alpha_N^2} + 1 - N. \tag{15.8}$$

Se face calculul lui ε pentru mai multe inele și se ia media rezultatelor. Calculul lui ε' se efectuează în același mod, pentru o a doua poziție a lamei, iar cu relația (15.7) se calculează variația grosimii lamei.

Remarcăm că această a doua metodă nu se poate aplica la lame groase deoarece în acest caz inelele la infinit sînt unghiular foarte mici.

c) *Măsurarea razelor de curbură ale suprafețelor lentilelor sferice cu calibre oplice. Principiul melodei.* Se pune în contact suprafața verificată cu o suprafață de referință cu raza de curbură cunoscută, puțin diferită, și se studiază franjele produse de lama de aer cuprinsă între cele două suprafețe. Fie două suprafețe sferice (fig. 15.10) de raze $R_1 = \overline{O_1M_1}$ și $R_2 = \overline{O_2M_2}$. Presupunînd că sferele nu sînt în contact, $e = \overline{S_1S_2}$. Considerînd punctele M_1 și M_2 la distanța $\overline{M_1H_1} \simeq \simeq \overline{M_2H_2} = x$, rezultă grosimea lamei de aer $\overline{M_1M_2} = = e + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Considerînd un număr de $\lambda/2$ (întreg sau fracționar) între M_1 și M_2 vom putea scrie: $e + + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = k \cdot \frac{\lambda}{2}$, iar în centru: $e = k_0 \cdot \frac{\lambda}{2}$ de unde rezultă

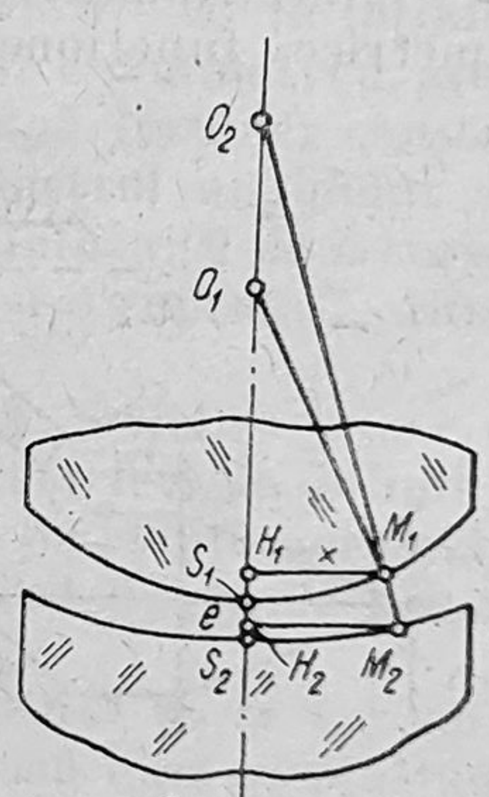


Fig. 15.10

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} + \frac{(k - k_0)\lambda}{x^2}, \tag{15.9}$$

unde $k - k_0$ reprezintă numărul de franje din centru pînă la marginea suprafeței verificate.

Precizia melodei. Considerînd R_2 raza suprafeței de referință și λ lungimea de undă măsurate cu exactitate, precizia erorii depinde de aprecierea numărului de franje $N = k - k_0$, deoarece nu se poate fixa cu precizie mijlocul unei franje, și de măsurarea lungimii x, care se realizează cu precizia dx. Diferențiind ecuația (15.9) rezultă

$$\frac{dR_1}{R_1^2} = \frac{\lambda dN}{x^2} - \frac{2N\lambda\, dx}{x^3}$$

de unde, eroarea relativă

$$\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} = \frac{\lambda R_1 \,\mathrm{d}N}{x^2} + 2\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{15.10}$$

în care am înlocuit din ecuația (15.9) : $\frac{R_1 N\lambda}{x^2} = 1 - \frac{R_1}{R_2}$.

Observație. Este foarte avantajos să se utilizeaze o suprafață de referință cu raza foarte apropiată de cea a suprafeței de verificat $R_2 \simeq R_1$ și să se considere inelele de diametre mari. În acest caz eroarea relativă devine : $\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} = \frac{\lambda R_1}{x^2} \cdot \mathrm{d}N$ sau eroarea absolută

$$\mathrm{d}R_1 = \frac{\lambda}{(x/R_1)^2} \cdot \mathrm{d}N \tag{15.11}$$

Exemplu numeric. Pentru $\frac{x}{R_1} = \frac{1}{5}$, $\lambda = 0{,}6$ μm și $\mathrm{d}N = 0{,}5$ (o jumătate de franjă), rezultă o eroare de determinare a razei suprafeței sferice : $\mathrm{d}R_1 = 7{,}5$ μm.

Aplicație. Construcția calibrelor optice pentru măsurarea razelor de curbură. Pentru a controla execuția razei unei lentile sferice se studiază franjele produse între suprafața lentilei și o suprafață de referință avînd raza de curbură dorită, de semn contrar, precizia execuției fiind perfectă. Pentru determinarea razei de curbură a suprafeței verificate se aplică formula (15.9).

15.1.4. **Interferometrul Michelson**

Interferometrul Michelson, care stă la baza multor metode interferometrice, funcționează după următorul principiu : razele provenind dintr-o sursă punctiformă S cad pe o lamă cu prima față semitransparentă L_1, înclinată la 45° (fig. 15.11). Fasciculul incident se divide în două fascicule : primul urmărește drumul AB_1, se reflectă pe oglinda Og_1 și revine în A, traversează lama L_1, fiind apoi transmis prin obiectivul O_2; al doilea fascicul traversează lama L_1, se reflectă în B_2 pe oglinda plană Og_2, revine prin lama L_1, se reflectă în A, suprapunîndu-se primului fascicul cu care interferă la infinit, franjele fiind localizate în planul focal al obiectivului O_2.

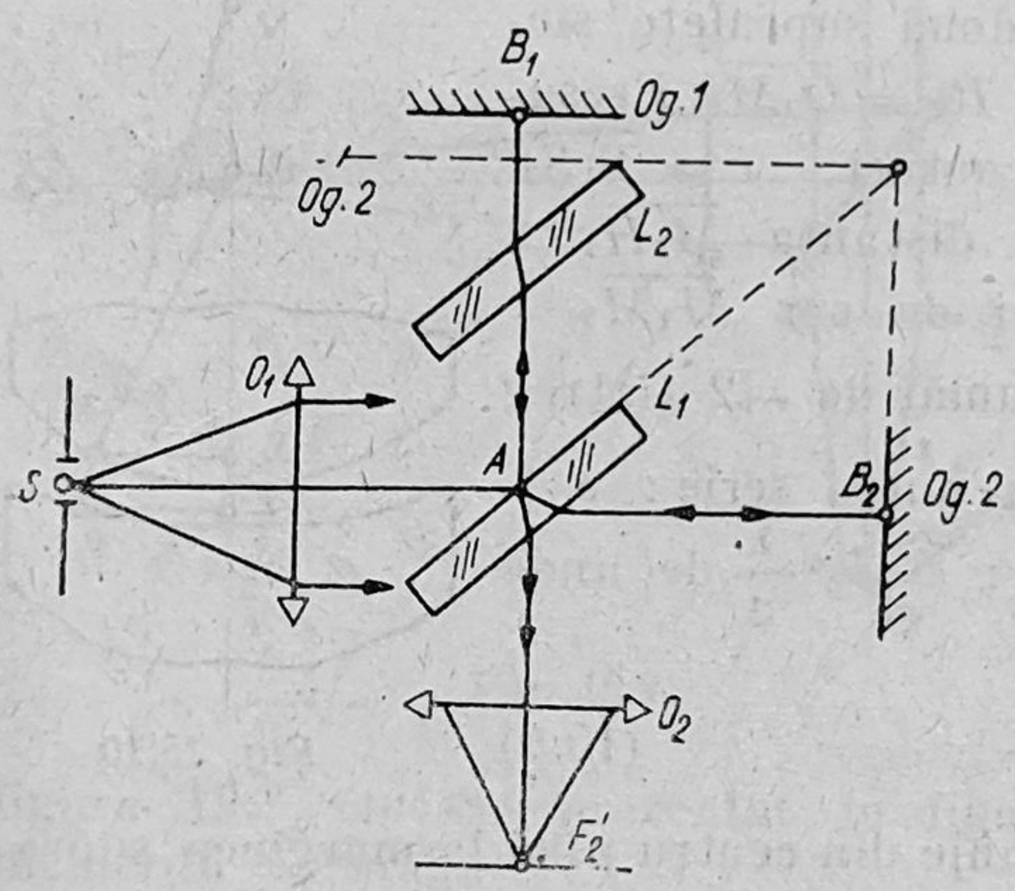


Fig. 15.11

Deoarece primul fascicul traversează lama L_1 o singură dată, în timp ce al doilea fascicul o traversează de trei ori, pentru a face cele două drumuri optice identice pe cît posibil, se interpune lama L_2, numită compensatoare, pe traseul AB_1. Cum o egalitate riguroasă a grosimilor celor două lame este practic imposibil de realizat, diferențele foarte mici de drumuri optice se compensează prin înclinarea lamei L_2.

Dacă i este unghiul de incidență a fasciculului pe lamă, r unghiul de refracție, e grosimea lamei compensatoare și n indicele de refracție, diferența de drum compensată la o singură trecere este (fig. 15.12) :

$$\Delta = n \cdot \overline{IJ} - \overline{IH} = e(n \cdot \cos r - \cos i) \quad (15.12).$$

Diferențiind, se determină variația drumului optic pentru o înclinare foarte mică a lamei compensatoare

$$d\Delta = e \frac{\sin(i - r)}{\cos r} di \qquad (15.13)$$

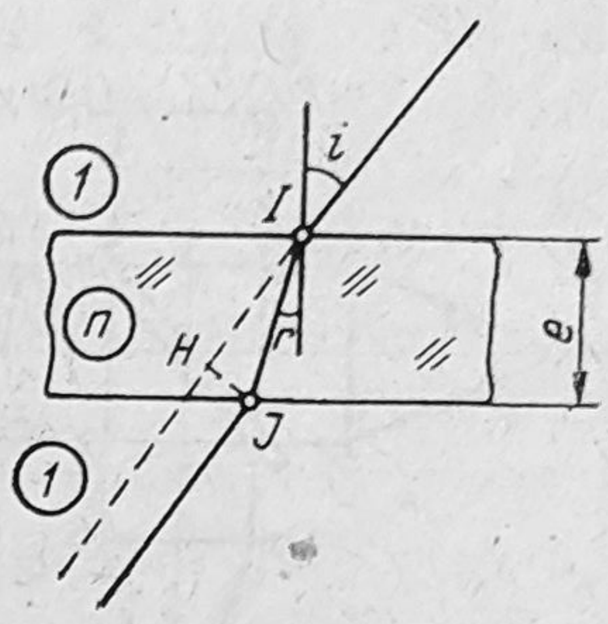


Fig. 15.12

a) *Observarea franjelor de egală grosime (benzi Fizeau).* Prin reflexie pe fața A a lamei separatoare L_1, oglinda Og_2 are o imagine Og_2' ; fenomenul care are loc poate fi considerat ca și cum ar fi produs de o lamă de aer de grosime egală cu distanța între oglinda Og_1 și imaginea Og_2' a oglinzii Og_2.
Dacă Og_1 și Og_2' nu sînt paralele se formează un con de aer și se vor observa franje de egală grosime localizate pe lamă, paralele și echidistante (dacă piesele optice care formează interferometrul L_1, L_2, Og_1, Og_2 sînt perfecte). Sistemul de iluminare este format dintr-un colimator SO_1, iar dimensiunea sursei se reglează cu ajutorul unei diafragme tip iris montată în focarul colimatorului.

b) *Observarea franjelor de egală înclinare (inele Haidinger).* Dacă imaginea oglinzii Og_2 este riguros paralelă cu Og_1, se pot observa inele la infinit, localizate în planul focal al obiectivului O_2, care poate fi examinat cu ajutorul unei lupe. Ansamblul format de obiectivul O_2 și lupă (ocular) constituie o lunetă al cărei grosisment se alege funcție de diametrul unghiular al inelelor observate. În acest caz, sursa punctiformă S este înlocuită de o sursă cu suprafață mai largă, putînd chiar înlocui colimatorul cu o suprafață difuzantă iluminată uniform de o sursă monocromatică.

c) *Reglajul interferometrului Michelson* se realizează astfel :
— se aduc în coincidență cele două fascicule care interferă la infinit ;
— og inzile Og_1 și Og_2 se orientează pentru a lucra în incidență normală.
Aceste două operații se efectuează simultan, observînd imaginile lui S prin autocolimație pe oglinzile Og_1 și Og_2.
În cazul reglajului perfect, în planul focal al obiectivului O_2 se vor observa, cu ajutorul lupei, imaginile sursei S ; se îndepărtează lupa și plasînd ochiul în F_2' se văd franjele de egală grosime.
Reglînd orientarea oglinzilor Og_1 și Og_2 astfel încît să se lărgească la maximum franjele de egală grosime, obținîndu-se astfel o tentă plată, se realizează paralelismul riguros între Og_1 și Og_2, fiind deci posibil să se observe, cu ajutorul lupei (ocularului) franjele de egală înclinare ;
— se reglează lărgimea sursei S.

15.1.5. Interferometrul Twyman-Green

Interferometrul Twyman-Green (fig. 15.13) are la bază principiul interferometrului Michelson, modificat în felul următor : oglinda plană Og_2 din figura 15.11 este înlocuită prin sistemul de verificat $S.O.$ și o suprafață de

referință reflectantă, convenabil aleasă. Luînd, spre exemplu, cazul studierii unui obiectiv foto suprafața de referință este o oglindă convexă Og_2 al cărei centru de curbură coincide cu focarul imagine F' al obiectivului foto. Obiectivul foto avînd în general aberații, unda emergentă Σ este deformată. Fenomenul care are loc se produce ca și cum s-ar observa franjele de egală grosime între unda plană de referință Σ'' produsă de oglinda plană Og_1 și imaginea undei studiate Σ'. Dacă obiectivul studiat *S.O.* este perfect, Σ este o undă plană, în focarul F'_2 apărînd o tentă plată între Σ' și Σ'', paralele între ele. Modificînd puțin orientarea oglinzii Og_1 apar franje de egală grosime rectilinii și echidistante. Dacă obiectivul *S.O.* are aberații, deformațiile undei Σ sînt de două ori mai mari decît deformațiile de măsurat, deoarece obiectivul *S.O.* este traversat de două ori de fasciculul luminos.

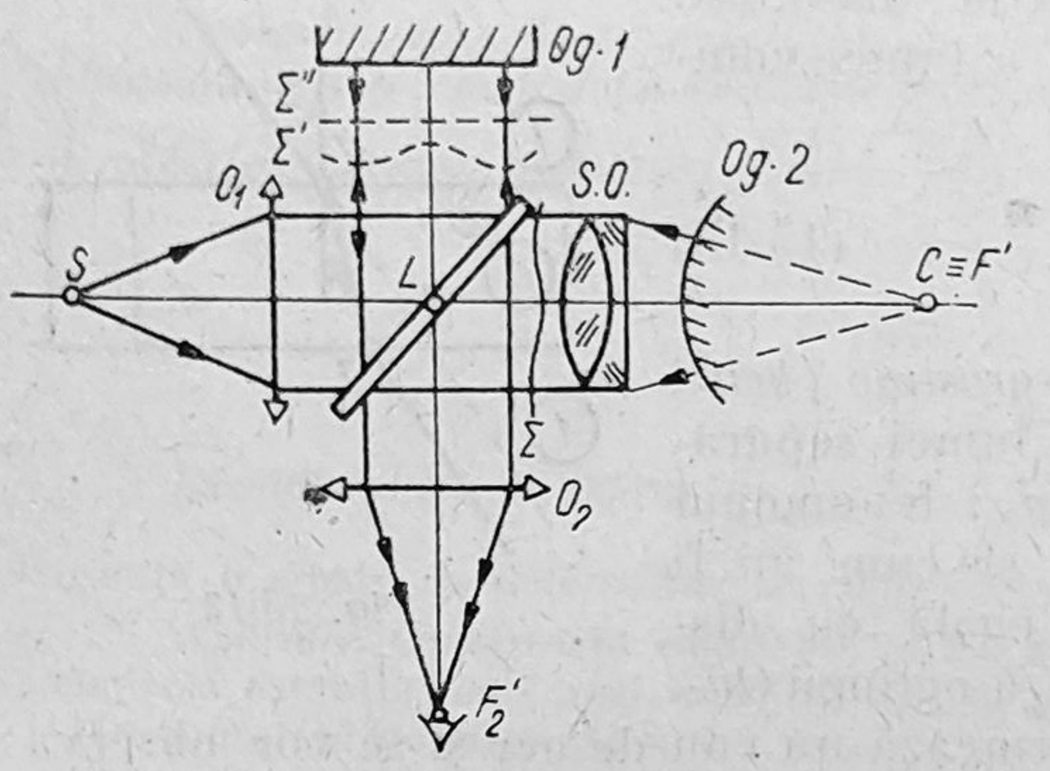


Fig. 15.13

15.1.6. **Interferometrul Jamin**

Interferometrul Jamin se compune din două lame plan-paralele groase L_1 și L_2 (fig. 15.14) avînd fețele posterioare argintate și poziționate paralele între ele. Considerînd o rază SI_1 incidentă sub unghiul i pe prima lamă, o parte este reflectată în direcția I_1I_2, iar cea mai mare parte se refractă și apoi se reflectă în J_1, ieșind din lama L_1 în direcția K_1K_2. Razele $I\,I_2$ și K_1K_2 sînt paralele, de intensități foarte diferite și prezentînd o mare diferență de drum optic. În lama L_2 au loc reflexii și refracții multiple, dar luînd în considerație numai raza reflectată în K_2 și raza $I_2J_2K_2$, refractată în K_2, acestea interferă la infinit ; aceste două raze suferind aceleași fenomene, dacă lamele L_1 și L_2 sînt riguros paralele și identice ca grosimi și indice de refracție, diferența de drum optic este nulă, iar amplitudinile oscilațiilor sînt egale, astfel încît se observă o tentă plată.

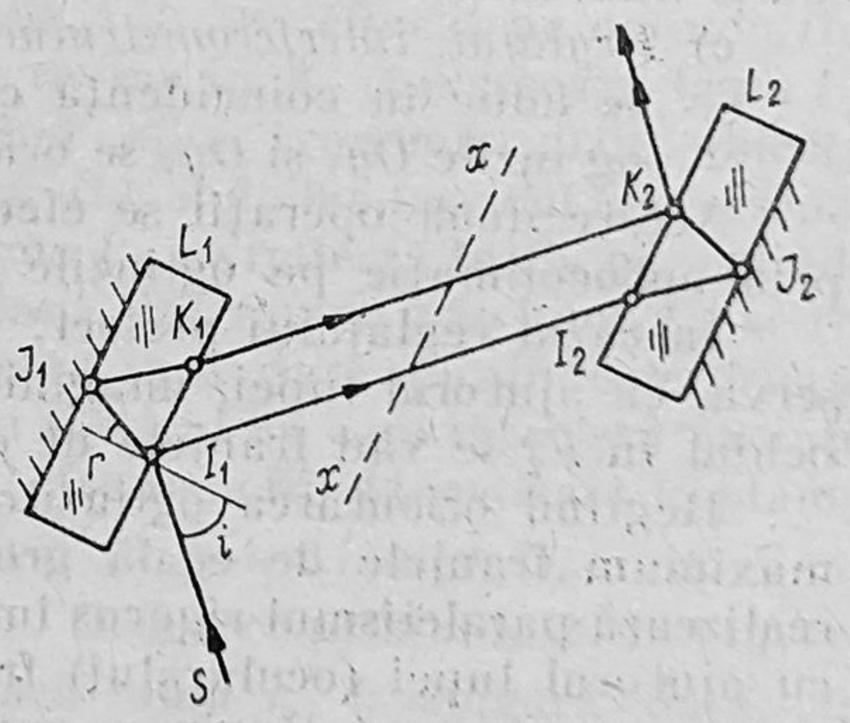


Fig. 15.14

Dînd o mică înclinație celor două lame, apar franje la infinit paralele cu direcția xx', observabile cu ajutorul unei lunete. Echidistanța unghiulară este dată de relația : $\alpha = \frac{\lambda}{2e\sigma}(2n^4 - 1)^{1/2}$, unde e și n sînt grosimea și indicele de refracție ale lamelor, iar σ unghiul între normalele lamelor.

Pentru a regla aparatul, se utilizează lumină monocromatică, franjele apărînd chiar la un paralelism grosier prereglat ; se reglează fin din șuruburile de poziționare ale lamelor, pînă cînd franjele se lărgesc la maximum, obținînd aproape o tentă platâ. Se introduce apoi lumina albă în locul celei monocromatice, cea mai mică dereglare făcînd să apară figura de interferență : o franjă centrală albă încadrată de franje colorate. Interferometrul Jamin se utilizează în mod particular la studiul indicilor de refracție ai gazelor și la verificarea legii $(n - 1)/\rho$, unde ρ reprezintă masa specifică a gazului. În această aplicație se introduc două incinte transparente identice pe traseele I_1I_2 și K_1K_2 conținînd gazul de studiat și, respectiv, un gaz etalon, diferențele de drum optic ce apar datorîndu-se numai indicilor de refracție diferiți.

15.1.7. Interferometrul Mach-Zehnder

Principiul interferometrului Mach-Zehnder (fig. 15.15) este următorul : un fascicul incident SI_1 cade pe o lamă semitransparentă L_1 și se divide în două fascicule : (1) se reflectă pe oglinda Og_1 și traversează în K a doua lamă semitransparentă L_2 identică cu prima ; (2) este transmis prin lama L_1, apoi reflectat pe oglinda Og_2 și pe lama semitransparentă L_2, suprapunîndu-se peste fasciculul (1), interferînd la infinit.

Pentru a regla interferometrul, lamele L_1, L_2 și oglinzile Og_1, Og_2 trebuie aduse paralele riguros. Acest reglaj se face începînd cu oglinzile, cu ajutorul unei lunete autocolimatoare, așezate în pozițiile $AC.1$, $AC.2$ și a lamei de reglaj L_3 situate între cele două oglinzi (se asigură pe rînd paralelismul oglinzilor cu lama L_3). Reglajul paralelismului lamelor semitransparente L_1 și L_2 se face astfel : se utilizează două reticule R_1 și R_2 montate la distanță finită și, respectiv, în focarul colimatorului C (adică la infinit, față de L_1). Se observă din direcția S' cu un ocular și se reglează poziția lamei L_2 făcînd să se suprapună imaginile reticulului R_1, după care se observă cu ajutorul unei lunete și se reglează poziția lamei L_1 făcînd să coincidă imaginile reticulului R_2. După realizarea acestui reglaj se obțin inele la infinit. Se deplasează unul din elemente paralel cu el însuși, pînă cînd se obține o tentă platâ (dispare cîte un inel la fiecare deplasare cu $(\lambda/2)/\sqrt{2}$, unghiul i cu razele fiind 45°). Dacă se rotește, de exemplu, lama L_1, apar imediat franje rectilinii localizate în vecinătatea elementului rotit.

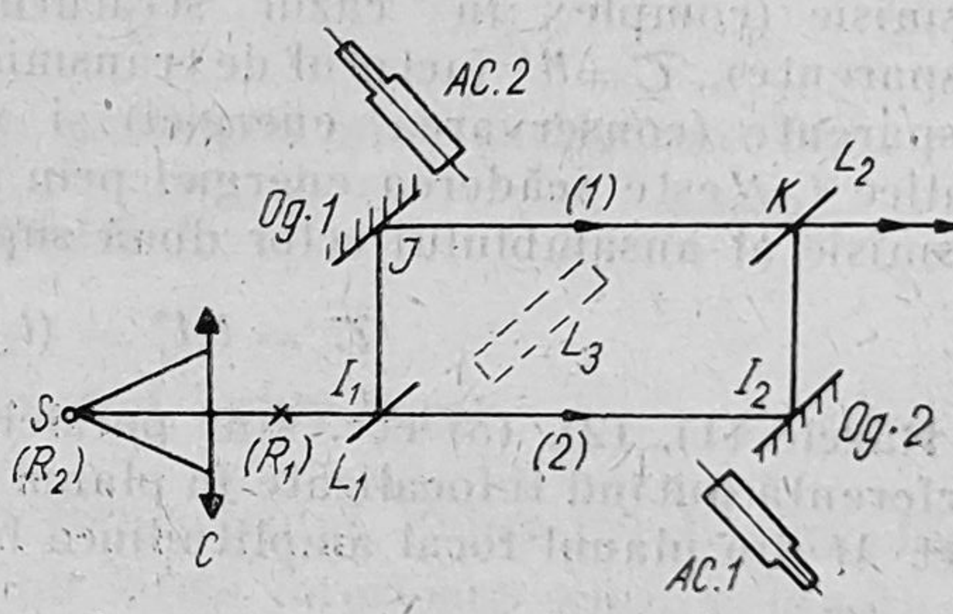


Fig. 15.15

15.2. Interferometre cu unde multiple

15.2.1. Franje produse de o lamă plan-paralelă prin transmisie

Considerăm două suprafețe paralele semireflectante (fig. 15.16). Aceste două suprafețe sînt realizate pe două lame plan-paralele din sticlă, plasate în aer. O rază incidentă SI_1 dă naștere unei serii de raze reflectate I_1J_1, J_1I_2, I_2J_2... și unei serii de raze transmise (1), (2), (3), ... Amplitudinile acestor raze transmise, luînd amplitudinea razei incidente ca unitate și neglijînd pierderile prin reflexie la suprafața de separație aer-sticlă a celor două lame, se calculează ținînd seama de coeficienții de transmisie și de reflexie:

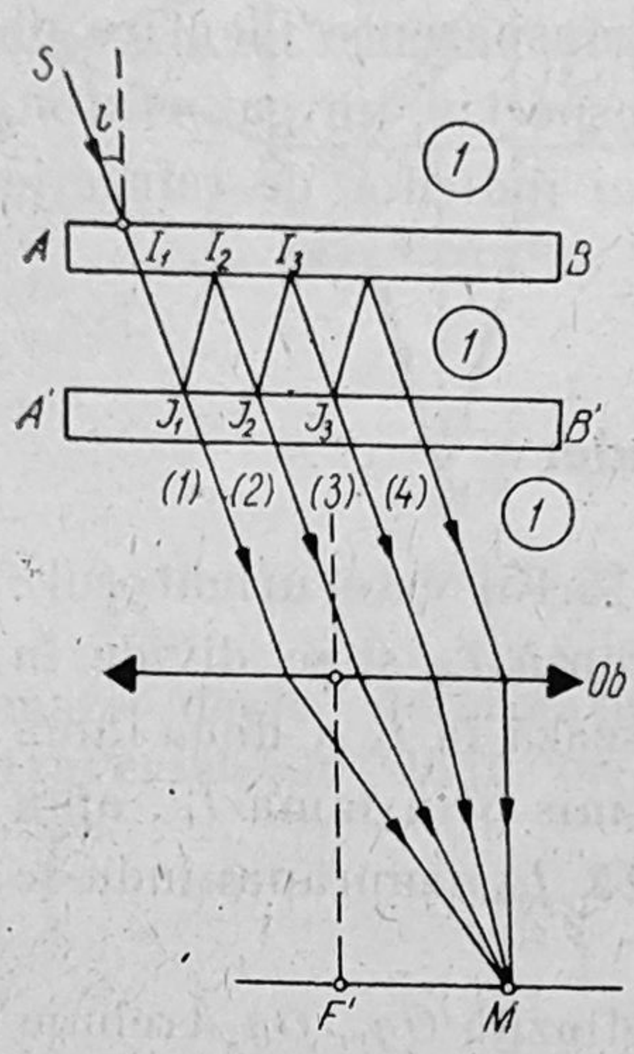


Fig. 15.16

(1) $t_{21}t_{12}$

(2) $t_{21}t_{12}r^2e^{-i\varphi}$

(3) $t_{21}t_{12}r^4\,e^{-i\cdot 2\varphi}$

. . . . . .

unde t_{12} este coeficientul de transmisie a unei suprafețe semireflectante în sensul aer-sticlă, t_{21} coeficientul de transmisie în sensul sticlă-aer, iar $t = t_{21}t_{12}$ coeficientul de transmisie al ansamblului suprafețelor semireflectante, $r = \rho e^{-i\varphi'}$, coeficientul de reflexie (complex în cazul reflexiei metalice și real în cazul reflexiei vitroase ($\varphi' = 0$ sau π); $\mathcal{R} = rr^*$ este factorul de reflexie (energetic), $t = \tau e^{-i\varphi''}$ coeficientul de transmisie (complex în cazul straturilor metalice și real dacă mediile sînt transparente), $\mathcal{T} = tt^*$ factorul de transmisie, $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ dacă mediile sînt transparente (conservarea energiei) și $\mathcal{R} + \mathcal{T} + \mathcal{A} = 1$ în cazul reflexiei metalice ($\mathcal{A}$ este scăderea energiei prin absorbție). Rezultă că factorul de transmisie al ansamblului celor două suprafețe semireflectante este

$$\mathcal{T} = t \cdot t^* = (t_{21}t_{12})(t_{21}^*t_{12}^*).$$

Razele (1), (2), (3) etc. sînt paralele și interferă la infinit, franjele de interferență putînd fi localizate în planul focal F' al unui obiectiv Ob. Într-un punct M din planul focal amplitudinea luminoasă este dată de suma

$$A_M = t + tr^2e^{-i\varphi} + tr^4e^{-i\cdot 2\varphi} + \ldots = \frac{t}{1 - r^2e^{-i\varphi}}. \qquad (15.14)$$

Intensitatea luminoasă este dată de expresia

$$I_M = \frac{tt^*I_0}{(1 - r^2e^{-i\varphi})(1 - r^{*2}e^{i\varphi})} = \frac{\mathcal{T}I_0}{1 - 2\mathcal{R}\cos(\varphi + 2\varphi') - \mathcal{R}^2}.$$

Notînd $\varphi + 2\varphi' = \Phi$, rezultă

$$I_M = I_0 \frac{\mathcal{T}^2}{(1 - \mathcal{R})^2}\left[1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1 - \mathcal{R})^2}\sin^2\frac{\Phi}{2}\right]^{-1}. \qquad (15.15)$$

Se obține un inel de intensitate maximă, dacă $\sin^2 \Phi/2 = 0$, adică

$$\frac{\Phi}{2} = \frac{2\pi e \cos i}{\lambda} + \varphi' = k\pi \rightarrow p = \frac{\Phi/2}{\pi} = \frac{2e \cos i}{\lambda} + \frac{\varphi'}{\pi} = k \quad (15.16)$$

unde $k \in \mathfrak{N}$.

Relația (15.15) arată că

$$I_{max} = I_0 \frac{\mathcal{T}^2}{(1-\mathcal{R})^2}; \; I_{min} = I_0 \frac{\mathcal{T}^2}{(1+\mathcal{R})^2} \quad (15.17)$$

de unde rezultă contrastul franjelor

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}^2}. \quad (15.18)$$

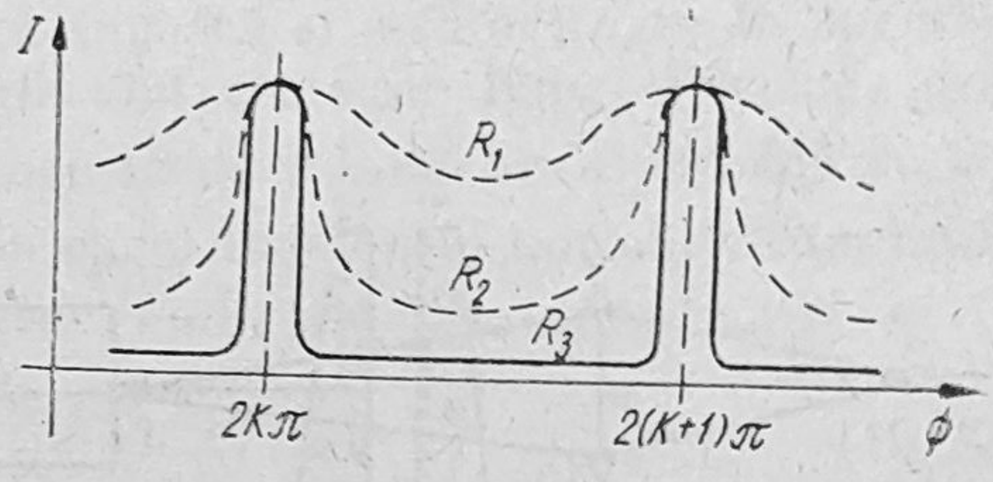


Fig. 15.17

Contrastul este slab cînd $\mathcal{R}$ este mic și devine foarte bun cînd $\mathcal{R} \rightarrow 1$. În figura 15.17 sînt reprezentate trei curbe $I(\Phi)$ pentru trei valori $\mathcal{R} < \mathcal{R}_2 < \mathcal{R}_3$ ale factorului de reflexie. Ordinul de interferență într-un punct M din planul focal este:

$$p = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{2e \cos i}{\lambda} + \frac{\varphi'}{\pi}$$

iar în F'

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} + \frac{\varphi'}{\pi}. \quad (15.19)$$

Între F' și M, numărul (întreg sau fracționar) de franje este dat de relația

$$\Delta p = p_0 - p = \frac{2e}{\lambda}(1 - \cos i) \quad (15.20)$$

de unde rezultă, pentru unghiuri de incidență mici, înclinarea

$$i \simeq (\Delta p \lambda / e)^{1/2}. \quad (15.21)$$

15.2.2. Interferometrul Fabry-Pérot

Componentele esențiale ale interferometrului Fabry-Pérot (fig. 15.18) sînt două lame din sticlă L, L_2 avînd fețele interioare semireflectante paralele între ele, iar fețele exterioare făcînd un unghi mic astfel încît inelele de interferență produse să fie în afara cîmpului. Se observă, așadar, franjele de egală înclinare produse de lama de aer plan-paralelă cuprinsă între fețele semireflectante. Pentru observare se folosește o lunetă, iar pentru iluminare o sursă monocromatică de dimensiuni reduse, care este proiectată de obiectivul O în vecinătatea pupilei de intrare a lunetei. În anumite cazuri este necesar să se mențină cele două lame la o distanță strict constantă, pentru

aceasta utilizîndu-se trei cale de aceeași grosime ; se realizează astfel un etalon interferențial. Pentru cale se utilizează în general invarul, datorită dilatației lui foarte reduse.

Cum calele nu pot fi riguros egale, paralelismul fețelor interioare ale etalonului Fabry-Pérot se reglează prin presiunea a trei arcuri R, cu ajutorul a trei șuruburi de reglare S (la 120°), figura 15.19.

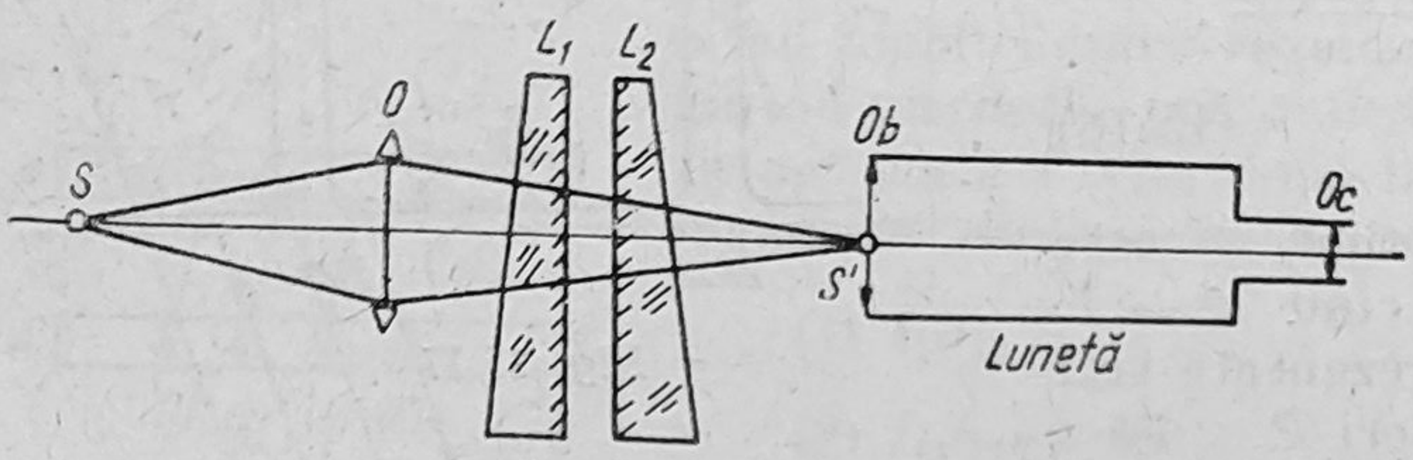


Fig. 15.18

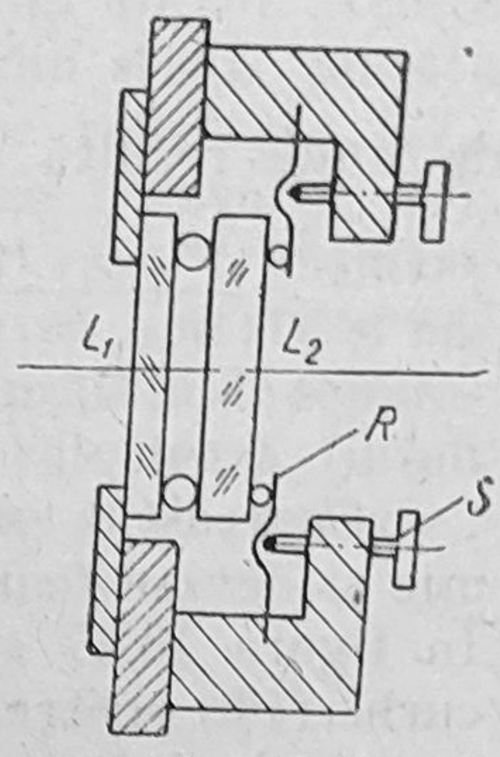


Fig. 15.19

15.2.3. Interferometrul Lummer-Gehrcke

Interferometrul Lummer-Gehrcke utilizează o lamă plan-paralelă L în care intră o rază SI sub o incidență vecină reflexiei totale. O mică fracțiune din lumina incidentă emerge în direcția b_1, restul se reflectă în direcția IJ ; de asemenea, în J o mică fracțiune emerge în direcția a , restul se reflectă după direcția JK. În final, se obține o serie de raze a , a_2, a_3, ... și b_1, b_2, b_3, ... cu amplitudinile descrescătoare după o progresie geometrică și defazate uniform, care sînt focalizate în planul focal al obiectivului O în punctele M_a și M_b, simetrice în raport cu F'. Se obțin franje strălucitoare fine pe fond negru, aproximativ rectilinii și normale pe planul figurii 15.20. Cum lama L

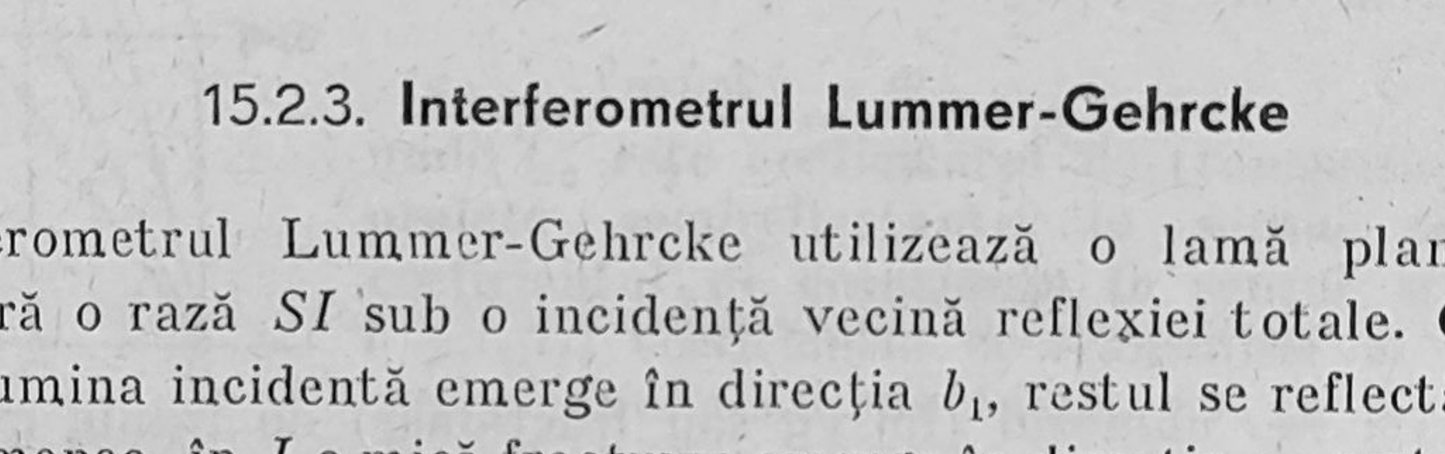


Fig. 15.20

este de lungime limitată, numărul razelor care interferă în M_a și M_b este limitat și o formulă analogă formulei (15.15) nu este aplicabilă. Acest interferometru se utilizează pentru analiza luminii compuse din două radiații cu lungimi de undă vecine, una interferînd în M_a, iar cealaltă în M_b.

15.3. Aplicații ale interferenței în tehnologia optică

15.3.1. Filtre interferențiale

În principiu, un filtru interferențial constă dintr-un etalon Fabry-Pérot, de o grosime convenabil aleasă, fețele avînd un factor de reflexie ridicat : iluminînd un asemenea etalon cu lumină albă și analizînd lumina transmisă cu un spectroscop se observă un spectru canelat, care poate fi redus, reglînd grosimea etalonului, la o singură canelură îngustă și strălucitoare în spectrul vizibil. În practică, filtrele interferențiale sînt etaloane Fabry-Pérot de grosimi foarte reduse, lama de aer fiind înlocuită de o lamă transparentă solidă (strat subțire) de indice de refracție n. În cazul incidenței normale, lungimile de undă ale luminii transmise sînt date de condiția de maxim (15.16)

$$p = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2ne}{\lambda} + \frac{\varphi'}{\lambda} = k \qquad (15.22)$$

Așadar, lungimile de undă ale luminii transmise sînt

$$\lambda_1 = \Delta, \ \lambda_2 = \Delta/2, \ \ldots$$

Exemplu numeric. Pentru $\Delta = 1{,}1$ μm, lungimile de undă a luminii transmise sînt :

$$\lambda_1 = 1{,}1 \ \mu\text{m}, \ \lambda_2 = 0{,}55 \ \mu\text{m}, \ \lambda_3 = 0{,}367 \ \mu\text{m}, \ \ldots$$

Se obține, așadar un filtru pentru radiația verde cu $\lambda_2 = 0{,}55$ μm. Lărgimea benzii transmise $d\lambda$, în vecinătatea lungimii de undă λ_2 este dată de expresia

$$d\lambda = \lambda \frac{1 - \mathcal{R}}{k\pi\mathcal{R}^{1/2}}. \qquad (15.23)$$

Considerînd factorul de reflexie $\mathcal{R} = 0{,}9$ se obține o lărgime a benzii transmise $d\lambda \approx 80$ Å ($k = 2$). Relația (15.23) arată că lărgimea benzii scade dacă p crește, dar în acest caz distanța între canelurile spectrului transmis scade. De exemplu, dacă se ia $\Delta = 2{,}20$ μm, se obțin trei lungimi de undă în spectrul vizibil : $\lambda_3 = 0{,}73$ μm, $\lambda_4 = 0{,}55$ μm, $\lambda_5 = 0{,}44$ m. Pentru $\mathcal{R} = 0{,}9$ și $k = 4$, canelura $\lambda_4 = 0{,}55$ μm are o lărgime $d\lambda = 45$ Å, deci mai fină decît în exemplul precedent. Celelalte două benzi sînt depărtate și pot fi eliminate utilizînd un filtru interferențial mai larg.

15.3.2. Straturi subțiri

a) *Straturile subțiri antireflectante* au ca efect creșterea transparenței, diminuînd lumina reflectată de suprafețele de sticlă, obținîndu-se astfel o ameliorare a performanțelor sistemelor optice, cu atît mai pronunțată cu cît numărul suprafețelor este mai mare.

La trecerea unui fascicul de lumină printr-un sistem optic, o parte din lumină se reflectă pe suprafețele lentilelor, revenind în direcția sursei, ceea ce scade calitatea imaginilor. De asemenea, o parte din această lumină se poate reflecta în interiorul sistemului optic, revenind spre imagine, producînd un efect *halo* parazit. Este deci interesant de a reduce pe cît posibil lumina

reflectată de suprafețele elementelor optice. Fie L o suprafață de sticlă, cu indice de refracție n, pe care depunem un strat subțire de grosime e și indice de refracție n_s (fig. 15.21). Considerînd amplitudinea undei incidente SI egală cu unitatea, amplitudinile reflectate de stratul subțire, în cazul incidenței normale, sînt date de formulele lui Fresnel

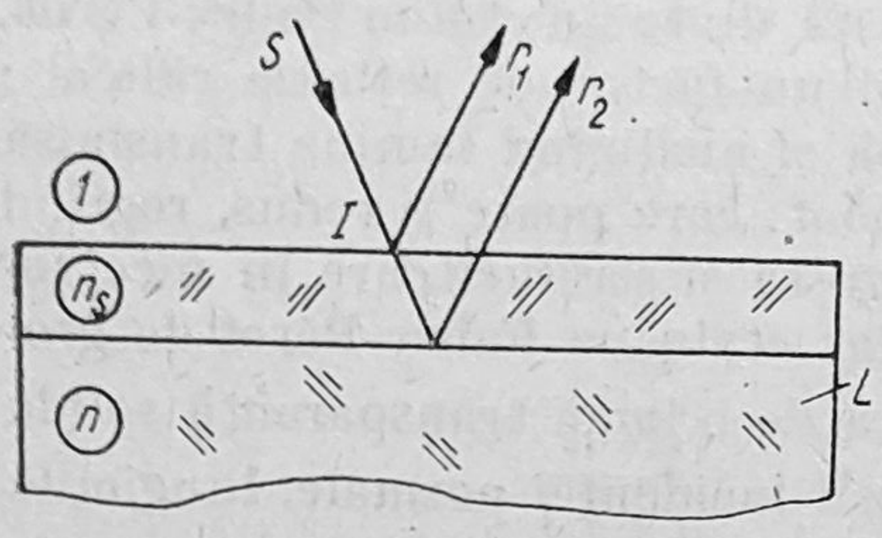


Fig. 15.21

$$r_{\perp} = \frac{1 - n_s}{1 + n_s}; \; r_2 = \frac{n_s - n}{n_s + n}.$$

Presupunînd $n_s < n$, diferența de fază între cele două unde reflectate este : $\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi n_s e}{\lambda}$. Intensitatea reflectată, obținută în urma interferării razelor (1) și (2) este : $I = r_1^2 + r_2^2 + 2r\, r_2 \cos\varphi$. Pentru lungimea de undă λ se obține un minim de intensitate pentru

$$\varphi = 2\pi\Delta/\lambda = (2k + 1)\pi \rightarrow n_s e = (2k + 1)\lambda/4. \qquad (15.24)$$

Intensitatea reflectată devine în acest caz : $I_{min} = (r_1 - r_2)^2$.

Pentru a obține extincția completă a reflexiei în lumină monocromatică trebuie realizată condiția

$$r_1 = r_2 \rightarrow n_s = n^{1/2}. \qquad (15.25)$$

Interesul este ca stratul să fie cît mai subțire, astfel încît variația fenomenului să fie cît mai mică posibil, în raport cu λ.

Factorul de reflexie are următoarele expresii, fără strat subțire și după tratamentul antireflex

$$\mathcal{R} = \left(\frac{1 - n}{1 + n}\right)^2; \; \mathcal{R}' = (r_1 - r_2)^2 = \left[\frac{2(n - n_s^2)}{(n_s + 1)(n_s + n)}\right]^2. \qquad (15.26)$$

Factorul de reflexie diminuează puțin pentru indici de refracție mici, dar această diminuare este mai sensibilă la indici de refracție mai mari (după cum se vede și din tabelul 15.1).

Tabelul 15.1

Sticla optică n	1,4	1,5	1,6	1,7
Factorul de reflexie inițial $\mathcal{R}$	0,028	0,04	0,053	0,067
Factorul de reflexie după tratament $\mathcal{R}$	0,015	0,008	0,003	0,001

Materiale folosite pentru straturi subțiri :

— criolit (florură dublă de aluminiu și sodiu), $n_s = 1{,}35$, puțin rezistent la acțiuni mecanice ;

— florura de magneziu, $n_s = 1{,}38$, mai rezistent.

Observație. Pentru sticle avînd indicele de refracție $n < 1{,}5$ condiția (15.25) nu mai poate fi respectată, deoarece nu există substanțe utilizabile pentru straturi subțiri cu indice de refracție inferior lui 1,34. În acest caz se aplică mai multe straturi subțiri de grosimi și indici de refracție convenabil aleși, în același timp putîndu-se anula reflectivitatea pentru mai multe lungimi de undă, practic pentru tot spectrul vizibil. Materialele utilizate pentru straturi multiple sînt, alături de cele menționate mai sus :

— sulfura de zinc $n_2 = 2{,}3$
— oxidul de siliciu $n_1 = 1{,}65$
— oxidul de titan $n_2 = 2{,}2$.

b) *Straturi subțiri puternic reflectătoare.* În anumite cazuri, de exemplu la interferometrul Fabry-Pérot sau la dispozitivele laser, este important să se mărească factorul de reflexie a unei suprafețe de sticlă menținînd totuși o bună transmisie.

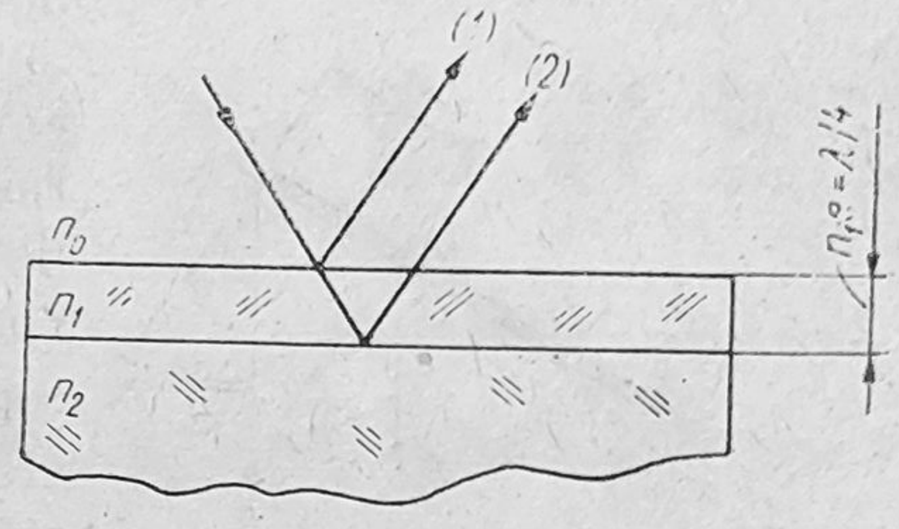


Fig. 15.22

Astfel, factorul de reflexie crește substanțial dacă pe suprafața optică se depune un strat subțire transparent cu un indice de refracție ridicat și de grosime optică $\lambda/4$ (fig. 15.22). În acest caz factorul de reflexie este maxim : aceasta rezultă din expresia intensității reflectate, punînd condiția $\varphi = 2k\pi$, dar în acest caz $n_0 < n$, ceea ce face să apară un defazaj suplimentar π față de cel produs de diferența de drum $\Delta = 2n_1 e$

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} + \pi = 2k\pi \rightarrow n_1 e = (2k-1)\cdot\lambda/4 \xrightarrow{k=1} n_1 e = \lambda/4. \qquad (15.27)$$

Se pot obține rezultate superioare utilizînd straturi multiple transparente. Materialele utilizate pentru straturi puternic reflectante :

— oxid de siliciu și oxid de titan (straturi alternative) ;
— criolit și sulfură de zinc (straturi alternative).

15.4. Rețele de difracție

O rețea plană prin transmisie constă dintr-un număr mare de fante fine paralele, situate în același plan, egale și echidistante. Distanța între două puncte omoloage a două fante constituie perioada rețelei. Astfel de rețele prin transmisie se obțin prin trasarea cu diamant a unor trăsături echidistante pe o lamă de sticlă. Mai des sînt utilizate rețelele prin reflexie : acestea se obțin tot prin trasarea regulată cu diamant a unor benzi reflectante pe un strat metalic subțire, care a fost depus prin evaporare sub vid pe o lamă de sticlă plană. În ultimul timp, grație realizării obiectivelor de fotolitografie cu putere de rezoluție foarte ridicată și a unor materiale speciale, au mai apărut două tehnologii de obținere a rețelelor optice : trasare optică direct pe plăci fotosensibile de înaltă rezoluție și reducere puternică a unei rețele trasată la o scară mare. În rețelele prin reflexie suportul de sticlă nefiind traversat de lumină, defectele de neomogenitate nu intervin ; pe de altă parte, rețelele prin reflexie pot fi utilizate atît în domeniul vizibil, cît și în ultra-

violet și infraroșu. De asemenea, există tehnologii de obținere a rețelelor de difracție prin metode holografice. Rețelele utilizate curent în spectroscopie au în general 500 trăsături/mm, iar suprafața rețelei variază între 10×10 cm^2 la 25×25 cm^2.

Fenomenul produs de o rețea infinită reprezintă o generalizare la limită a fenomenului produs de n fante identice. Astfel, dacă rețeaua conține 500 linii/mm, pe o lungime de 10 cm va avea 50 000 fante. Pentru a explica fenomenul se consideră o porțiune mică a rețelei și două raze incidente S_1I_1, S_2I_2, unde I_1 și I_2 sînt două puncte omoloage pe două benzi reflectante consecutive (fig. 15.23). Benzile reflectante separate de benzi nereflectante acționează ca și fantele transparente ale unei rețele prin transmisie.

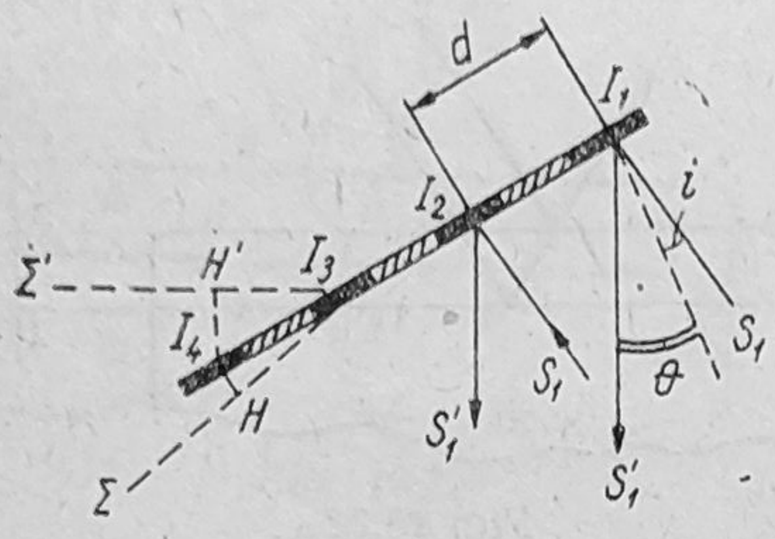


Fig. 15.23

Considerînd razele difractate I_1S_1', I_2S_1', sub unghiul θ și suprafețele echifaze Σ, Σ' prin I_3 corespunzătoare direcțiilor S_1I_1 și, respectiv S_1I_1', se determină diferența de drum Δ între două raze omoloage consecutive $S_1I\,S_1'$ și $S_1I_2S_1$

$$\Delta = \overline{I_4H'} - \overline{I_4H} = d(\sin\theta - \sin i). \qquad (15.28)$$

unde $d = \overline{I_1I_2} = \overline{I_2I_3} = \overline{I_3I_4}$ este perioada rețelei.

Razele difractate de benzile reflectante sînt în concordanță de fază dacă : $\Delta = d(\sin\theta - \sin i) = p\lambda$, adică

$$\sin\theta = \sin i + p\lambda/d. \qquad (15.29)$$

Dacă fasciculul incident este normal pe planul rețelei ($i = 0$), condiția de maxim este $\sin\theta = p\lambda/d$. În direcțiile θ date de relația (15.29) se obțin maxime principale de luminozitate, care reprezintă imagini monocromatice ale sursei S. Dacă sursa punctiformă se înlocuiește cu o fantă subțire luminoasă (iluminată uniform), paralelă cu benzile rețelei, fenomenul rămîne același, repetîndu-se în lungul benzilor.

Dacă $\Delta \neq p\lambda$ nu apare lumină difractată, chiar dacă diferența $\Delta - p\lambda$ este foarte mică. Practic, dacă $\Delta = p\lambda + \frac{\lambda}{2n}$, unde n reprezintă un număr întreg oarecare, oscilația luminoasă difractată de a $(n+1)$-a bandă reflectantă prezintă o diferență de drum față de prima : $\Delta = np\lambda + \lambda/2$, deci este în opoziție de fază cu a doua vibrație, anulîndu-se reciproc. Așadar, între maximele principale nu există practic lumină. Din relația (15.29) rezultă că numărul de maxime principale observabile este limitat de condiția $\sin\theta \leqslant 1$ și este cu atît mai mic cu cît perioada rețelei d este mai mică. De asemenea, relația (15.29) arată că poziția maximelor principale depinde de λ (în afară de maximul central $p = 0$), deci se produce *dispersia luminii*. În afară de maximul central $p = 0$ (imaginea albă a fantei luminoase S), de o parte și de alta a acestei imagini se observă spectre (fig. 15.24).

Două lungimi de undă care diferă prin $d\lambda$, sînt separate de unghiul $d\theta$ dat de expresia

$$d\theta = \frac{d\lambda}{d \cos \theta} . \tag{15.30}$$

Raportul $d\theta/d\lambda$ se numește dispersia rețelei

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{p}{d \cos \theta} \frac{\sin \theta - \sin i}{\lambda \cos \theta} \tag{15.31}$$

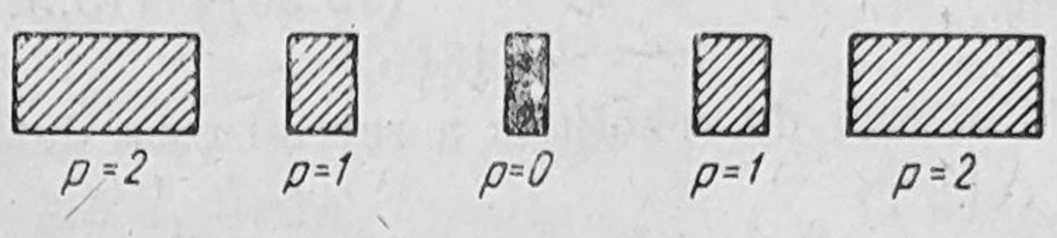


Fig. 15.24

care este cu atît mai mare cu cît p (ordinul spectrului) este mai mare.

Spectrul normal se obține dacă lungimea de undă variază liniar cu θ. Aceasta se realizează dacă

$$\sin i = -p \frac{\lambda_0}{d} \tag{15.32}$$

unde λ_0 reprezintă lungimea de undă situată la mijlocul spectrului de ordinul p, considerat. În acest caz din relația (15.29) rezultă

$$\sin \theta = p(\lambda - \lambda_0)/d \; ; \; \theta_0 = 0 \text{ pentru } \lambda = \lambda_0 \tag{15.33}$$

Pentru lungimi de undă aflate în vecinătatea lui λ_0 se poate aproxima

$$\theta = p(\lambda - \lambda_0)/d. \tag{15.34}$$

Puterea de rezoluție a unei rețele de difracție. Considerînd o rețea de difracție de lungime L conținînd N benzi reflectante (fig. 15.25), intensitatea luminoasă în direcția θ este dată de relația

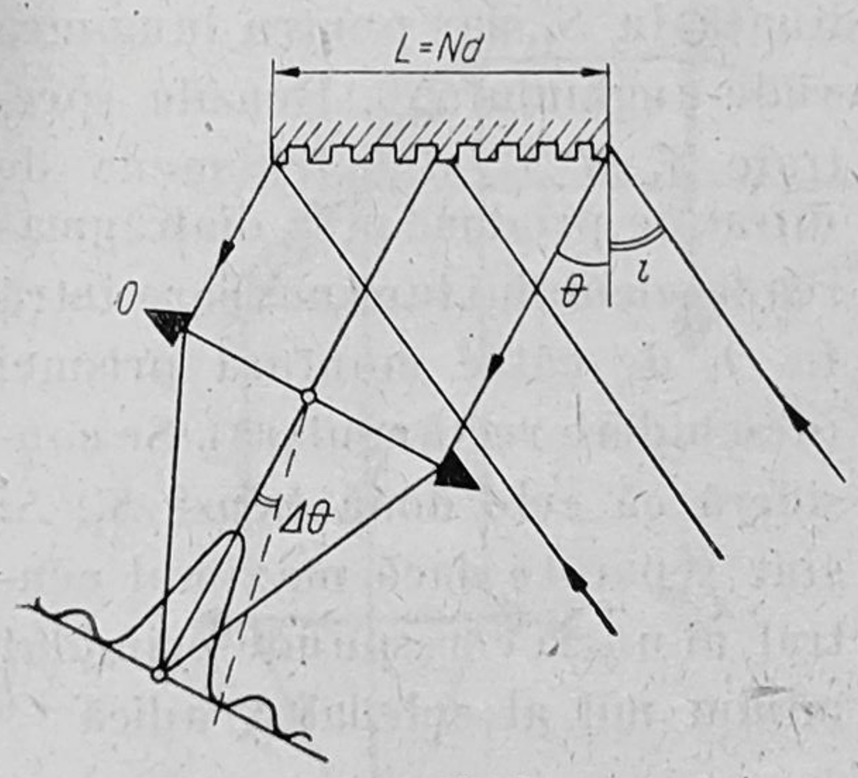


Fig. 15.25

$$I = \left[\frac{\sin(NK\Delta/2)}{\sin(K\Delta/2)} \right]^2 . \tag{15.35}$$

Pentru a studia structura unui maxim principal, considerăm o variație mică a lui θ, $\Delta\theta$, astfel încît diferența de drum optic devine : $\Delta = d \cdot [\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin i] \simeq d \cdot (\sin\theta + \Delta\theta \cdot \cos\theta - \sin i)$ sau, ținînd seama de (15.29) : $\Delta = p\lambda + d \cdot \Delta\theta \cdot \cos\theta$, ceea ce, înlocuit în formula (15.35), duce la

$$I = \frac{\sin^2[NK(d/2)\Delta\theta \cos\theta]}{\sin^2[K(d/2)\Delta\theta \cos\theta]} \simeq$$

$$\simeq N^2 \frac{\sin^2[NK(d/2)\Delta\theta \cos\theta]}{[NK(d/2)\Delta\theta \cos\theta]^2} . \tag{15.36}$$

Așadar, jumătate din lățimea unghiulară a unui maxim principal este (fig. 15.25)

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta} = \frac{\lambda}{L \cos\theta} \tag{15.37}$$

unde L reprezintă dimensiunea rețelei.

Comparînd unghiul $d\theta$ care separă două maxime principale de lungimi de undă diferind prin $d\lambda$ (relația 15.30) cu $\Delta\theta$, se admite că cele două maxime

principale sînt observabile (rezolvate de rețeaua de difracție), dacă maximul unuia corespunde primului minim al celuilalt, adică :

$$d0 \geqslant \Delta 0$$

de unde rezultă

$$(15.30)\ ;\ (15.37) \rightarrow d\lambda \geqslant \frac{d\lambda}{pL}\ . \qquad (15.38)$$

Puterea de rezoluție a rețelei este dată de expresia

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{pL}{d}\ . \qquad (15.39)$$

Ținînd seama de expresia (15.29), deoarece maximul principal în direcția 0 are ordinul p, puterea de rezoluție se mai poate scrie

$$R = (\sin 0 - \sin i)L/\lambda \qquad (15.40)$$

ceea ce arată că puterea de rezoluție depinde de lungimea L a rețelei și de unghiurile de utilizare.

15.5. Aparate spectrale

a) *Spectroscopul cu prismă* este format dintr-un colimator care are în planul focal obiect o fantă foarte fină S perpendiculară pe planul figurii 15.26. Se observă spectrul de dispersie în planul focal π al obiectivului O_2. Pentru o lungime de undă λ banda spectrală este situată în S_1', iar pentru lungimea de undă $\lambda + d\lambda$ în S_2'. Distanța $\overline{S_1'S_2'}$ corespunde unghiului $\Delta\theta$. Benzile spectrale S_1' și S_2' sînt fenomene de difracție produse prin diafragmarea fasciculului luminos care intră în O_2 de către montura prismei (deschidere rectangulară). Se consideră că cele două benzi S_1', S_2' sînt separate dacă maximul central al uneia corespunde primului minim nul al celeilalte, adică

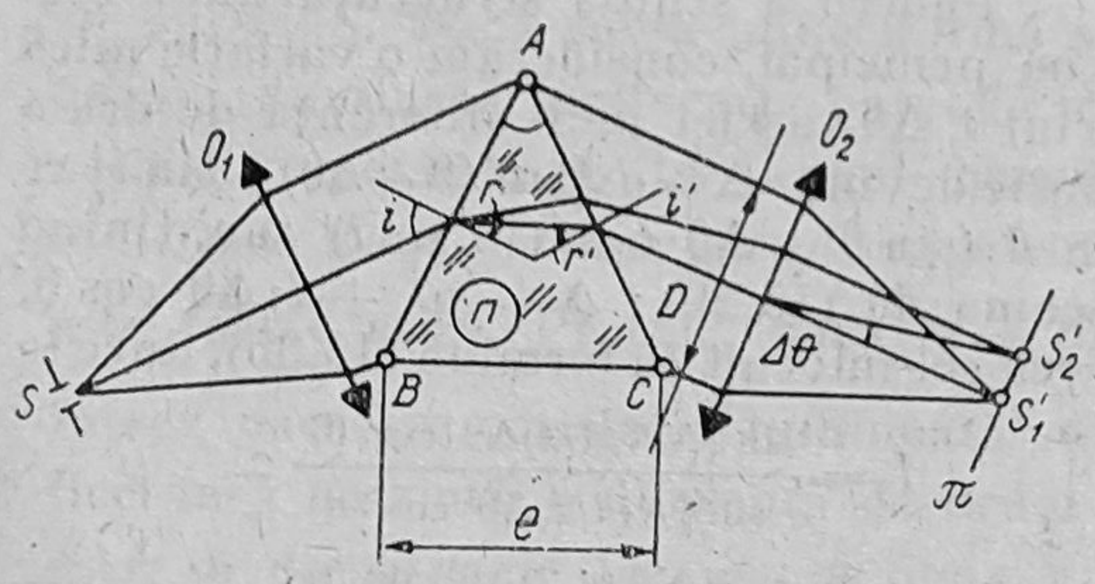


Fig. 15.26

$$\Delta\theta = \lambda/D \qquad (15.41)$$

unde D reprezintă lățimea fasciculului diafragmat de prismă. Diferențiind formulele prismei, se obține

$$\left.\begin{aligned} \sin i &= n \sin r \\ \sin i' &= n \sin r' \\ r + r' &= A \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} n \cos r\, dr + \sin r\, dn = 0 \\ \cos i'\, di' = n \cos r'\, dr + \sin r'\, dn \\ dr + dr' = 0 \end{cases} \qquad (15.42)$$

de unde se deduce:

$$\mathrm{d}r' = \frac{\sin r}{\cos r}\,\frac{\mathrm{d}n}{n} \rightarrow \cos i'\,\mathrm{d}i' = \frac{\sin A}{\sin r}\,\mathrm{d}n \qquad (15.43)$$

Dacă baza prismei $BC = e$, din triunghiul isoscel ABC rezultă:

$$\frac{e}{\sin A} = \frac{\overline{AC}}{\cos r} = \frac{D}{\cos i' \cos r} \rightarrow (15.43) \rightarrow$$

$$\mathrm{d}i' = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r}\,\mathrm{d}n = \frac{e}{D}\,\mathrm{d}n. \qquad (15.44)$$

Cum $\Delta\theta = \mathrm{d}i'$, rezultă condiția (15.41)

$$\Delta\theta = \frac{e}{D}\,\mathrm{d}n \geqslant \frac{\lambda}{D}. \qquad (15.45)$$

Raportul $R = \lambda/\mathrm{d}\lambda$ constituie puterea de rezoluție a spectroscopului

$$R = \frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} \leqslant e\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}. \qquad (15.46)$$

Admițînd pentru indicele de refracție al sticlei prismei ecuația $n = A + B/\lambda^2$, iar pentru radiația galbenă din spectrul sodiului $\lambda = 589{,}3$ nm

$$R \leqslant e \cdot \frac{2B}{\lambda^3} = e \cdot 10^{-4}, \text{ unde } \langle e \rangle = \text{nm}$$

sau

$$R \leqslant 100\ e, \text{ unde } \langle e \rangle = \text{mm}.$$

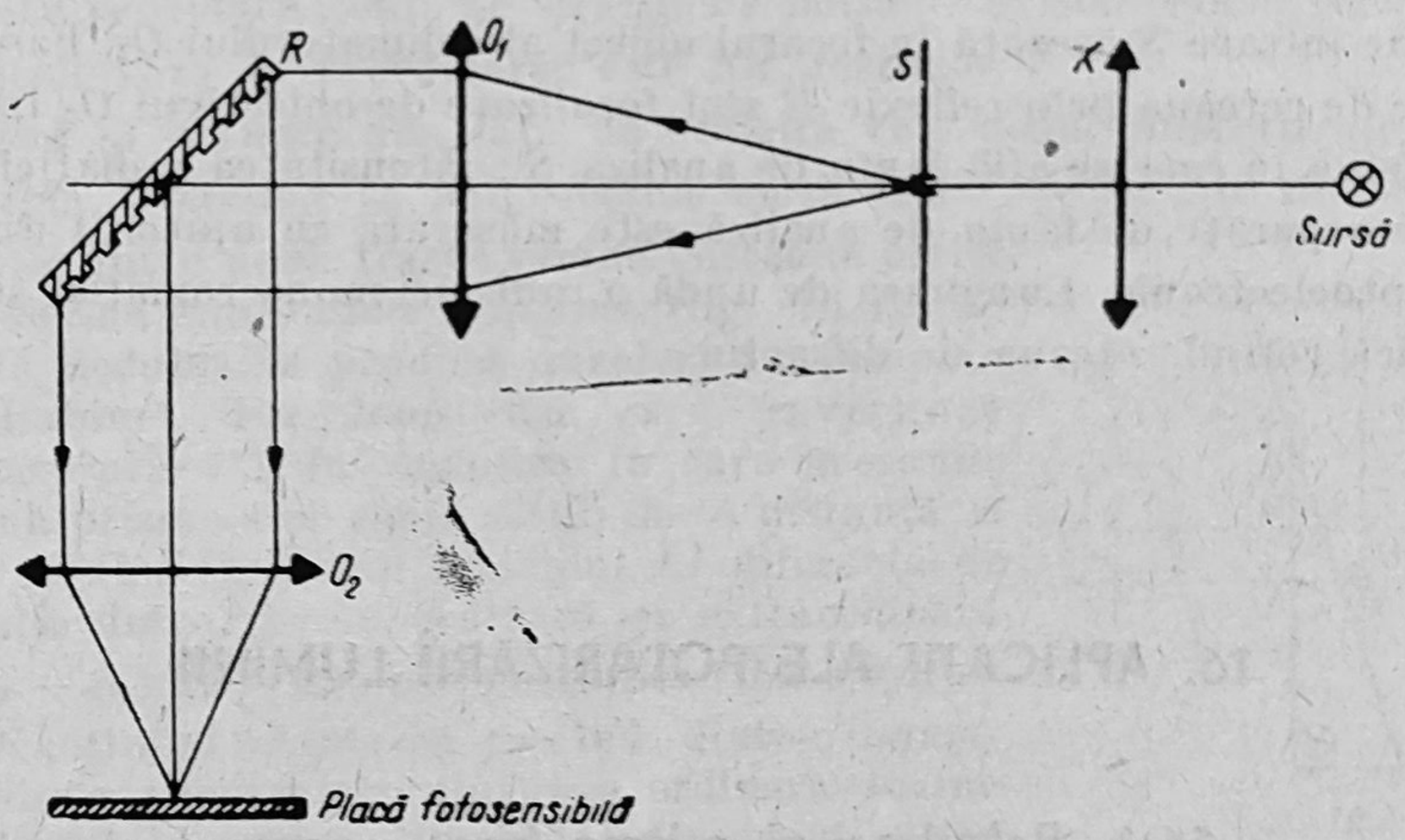


Fig. 15.27

Pentru a mări rezoluția unui spectroscop se mărește e; practic, se utilizează mai multe prisme. Cu spectroscoapele cu prismă s-au atins valori $R \simeq$ $\simeq$ 100 000, care în prezent sînt depășite de spectrografele cu rețea de difracție.

b) *Spectrograful cu rețea*, aparat utilizat la fotografierea spectrelor, are schema de principiu prezentată în figura 15.27. Partea principală a apara-

tului o constituie rețeaua prin reflexie R, care primește fascicule paralele de la colimatorul O_1 (corectat de aberațiile cromatice și de sfericitate), în focarul căruia se află fanta foarte îngustă S, paralelă cu benzile rețelei de difracție și care constituie imaginea sursei prin condensorul K. Spectrul de difracție se fotografiază cu obiectivul O_2 corectat de aberațiile cromatice și de astigmatism.

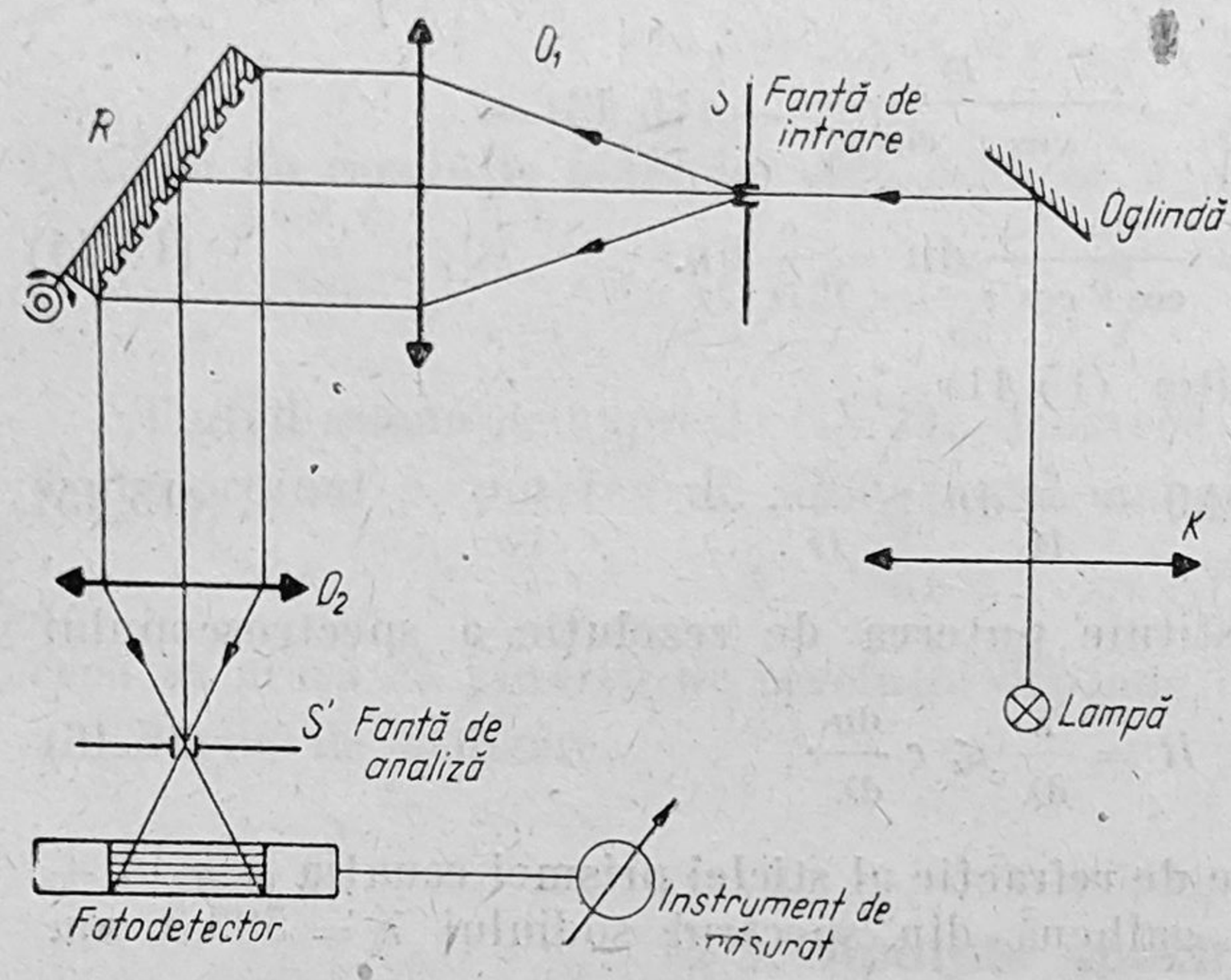


Fig. 15.28

c) *Monocromatorul* este un dispozitiv optic de separare a radiațiilor monocromatice dintr-un spectru continuu, utilizat în construcția spectrofotometrelor și spectrocolorimetrelor (aparate de măsurat intensitățile componentelor monocromatice ale unui spectru prin comparare cu un spectru de referință). Construcția monocromatorului se remarcă prin posibilitatea de rotire a elementului dispersiv (prismă dispersivă sau rețea de difracție). În figura 15.28 este prezentată schema de principiu a unui monocromator cu rețea de difracție prin reflexie. Imaginea sursei (lampă cu incandescență sau cu arc stabilizat în vapori de mercur) este formată de un condensor K în fanta de intrare S așezată în focarul obiect al colimatorului O_1. Fasciculele difractate de rețeaua prin reflexie R sînt focalizate de obiectivul O_2 în planul focal imagine în care se află fanta de analiză S; intensitatea radiației monocromatice separate de fanta de analiză este măsurată cu ajutorul unui dispozitiv optoelectronic. Lungimea de undă a radiației monocromatice separate se modifică rotind rețeaua de difracție.

16. APLICAȚII ALE POLARIZĂRII LUMINII

16.1. Polarizori și prisme birefringente

Considerînd un fascicul foarte îngust de lumină naturală, întîlnind sub incidență normală un cristal uniax (de exemplu : spat de Islanda), acesta este descompus în două fascicule (raze) : raza ordinară și raza extraordinară, polarizate plan, oscilațiile luminoase făcînd între ele 90°. Acesta este feno-

menul de birefringență naturală. În figura 16.1 se reprezintă dispunerea razelor și oscilațiilor într-o experiență cu două cristale din spat de Islanda, având axele optice paralele. Razele O_1 și E_2 sînt anulate, ceea ce dovedește experimental polarizarea luminii.

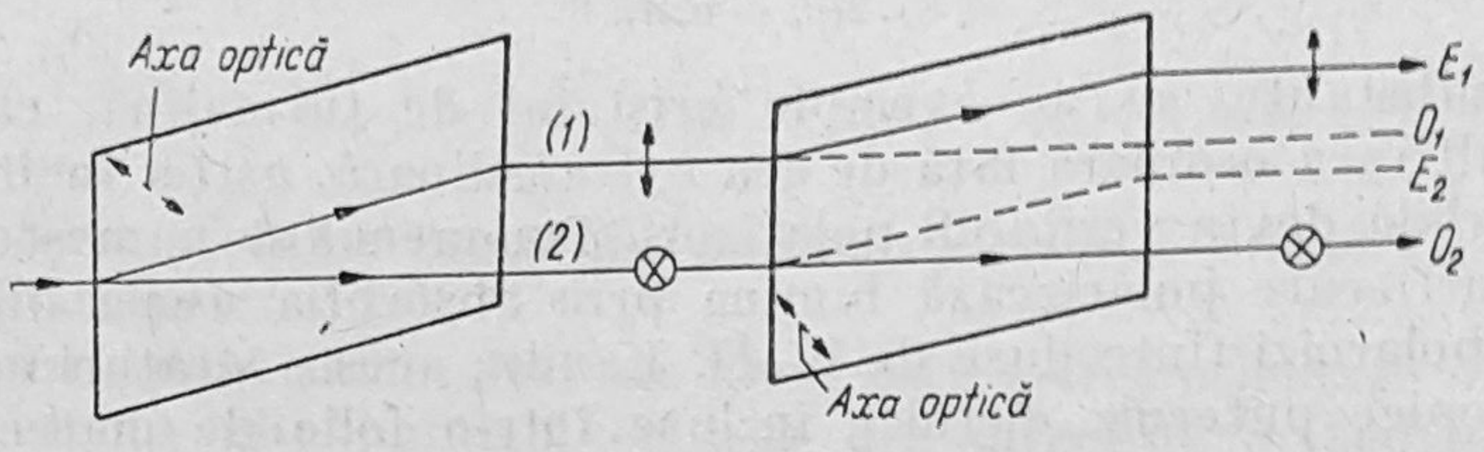


Fig. 16.1

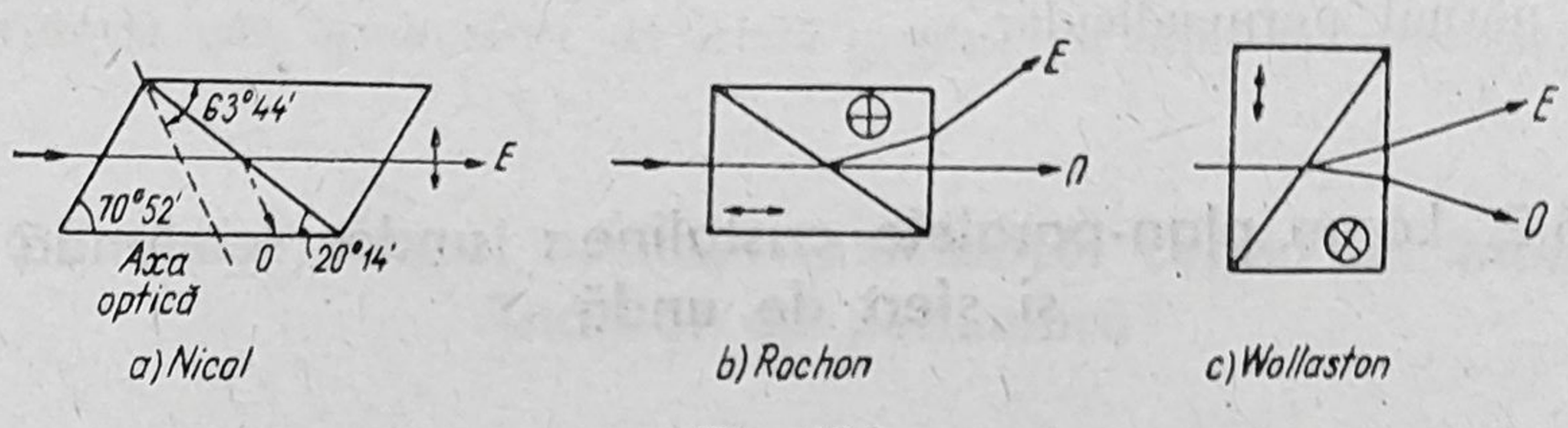


Fig. 16.2

Sistemele birefringente cele mai utilizate sînt reprezentate schematic în figurile 16.2. *Polarizorul Nicol* este format din două jumătăți de romboedru de spat de Islanda tăiat, apoi relipit cu balsam de Canada. Raza ordinară este reflectată total pe stratul de balsam. Prisma Nicol, nelăsînd să treacă decît raza extraordinară, este un polarizor.

Făcînd să alunece una față de cealaltă cele două jumătăți ale *prismei birefringente Wollaston* se pot efectua măsurători precise ale diferenței de drum optic între două trasee vecine. Sistemul astfel utilizat devine *compensator Babinet* (fig. 16.3). Se neglijează dedublarea produsă razelor de compensatorul Babinet. Fie două raze care traversează compensatorul: (1) în regiunea în care grosimile celor două prisme sînt egale și (2) la o distanță x, paralelă cu (1). În lungul traseului IJ diferența de drum optic între razele ordinară și extraordinară este $(n_0 - n_e)\cdot \overline{IJ}$, iar pe porțiunea JK: $(n_e - n_o)\cdot \overline{JK}$; ținînd seama că trecînd dintr-o jumătate în alta a compensatorului raza ordinară devine extraordinară și invers, diferența de drum optic pe toată grosimea compensatorului este

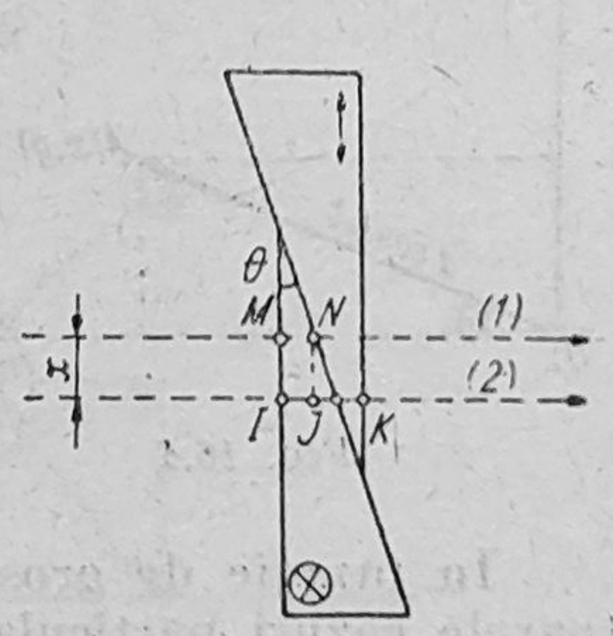


Fig. 16.3

$$\Delta = (n_0 - n_e)(\overline{IJ} - \overline{JK}) = 2(n_0 - n_e)x \operatorname{tg} \theta \qquad (16.1)$$

unde θ este unghiul sub care sînt tăiate prismele compensatorului.

După ieșirea din compensator raza ordinară și cea extraordinară interferă. În lumină monocromatică compensatorul Babinet formează un sistem

de franje rectilinii paralele echidistante, franjele întunecate fiind date de condiția $\Delta = k\cdot\lambda$, de unde rezultă valoarea lui x corespunzătoare unei interfranje

$$x = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)\operatorname{tg} 0}. \qquad (16.2)$$

Există substanțe, ca de exemplu cristalul de turmalină, care absorb mult mai mult raza ordinară față de cea extraordinară, astfel încît la o grosime convenabilă devin veritabili polarizori (fenomenul se numește *dicroism*). Filme (straturi) care polarizează lumina prin absorbția uneia din oscilații sînt numite polaroizi (introduse de E. H. Land); aceste straturi conțin cristale microscopice puternic dicroice incluse într-o folie de material plastic (polaroizi tip *H*), cristalele fiind orientate prin întinderea filmului. Un astfel de polarizor transmite 80% lumină polarizată într-un plan și sub 1% polarizată în planul perpendicular.

16.2. Lame plan-paralele cristaline: undă, semiundă și sfert de undă

Considerăm o lamă plan-paralelă tăiată dintr-un cristal uniax, direcțiile principale ale lamei fiind Ox și Oy (fig. 16.4), fasciculul incident fiind normal și polarizat liniar. Dacă e este grosimea lamei, diferența de drum între raza ordinară și cea extraordinară este: $\Delta = e(n_e - n_o)$, $\varphi = 2\pi\Delta/\lambda$. Cum cele două oscilații sînt coerente și perpendiculare, din compunerea lor rezultă în general o oscilație eliptică. Pentru a determina forma acestei elipse se consideră ecuațiile celor două oscilații în direcțiile principale ale lamei cristaline

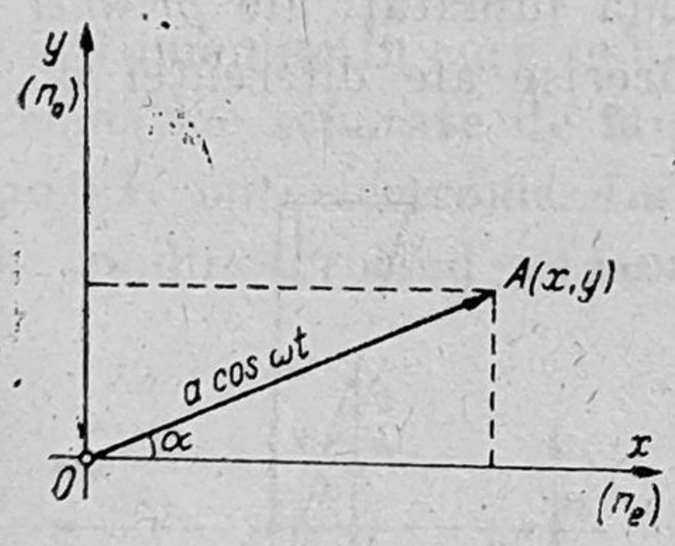


Fig. 16.4

$$x = a\cos\alpha\cos\omega t$$

$$y = a\sin\alpha\cos(\omega t - \varphi)$$

Coordonatele vîrfului vectorului luminos fiind (x, y) rezultă ecuația traiectoriei acestuia

$$\frac{x^2}{(a\cos\alpha)^2} + \frac{y^2}{(a\sin\alpha)^2} - \frac{2xy}{a^2\sin\alpha\cos\alpha}\cos\varphi = \sin^2\varphi. \qquad (16.3)$$

În funcție de grosimea lamei cristaline plan-paralele pot apare următoarele cazuri particulare:

a) *lama undă*, pentru $\varphi = 2k\pi$;

$$\Delta = e(n_e - n_o) = k\lambda \qquad (16.4)$$

Ecuația traiectoriei reprezintă o dreaptă; din lama undă iese tot lumină polarizată liniar cu același plan de oscilație ca și unda incidentă;

b) *lama semiundă*, pentru $\varphi = (2k + 1)\pi$;

$$\Delta = e(n_e - n_o) = (2k + 1)\lambda/2. \qquad (16.5)$$

Traiectoria vîrfului vectorului luminos este tot o dreaptă; din lama semiundă iese lumină polarizată liniar, dar avînd planul de oscilație simetric celui al undei incidente, în raport cu direcțiile principale ale lamei cristaline;

c) *lama sfert de undă*, pentru $\varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$;

$$\Delta = e(n_e - n_o) = (2k + 1)\frac{\lambda}{4}. \qquad (16.6)$$

Traiectoria vîrfului vectorului luminos devine o elipsă cu semiaxele în direcțiile principale.

Remarcă: dacă lama sfert de undă este astfel orientată încît oscilația liniară incidentă este paralelă cu una din direcțiile principale $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi/2$, oscilația trece neschimbată prin lamă, oricare ar fi grosimea acesteia.

Dacă lama sfert de undă este orientată astfel încît $\alpha = \pi/4$, elipsa devine cerc, în acest caz lama sfert de undă producînd lumină polarizată circular.

16.3. Analiza unei oscilații luminoase. Legea lui Malus. Analizor cu penumbră

În aplicațiile optice (analiza orientării unei oscilații luminoase rectilinii) sau metrologice (determinarea unei grosimi prin măsurarea diferenței de drum sau determinarea unei rotații a unui element polarizor) se utilizează două componente polarizoare: primul, care produce polarizarea luminii și care poartă numele de polarizor, iar al doilea care analizează polarizarea luminii și care se numește analizor.

Dacă planele de polarizare ale celor două componente polarizoare fac între ele unghiul β, intensitatea luminii transmise este proporțională cu pătratul cosinusului acestui unghi (legea lui Malus)

$$I = \mathcal{T} I_0 \cos^2 \beta \qquad (16.7)$$

unde I_0 este intensitatea fluxului luminos incident, iar $\mathcal{T}$ un factor de transmisie al sistemului optic, independent de starea de polarizare a luminii.

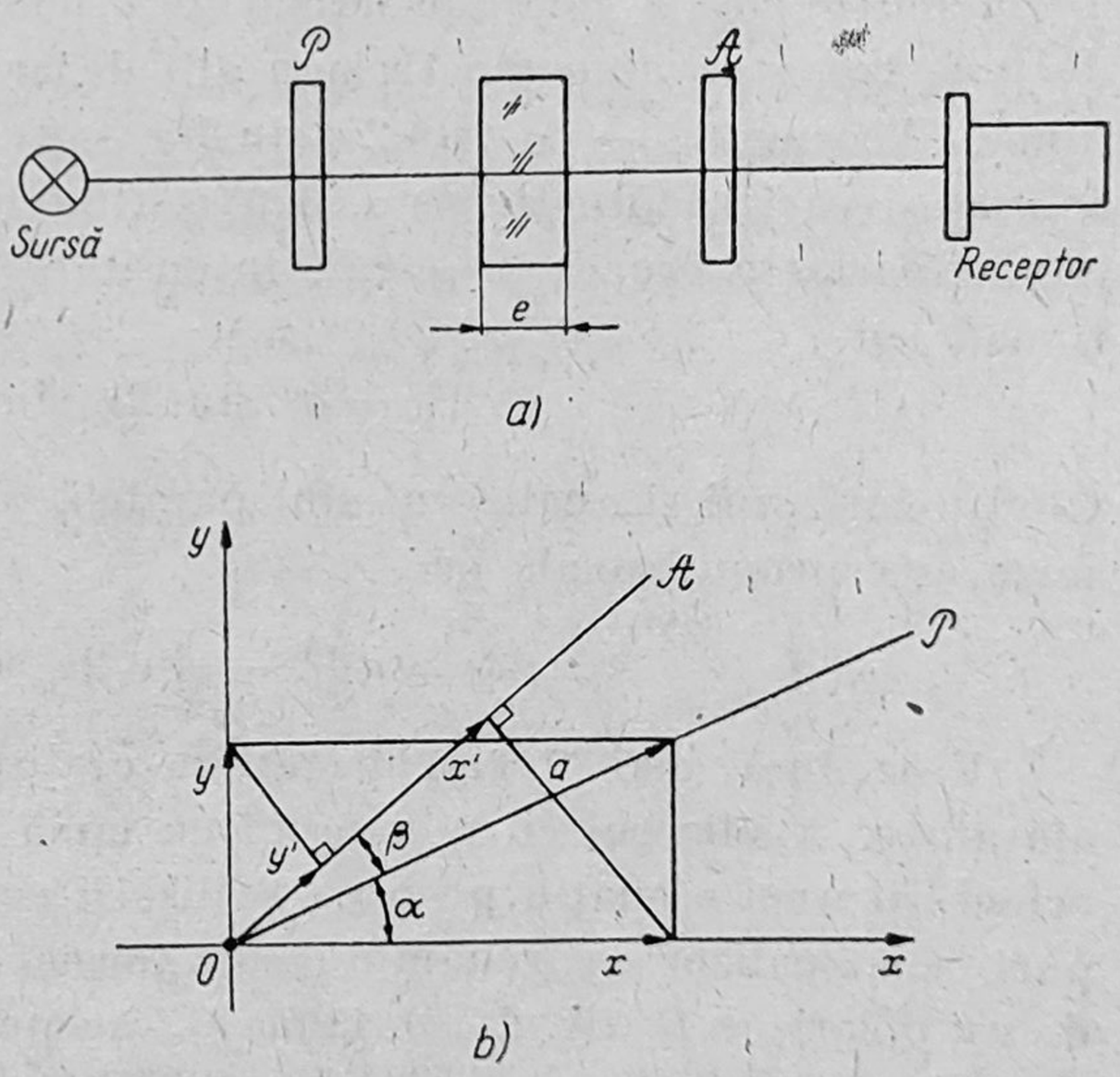


Fig. 16.5

Cu un montaj relativ simplu, reprezentat în figura 16.5, a, se poate determina birefringența sticlei optice sau studia anizotropia artificială, determinarea distribuției eforturilor unitare în piese optice prin metoda fotoelasticității. Între doi polaroizi (unul are rolul de polarizor, iar celălalt de analizor)

se așază o lamă plan-paralelă din material optic transparent. Sursa utilizată este monocromatică, iar receptorul îl constituie un luxmetru sau un aparat foto în cazul fotoelasticității. În figura 16.5, b axele Ox, Oy reprezintă direcțiile principale ale lamei plan-paralele, iar P și A direcțiile oscilațiilor care sînt lăsate să treacă de polarizor respectiv de analizor. Oscilația luminoasă care iese din polarizor, cu amplitudinea a, se descompune în lamă în două componente de amplitudini inegale

$$x = a \cos\alpha\,;\; y = a \sin\alpha$$

care se propagă cu viteze diferite și ies defazate cu

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta/\lambda = 2\pi(n_e - n_o)e/\lambda \qquad (16.8)$$

unde $\Delta = e(n_e - n_o)$ reprezintă diferența de drum optic, λ lungimea de undă, iar e grosimea lamei. Cele două oscilații luminoase trec prin analizor după direcția acestuia

$$x' = x \cos(\alpha + \beta)\,;\; y' = y \sin(\alpha + \beta).$$

Fiind paralele, coerente, avînd între ele diferența de fază $\Delta\varphi$, aceste două oscilații interferă, intensitatea luminoasă fiind proporțională cu pătratul amplitudinii rezultante

$$I \sim A^2 = a^2[\cos^2\beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha + \beta)\sin^2(\Delta\varphi/2)]. \qquad (16.9)$$

Termenul $a^2\cos^2\beta$ depinde numai de orientarea relativă a analizorului față de polarizor ; se numește termen alb deoarece nu depinde de lungimea de undă. Termenul $-\ a^2 \sin 2\alpha \sin 2(\alpha + \beta)\sin^2(\Delta\varphi/2)$ se numește termen colorat și variază funcție de α, β, $\Delta\varphi$. Cînd analizorul și polarizorul sînt perpendiculari (în cruce) $\beta = \pi/2$, intensitatea luminii transmise este proporțională cu

$$A_\perp^2 = a^2 \sin^2 2\alpha \sin^2(\Delta\varphi/2). \qquad (16.10)$$

Cînd polarizorul și analizorul sînt paraleli, $\beta = 0$, intensitatea luminii transmise este proporțională cu

$$A_\parallel^2 = a^2[1 - \sin^2 2\alpha \sin^2(\Delta\varphi/2)]. \qquad (16.11)$$

Este, însă, mai precisă urmărirea egalității iluminărilor a două cîmpuri alăturate. Analizorul cu penumbră cu lamă semiundă permite determinarea orientării unei oscilații, pe baza realizării egalității iluminărilor a două cîmpuri. Un analizor cu penumbră este format dintr-o lamă semiundă urmată de un polarizor P (fig. 16.6), lama $\lambda/2$ acoperind jumătate din cîmp.

Fie OA_1 orientarea oscilațiilor polarizate liniar, care trebuie determinată. Direcțiile principale (privilegiate) ale lamei $\lambda/2$ sînt Ox și Oy, iar direcția oscilațiilor care sînt lăsate să treacă de polarizorul P este OA_2, făcînd un unghi mic θ cu axa Oy. În regiunea (1) iluminarea este proporțională cu $\overline{Oh'}^2 = \sin^2(\alpha + \theta)$, în timp ce în regiunea (2) este proporțională cu $\overline{Oh}^2 = \sin^2(\alpha - \theta)$.

Reprezentarea oscilației OA_1 se realizează rotind ansamblul lamă $\lambda/2$ + analizorul P pînă cînd se obține egalitatea iluminărilor celor două regiuni, adică $\overline{Oh}^2 = \overline{Oh'}^2$, pentru $\alpha = 0$. Dacă OA_1 se rotește cu un unghi, trebuie rotit și analizorul cu penumbră cu același unghi.

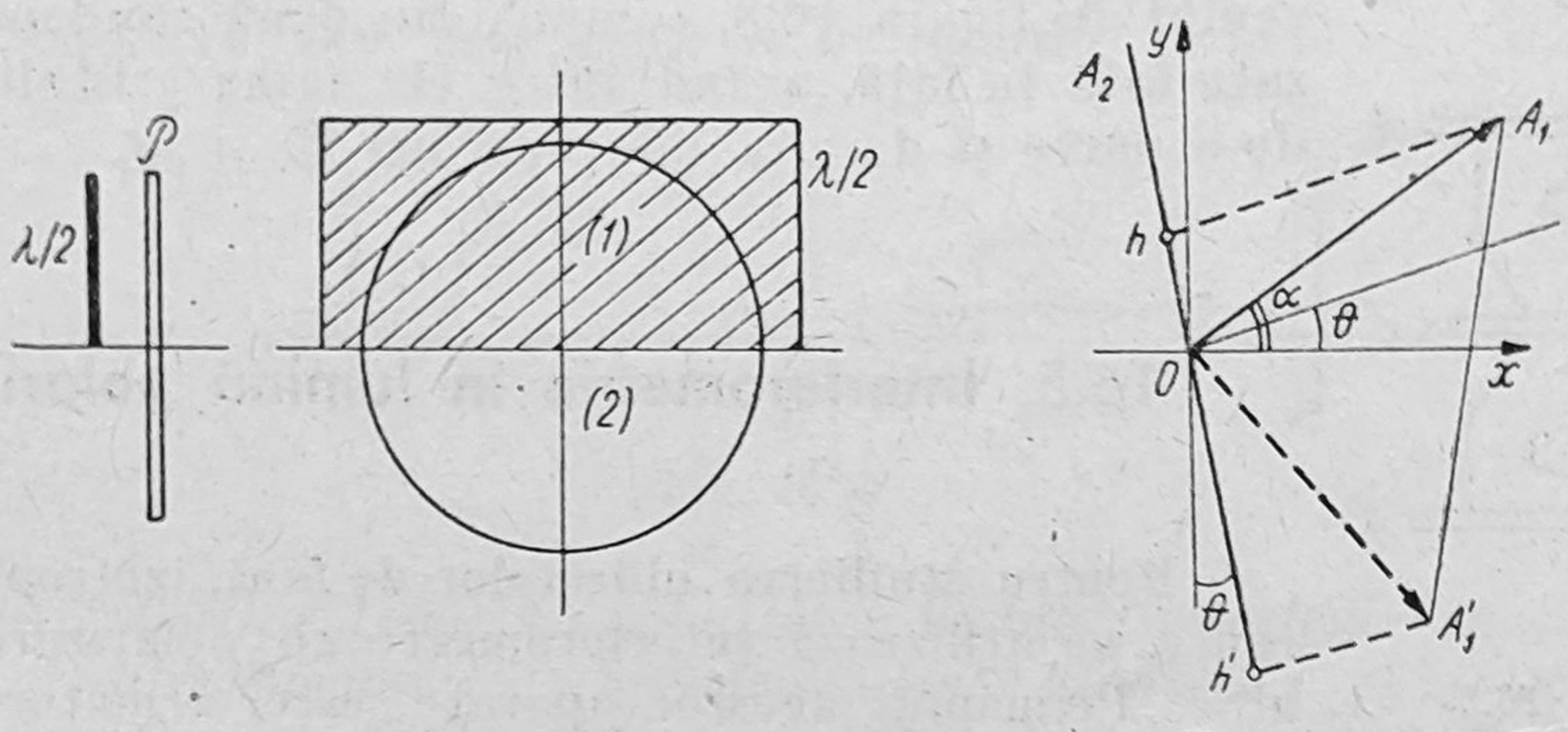


Fig. 16.6

16.4. Microscopie în lumină polarizată

Utilizarea luminii polarizate aduce în microscopie informații foarte prețioase: variațiile factorilor de reflexie sau de transmisie cu orientarea probelor observate față de direcția oscilațiilor luminoase incidente pot să facă posibilă observarea, utilizînd un singur nicol sau polaroid, a unor structuri invizibile în lumină naturală. Analizarea cu un polarizor și analizor a luminii transmise prin medii transparente permite identificarea microcristalelor uniaxe sau biaxe și a altor elemente birefringente.

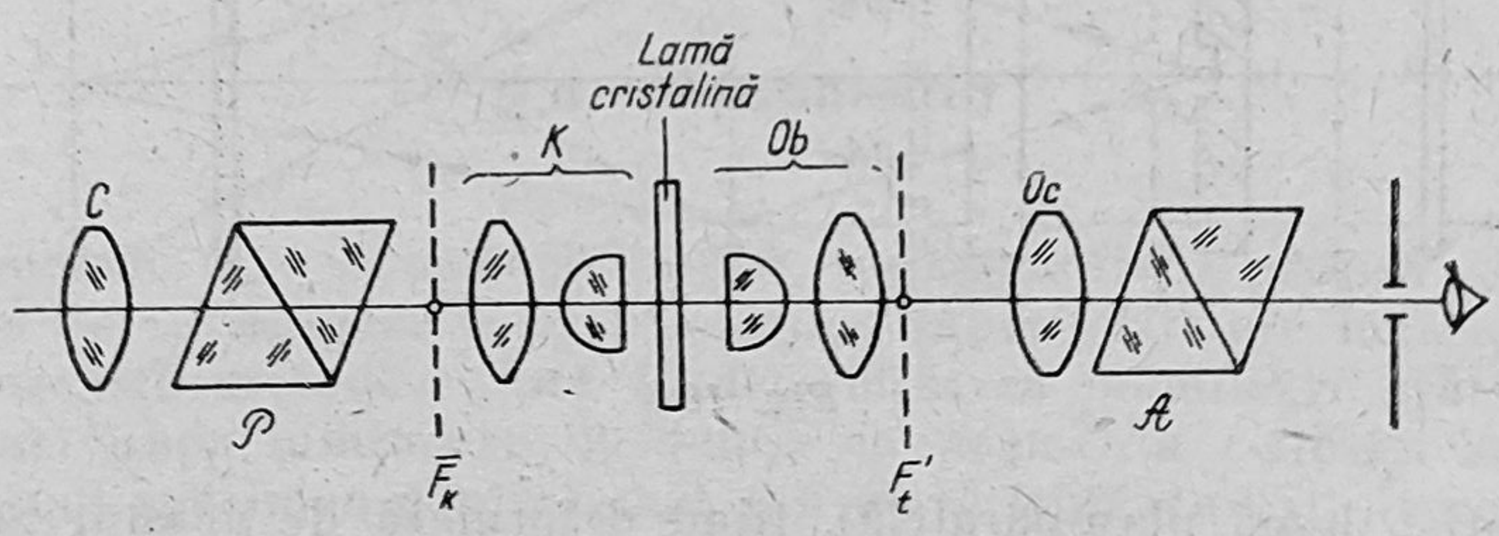


Fig. 16.7

Cu microscopul polarizant se observă fenomenele de polarizare în lumină convergentă: colectorul C (fig. 16.7) formează imaginea unei surse îndepărtate în $\bar{F}_K$ — focarul condensorului K, de putere dioptrică mare (distanța focală mică); lama cristalină este traversată de fascicule telecentrice (paralele) avînd toate înclinările posibile; figura de interferență produsă la trece-

rea luminii prin lama cristalină plan-paralelă este localizată de obiectivul *Ob* în planul focal *F'*, unde este observată cu ocularul *Oc*, microscopul fiind completat cu un polarizor $\mathcal{P}$ și un analizor $\mathcal{A}$ și prevăzut cu gradații necesare măsurării orientărilor lamei cristaline și analizorului.

Pentru a mări cîmpul se utilizează sistemul, reprezentat în figura 16.8, compus din două condensoare așezate față în față, avînd între ele lama cristalină *L.c* și de-o parte și de alta doi polaroizi $\mathcal{P}$ și $\mathcal{A}$.

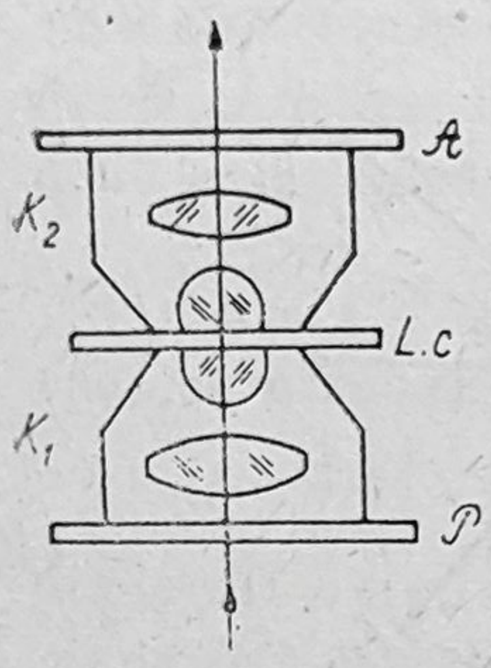


Fig. 16.8

16.5. **Interferometrie în lumină polarizată**

Pentru studierea obiectelor de fază, izotrope transparente, se utilizează interferometre cu polarizarea luminii albe. Principiul acestor aparate este următorul: unda de lumină deformată de variațiile de fază ale obiectului traversează un sistem birefrigent care o dedublează; cu un polarizor și analizor se realizează interferența celor două unde, făcînd să apară detaliile obiectului transparent de fază. Interferometrele cu polarizare sînt de două tipuri:

— cu dedublare laterală, atunci cînd dedublarea imaginii se realizează într-un plan perpendicular pe axa optică a sistemului;

— cu dedublare longitudinală (sau axială), cînd dedublarea se realizează în lungul axei, cele două imagini nefiind puse la punct în același timp.

a) *Interferometre cu dedublare laterală.* Aceste aparate au schema reprezentată în figura 16.9. Unda plană Σ polarizată liniar de polarizorul $\mathcal{P}$ traversează obiectul transparent (considerat în figură printr-o variație de gro-

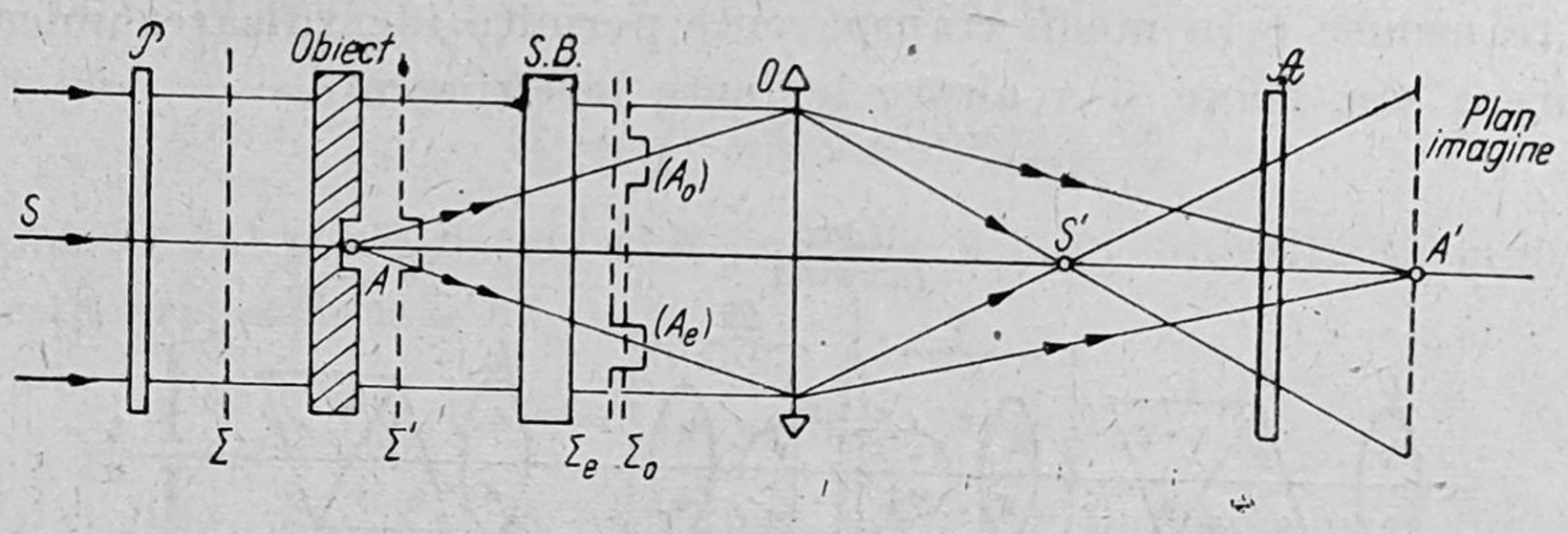


Fig. 16.9

sime *A* într-o lamă plan-paralelă), fiind deformată de acesta. Sistemul birefringent *S.B.* dedublează unda deformată Σ' în două unde Σ_o și Σ_e, iar obiectivul *O* formează imaginea obiectului *A*, unde poate fi observată cu ajutorul unui ocular sau fotografiată. Imaginile obiectului A_o și A_e purtate de unda ordinară (Σ_o), respectiv extraordinară (Σ_e) pot interfera datorită analizorului $\mathcal{A}$. Fie A'_0 și A'_e imaginile obiectului *A*, reprezentate în planul imagine (fig. 16.10). În regiunile (1), (2), (3) cele două unde Σ_o și Σ_e sînt la aceeași distanță, fie $\lambda/2$, starea de interferență fiind aceeași. În regiunile A'_0 și A'_e distanțele între cele două unde (trecute prin analizor) nu mai sînt aceleași:

în A'_0 distanța între unde este $\lambda/2$ + grosimea optică a obiectului, iar în A'_e este $\lambda/2$ — grosimea optică a obiectului. În acest caz tenta de culoare variază în A'_0 și A'_e, obiectul devenind observabil.

Fără ca principiul să fie modificat, dar avînd particularități constructive diferite, au fost realizate diferite interferometre cu polarizare, dintre care mai reprezentative sînt reprezentate în figurile 16.11 :

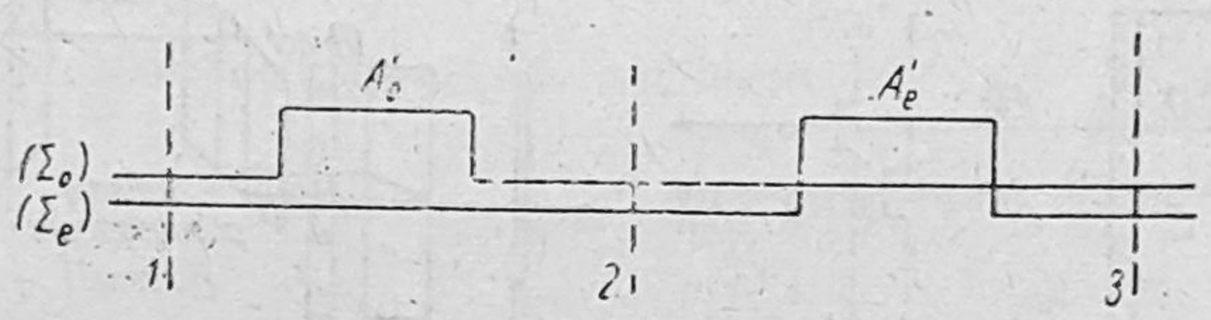


Fig. 16.10

a) *interferometrul Jamin cu polarizare* ; b) *interferometrul Françon* ; c) *interferometrul Fleischmann* ; d) *interferometrul Lindberg* ; e) *interferometrul Smith* ; f) *interferometrul Nomarski*, care diferă de interferometrul Smith prin prisma Wollaston W_2 și prin poziția sa față de obiectivul O_2.

b) *Interferometrul cu dedublare axială.* Un astfel de aparat este interferometrul Philpot, prezentat în figura 16.12. Obiectul transparent M, plasat între două obiective O_1 și O_2 este iluminat cu lumină polarizată provenind de la sursa S prin polarizorul P, descompusă în două fascicule (O) și (E) de către sistemul birefringent $SB1$ (un dublet lipit, din cuarț, cele două lentile avînd axele principale perpendiculare). Pentru raza ordinară sistemul $SB1$ nu are putere, iar pentru raza extraordinară $SB1$ se comportă ca un sistem convergent, astfel încît obiectivul O_1 formează imaginea sursei în (O), pe obiectul transparent M și, respectiv, în (E). Obiectivul O_2 este identic cu O_1, iar sistemul birefringent $SB2$ diferă de $SB1$ prin direcțiile axelor principale, care sînt rotite cu 90°, astfel încît recombină razele ordinară și extraordinară (compensează dedublarea axială), imaginea fiind rezultatul interferenței celor două fascicule.

16.6. Elipsometria

Elipsometria este o metodă optică, nedistructivă, precisă și de mare sensibilitate de investigare a proprietăților superficiale ale materialelor. În principiu, această metodă constă în determinarea modificării stării de polarizare a unei unde luminoase incidente, ca urmare a reflexiei acesteia pe suprafața unui specimen confecționat din materialul studiat. În cazul materialelor slab absorbante, cum ar fi sticlele sau filmele subțiri depuse pe un suport transparent, prin cercetarea modificării stării de polarizare, ca urmare a transmisiei undei, se pot obține informații asupra acestor materiale. În general, elipsometria este aplicată în domeniul vizibil ; metoda poate fi totuși utilizată și în domeniul radiațiilor infraroșii, sau ultraviolete.

Principiul metodei. Să considerăm o undă plană monocromatică, plan-polarizată total, care cade sub un unghi de incidență φ pe suprafața speci-

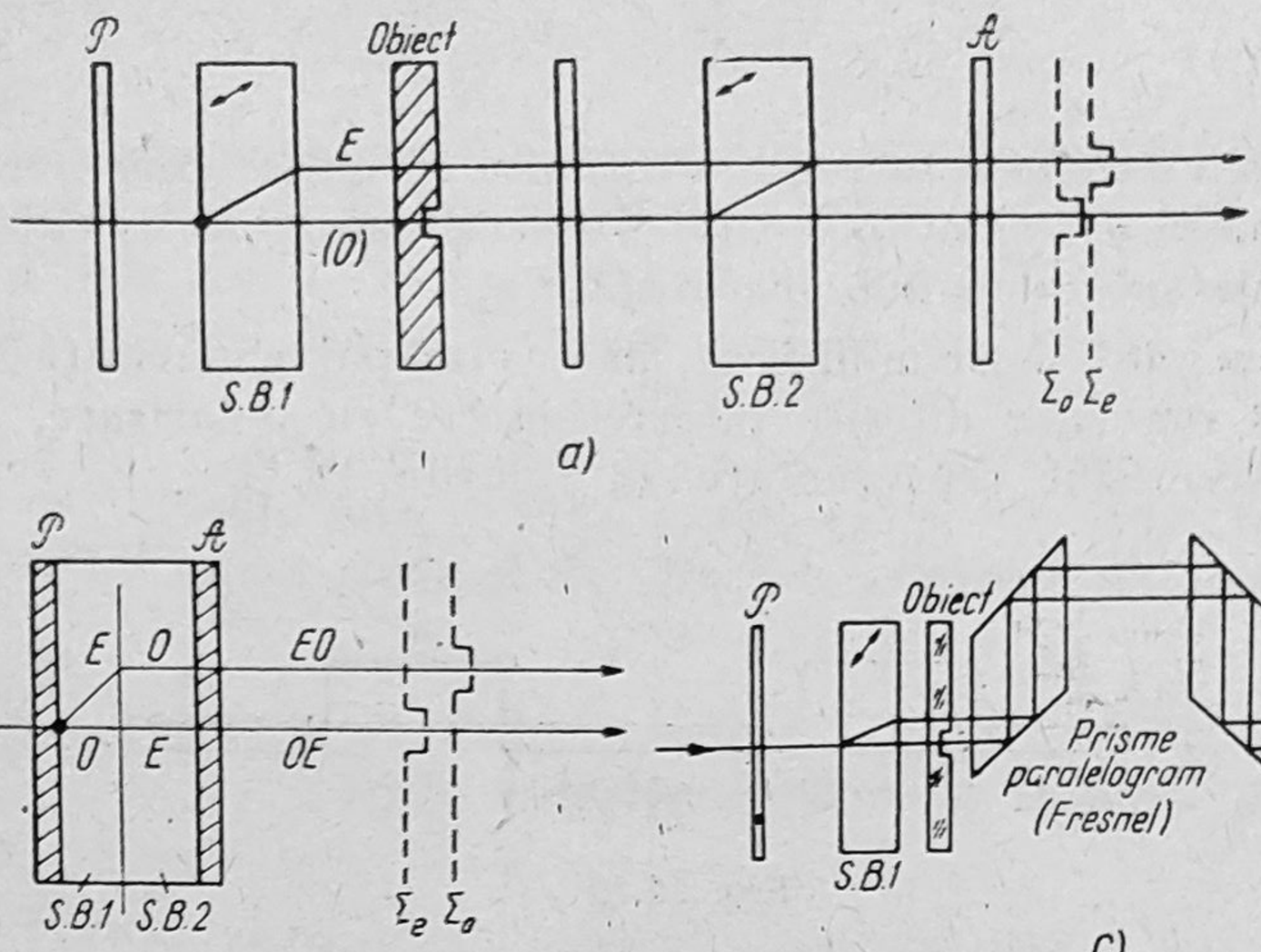


Fig. 16.11

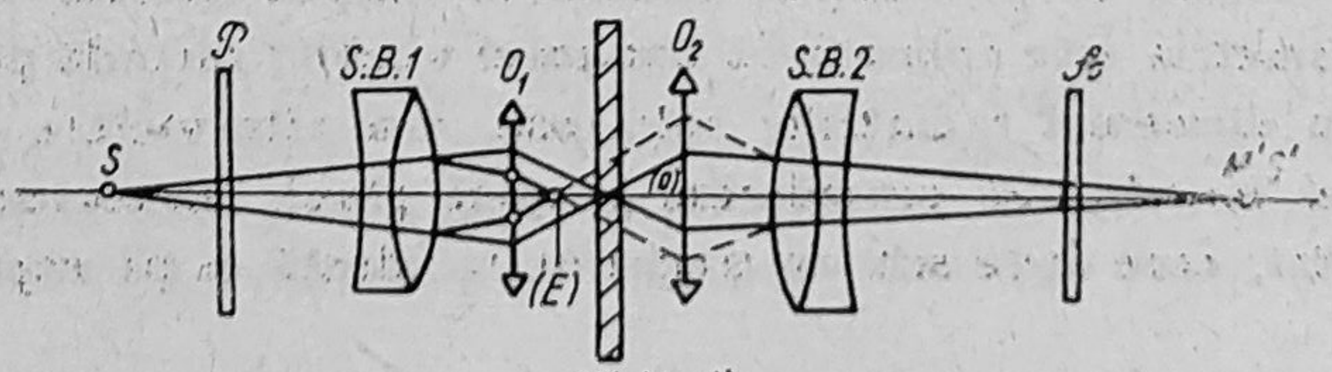


Fig. 16.12

menului cercetat. Așa cum s-a arătat în capitolul 6, o astfel de undă se poate descompune într-o componentă $\tilde{E}_p^{(i)}$, paralelă cu planul de incidență și o componentă $\tilde{E}_s^{(i)}$ normală la acest plan

$$\tilde{E}_p^{(i)} = E_{op}^{(i)} \exp[\mathrm{i}(\mathbf{Kr} - \omega t + \delta_p^{(i)})] \tag{16.12}$$

$$\tilde{E}_s^{(i)} = E_{os}^{(i)} \exp[\mathrm{i}(\mathbf{Kr} - \omega t + \delta_s^{(i)})]. \tag{16.13}$$

Făcînd raportul acestor componente obținem

$$\frac{\tilde{E}_p^{(i)}}{\tilde{E}_s^{(i)}} = \operatorname{tg} \psi^{(i)} \exp(\mathrm{i}\delta^{(i)}) \tag{16.14}$$

unde mărimile

$$\operatorname{tg} \psi^{(i)} = \frac{E_{op}^{(i)}}{E_{os}^{(i)}}, \qquad \delta^{(i)} = \delta_p^{(i)} - \delta_s^{(i)} \tag{16.15}$$

caracterizează complet starea de polarizare a undei incidente. Descompunînd în mod analog și unda reflectată într-o componentă $\tilde{E}_p^{r}$, paralelă cu planul de incidență și o componentă $\tilde{E}_s^{(r)}$, normală la acest plan

$$\tilde{E}_p^{(r)} = E_{op}^{(r)} \exp[\mathrm{i}(\mathbf{Kr} - \omega t + \delta_p^{(r)})] \tag{16.16}$$

$$\tilde{E}_s^{(r)} = E_{os}^{(r)} \exp[\mathrm{i}(\mathbf{Kr} - \omega t + \delta_s^{(r)})] \tag{16.17}$$

vom putea pune și în acest caz

$$\frac{\tilde{E}_p^{(r)}}{\tilde{E}_s^{(r)}} = \operatorname{tg} \psi^{(r)} \exp(\mathrm{i}\delta^{(r)}). \tag{16.18}$$

Mărimile

$$\operatorname{tg} \psi^{(r)} = \frac{E_{op}^{(r)}}{E_{os}^{(r)}}, \qquad \delta^{(r)} = \delta_p^{(r)} - \delta_s^{(r)} \tag{16.19}$$

caracterizează starea de polarizare a undei reflectate. Observînd că, așa cum s-a arătat în capitolul 7, coeficienții lui Fresnel în formalismul unghiului de refracție complex sînt dați de relațiile

$$\tilde{r}_p = \tilde{E}_p^{(r)} / \tilde{E}_p^{(i)}, \quad \tilde{r}_s = \tilde{E}_s^{(r)} / \tilde{E}_s^{(i)} \tag{16.20}$$

obținem din (16.14) și (16.18)

$$\frac{\operatorname{tg} \psi^{(r)} \exp(\mathrm{i}\delta^{(r)})}{\operatorname{tg} \psi^{(i)} \exp(\mathrm{i}\delta^{(i)})} = \frac{\tilde{r}_p}{\tilde{r}_s}. \tag{16.21}$$

Punînd

$$\operatorname{tg} \Psi \exp(\mathrm{i}\Delta) = \frac{\operatorname{tg} \psi^{(r)} \exp(\mathrm{i}\delta^{(r)})}{\operatorname{tg} \psi^{(i)} \exp(\mathrm{i}\delta^{(i)})} \tag{16.22}$$

obținem ecuația fundamentală a elipsometriei (de reflexie)

$$\operatorname{tg} \Psi \exp[\mathrm{i}\Delta] = \frac{\tilde{r}_p}{\tilde{r}_s}. \tag{16.23}$$

Perechea de mărimi Ψ și Δ, denumite *mărimi elipsometrice* (de reflexie), caracterizează complet fenomenul de reflexie a undei pe specimen și conțin toată informația care se poate obține asupra stării superficiale a specimenului prin elipsometria în reflexie. Menționăm că în cazul transmisiei unei unde prin specimen se poate defini o pereche de mărimi analoge, Ψ_t și Δ_t, iar ecuația fundamentală a elipsometriei (de transmisie) se scrie

$$\operatorname{tg} \Psi_t \exp(i\Delta_t) = \frac{\tilde{t}_p}{\tilde{t}_s} \tag{16.24}$$

unde $\tilde{t}_p$ și $\tilde{t}_s$ sînt coeficienții Fresnel de transmisie.

În general, teoria măsurărilor elipsometrice este elaborată în ipoteza că stările undei luminoase rămîn tot timpul stări de polarizare totală. În realitate, diferitele dispozitive care intră în alcătuirea elipsometrului introduc o slabă depolarizare, astfel încît în toată rigoarea gradul de polarizare este $P = 1 - \varepsilon$, unde ε este o perturbație mică*.

Descrierea elipsometrului și a modului de lucru. În prezent s-a impus ca montaj elipsometric standard, montajul PCSA cu compensatorul așezat la azimut fix. Denumirea acestui montaj, arătat în figura 16.13, derivă de la inițialele elementelor principale, scrise în ordinea în care acestea sînt parcurse de unda luminoasă (polarizor-compensator-specimen-analizor). Drept sursă luminoasă L se folosește fie o sursă spectroscopică obișnuită, prevăzută cu un filtru F și care emite lumină naturală, fie un laser a cărui radiație este adusă în stare de lumină circular polarizată total cu ajutorul unei lame sfert de undă orientată la un unghi $\pi/4$ față de planul de oscilație al radiației laser. După colimare lumina trece prin polarizorul P, care o aduce în starea plan-polarizată totală. Azimutul planului de oscilație față de planul de incidență, luat ca plan de referință, se notează de asemenea cu P. Drept polarizor se folosește fie o prismă Nicol, fie o prismă Glan-Thompson. Lumina plan-polarizată emergentă din polarizor intră în compensatorul C, menținut la

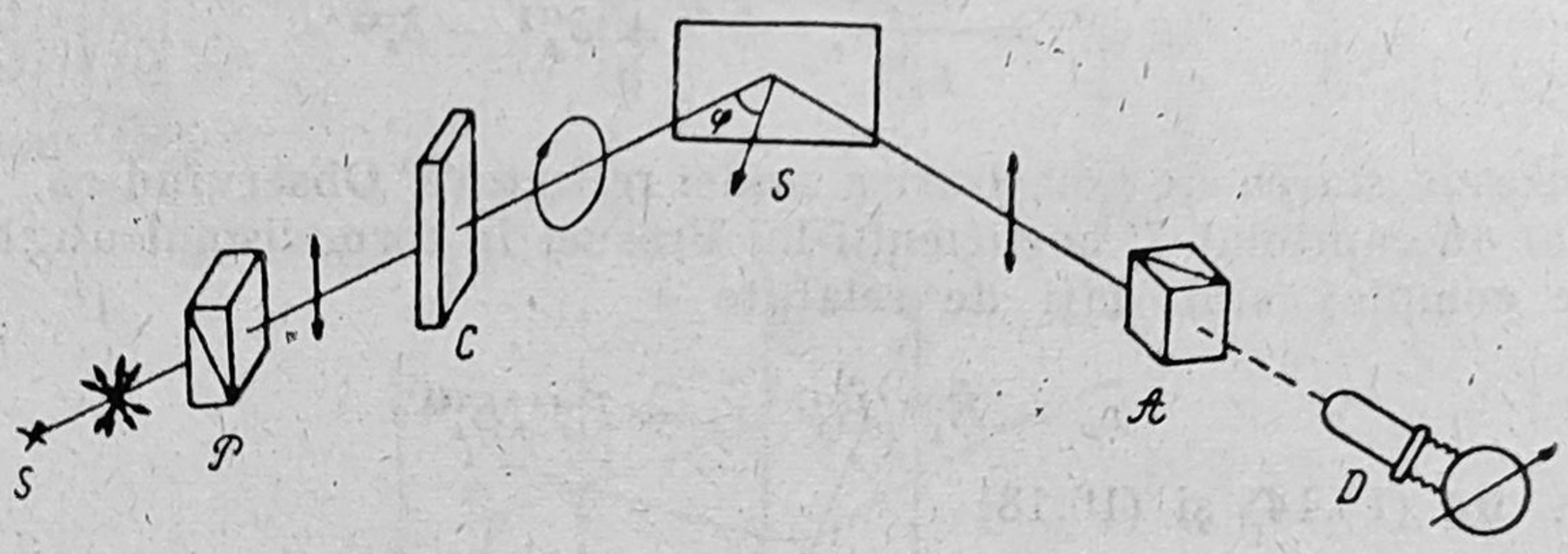


Fig. 16.13

azimutul fix $C = \pm\pi/4$ în raport cu planul de incidență. Compensatorul constă de obicei dintr-o lamă $\lambda/4$; în unele dispozitive se utilizează de asemenea compensatoare tip Soleil. Din compensator, unda emerge eliptic polarizată reflectîndu-se pe specimen. Dacă polarizorul P este adus într-o poziție P_m astfel încît elipticitatea luminii emergente din compensator să fie exact

* Asupra luării în considerare a influenței efectelor de depolarizare vezi : R. M. A. Azzam și N. M. Bashara, J. Opt. Soc. Am., **61** 1380 (1971).

compensată de elipticitatea introdusă de specimen, lumina reflectată de acesta va fi plan-polarizată. După reflexie starea undei luminoase este analizată cu ajutorul unei alte prisme A, denumită analizor, identică cu prisma polarizor. Prin rotirea analizorului acesta poate fi adus într-o astfel de poziție A_m încît planul său principal să fie perpendicular pe planul de oscilație a cîmpului electric al undei luminoase. În acest caz se obține *extincția* undei luminoase, semnalată de către detectorul D (fotodetector) prin valoarea minimă a curentului de ieșire. Valorile unghiurilor P_m și A_m, pentru care se obține extincția, permit determinarea mărimilor elipsometrice Ψ și Δ. În ipoteza comportării ideale a compensatorului și a așezării acestuia la azimutul $\pm\pi/4$, se arată că mărimile elipsometrice sînt date de relațiile (unde s-a renunțat la indicele m)

$$\Psi = \pm A$$

$$\Delta = \frac{\pi}{2} \pm 2P. \tag{16.25}$$

Observăm, că în cazul în care compensatorul este așezat la poziția $C = +\pi/4$, se obțin două situații de extincție distincte, în funcție de poziția polarizorului și a analizorului. Dacă se așază compensatorul la poziția $C = -\pi/4$, se obțin alte două situații de extincție, astfel că în total există patru situații distincte de extincție cărora le corespund patru zone de măsurare. În cazul unui instrument ideal, extincția în cele patru zone se obține pentru relațiile dintre azimuturile polarizorului, respectiv analizorului și mărimile elipsometrice Ψ, respectiv Δ, date în tabelul de mai jos :

Zona	C	P	A
1	$-\pi/4$	$P_1 = \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}$	$A_1 = \Psi$
2	$+\pi/4$	$P_2 = -\frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}$	$A_2 = \Psi$
3	$-\pi/4$	$P_3 = \frac{\Delta}{2} + \frac{\pi}{4}$	$A_3 = -\Psi$
4	$+\pi/4$	$P_4 = -\frac{\Delta}{2} + \frac{\pi}{4}$	$A_4 = -\Psi$

În realitate, ca urmare a imperfecțiunilor elementelor elipsometrului, citirile efectuate în cele patru zone se abat puțin de la valorile date în acest tabel. În scopul micșorării erorilor datorate imperfecțiunii elementelor instrumentului se recomandă medierea valorilor obținute la citirea în două zone.

Valorile mediate ale citirilor în zonele 1 și 3 sînt

$$\Psi_{1,3} = \frac{1}{2}(A_1 - A_3)$$
$$\Delta_{1,3} = P_1 + P_3 \qquad (16.26)$$

iar cele corespunzătoare citirilor în zonele 2 și 4

$$\Psi_{2,4} = \frac{1}{2}(A_2 - A_4)$$
$$\Delta_{2,4} = -(P_2 + P_4). \qquad (16.27)$$

O precizie mai bună se obține în cazul medierii citirilor efectuate în toate cele patru zone

$$\Psi_m = \frac{1}{4}(A_1 - A_3 + A_2 - A_4) \qquad (16.28)$$
$$\Delta_m = \frac{1}{2}(P_1 + P_3 - P_2 - P_4).$$

Operația propriu-zisă de măsurare a unghiurilor P și A se face după cum urmează :

a) Se rotesc atît polarizorul cît și analizorul pînă cînd se obține valoarea minimă I_0 a intensității curentului dat de fotomultiplicator. O astfel de valoare este încă suficient de imprecisă.

b) Se rotește apoi polarizorul într-un sens pînă se obține o valoare I_1 a intensității curentului, azimutul polarizorului fiind P'. Se rotește apoi în sens opus polarizorul pînă cînd, după trecerea prin poziția corespunzătoare valorii minime I_0, se obține din nou intensitatea curentului I_1. Azimutul polarizorului în această poziție îl notăm cu P''. Așezăm atunci polarizorul la poziția $\frac{1}{2}(P' + P'')$, care pentru măsurători ce nu necesită o precizie deosebită poate fi practic considerată ca poziția corespunzătoare extincției.

c) Se efectuează aceeași operație rotind însă de data aceasta analizorul, determinîndu-se în mod analog azimuturile A' și A'' pentru care intensitatea curentului are o aceeași valoare în dreapta și în stînga poziției de minim. Poziția $\frac{1}{2}(A' + A'')$ se consideră poziția de extincție. Dacă se dorește o precizie mai ridicată a măsurării este recomandabil ca în locul determinării azimutului polarizorului din valorile P' și P'' să se traseze curba $I = I(P)$ în jurul valorii minime a intensității curentului și să se ia drept azimut de extincție al polarizorului valoarea corespunzătoare minimului acestei curbe.

Determinarea azimutului de extincție al analizorului se poate efectua în mod analog. În sfîrșit, o precizie și mai bună se obține dacă după stabilirea ca mai sus a poziției de extincție a analizorului, se ridică din nou curba $I = I(P)$, se stabilește minimul acestei curbe și se procedează din nou, la fel și pentru analizor.

Automatizarea măsurărilor elipsometrice. Măsurarea precisă a mărimilor elipsometrice implică o tehnică destul de dificilă, iar durata determinărilor este destul de lungă. Din acest motiv a apărut necesitatea automatizării acestor măsurări, fie în scopul posibilității urmăririi fidele a evoluției rapide a stării superficiale, fie în scopul folosirii industriale a metodei pentru controlul nedistructiv al unor elemente folosite în electronică sau optoelectronică.

În scopul studierii evoluției în timp a filmelor superficiale, este utilă înregistrarea automată a intensității curentului fotomultiplicatorului în funcție de timp, cînd azimuturile polarizorului și analizorului sînt fixate la valorile P și A, apropiate de valoarea de extincție. În acest caz intensitatea curentului dat de fotomultiplicator este

$$I = C\left[\sin^2(\Psi + A) - \sin 2\Psi \sin 2A \sin^2\left(\frac{\Delta}{2} + P - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (16.29)$$

Se vede că intensitatea curentului I, fiind dependentă de mărimile elipsometrice Ψ și Δ, cuprinde în fond informația asupra stării superficiale a specimenului. Înregistrînd acest curent, este posibilă urmărirea evoluției stării superficiale cu un timp de răspuns egal cu al instrumentului înregistrator. Deși variațiile semnalului δI depind atît de variațiile $\delta\Delta$ cît și de variațiile $\delta\Psi$, se arată* că există un anumit set de condiții pentru care se poate obține din δI variația $\delta\Delta$, fără ca aceasta să fie sensibil influențată și de variațiile lui $\delta\Psi$. Observăm că $\delta\Delta$ este un indicator foarte sensibil al evoluției suprafeței specimenului.

În scopul controlului automat al fabricației, s-au construit elipsometre complet automatizate, comandate de calculator, acestea putînd comanda și acceptarea sau refuzarea piesei controlate. Pentru cercetare s-au construit dispozitive automate mai simple, prevăzute cu celule modulatoare de lumină prin efect Faraday.

Aplicațiile metodei elipsometrice. Precizia deosebită a măsurărilor elipsometrice a impus această metodă atît în cercetare cît și în industrie. Metoda este deosebit de utilă pentru determinarea grosimii filmelor depuse în vederea realizării circuitelor integrate. Studiul adsorbției gazelor pe suprafața metalelor, îmbătrînirea suprafeței sticlelor sau studiul difuziei metalelor depuse în straturi subțiri constituie alte aplicații utile ale acestei metode. În fine, nu

---

* Vezi : Brusic, V. et al., Appl. Opt., 9 1634 (1970).

mare număr de lucrări sînt consacrate cercetării oxidării metalelor, proceselor de coroziune și de protecție la coroziune prin filme de pasivare sau inhibitori.

16.7. Aplicații ale birefringenței artificiale

Fotoelasticimetria. Se consideră montajul reprezentat schematic în figura 16.14 : o lamă de sticlă L de grosime e și lățime l așezată între doi polarizori $\mathcal{P}_1$ și $\mathcal{P}_2$ încrucișați și așezați la 45° față de direcția tensiunii mecanice la care se supune lama ; imaginea lamei L se observă pe ecranul E. Cînd se aplică o forță F pe lama L, pe ecran apare lumină, ceea ce dovedește birefringența sticlei. Sticla optică obișnuită se comportă ca un cristal uniax negativ ($v_0 < v_e$, sau $n_o > n_e$), la care axa optică este paralelă cu compresiunea aplicată. Dacă comprimarea este uniformă, iluminarea care apare pe ecran este uniformă, iar dacă comprimarea nu este uniformă pe ecran apar linii întunecoase și linii luminoase, de egală comprimare. Dacă F este forța aplicată pe suprafața $S = el$ a lamei, atunci diferența de drum produsă prin birefringență este

$$\delta = (n_o - n_e)e = KF/l \qquad (16.30)$$

și nu depinde de grosimea lamei ; K este constantă de material.

Acest fenomen stă la baza fotoelasticimetriei : macheta elementului a cărui distribuție de eforturi se urmărește a fi determinată se examinează între polarizori încrucișați. Se observă *linii izocromatice*, locuri geometrice ale punctelor de egală valoare a diferenței celor două tensiuni principale perpendiculare $P - Q$ și *linii izoclinice*, locuri geometrice ale punctelor în care direcția tensiunii este paralelă cu direcția de polarizare a polarizorului sau analizorului. Două izocline se pot intersecta în două puncte numite puncte izotrope, în care $P = Q$, adică unde substanța este izotropă.

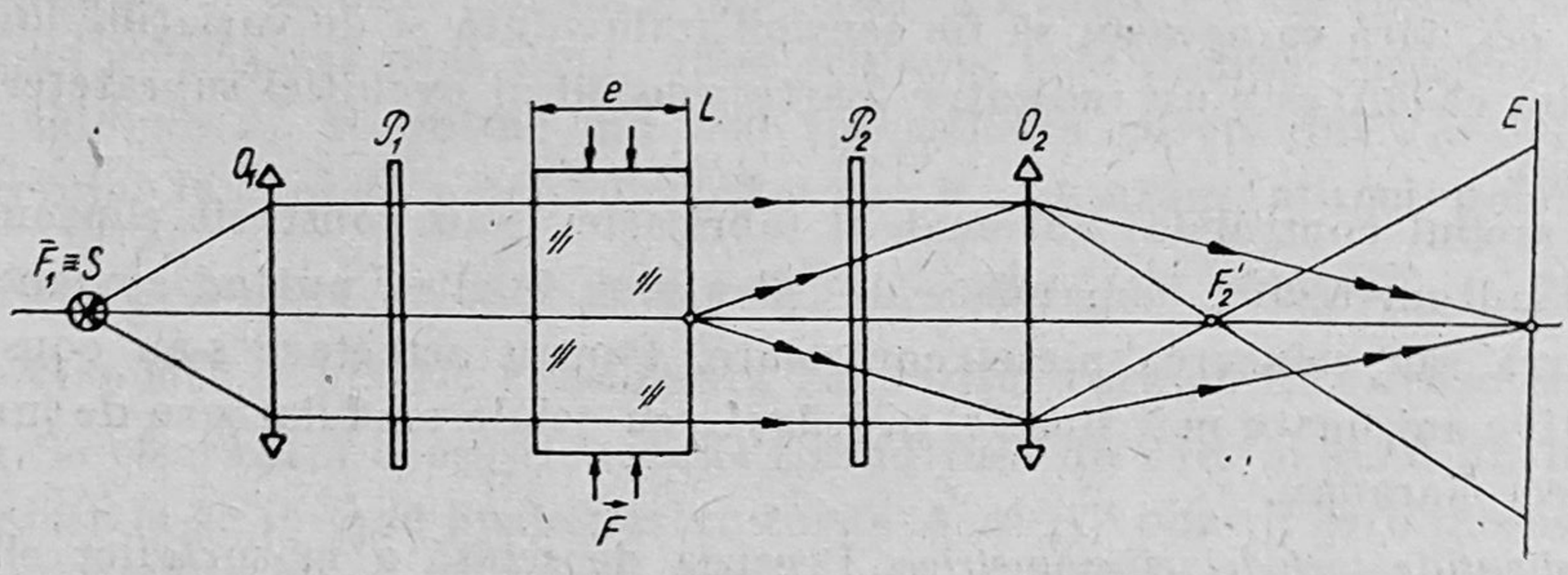


Fig.16.14

17. OPTICA FOURIER

17.1. Imaginea unei surse punctiforme printr-un sistem optic perfect

17.1.1. Difracția printr-o deschidere circulară

Fie obiectivul O considerat sistem optic perfect (fig. 17.1) și diafragma de deschidere D circulară, așezată coaxial în fața obiectivului. Se consideră un fascicul paralel și normal pe planul diafragmei. Sursa S fiind situată la infinit imaginea sa S' se formează în planul focal π al obiectivului O. Fenomenul prezintă simetrie de revoluție în jurul axei optice CS'. Amplitudinea oscilației luminoase în P este

$$f(u, v) = \int_{\Sigma} \exp[iK(uY + vX)]\, dX\, dY.$$

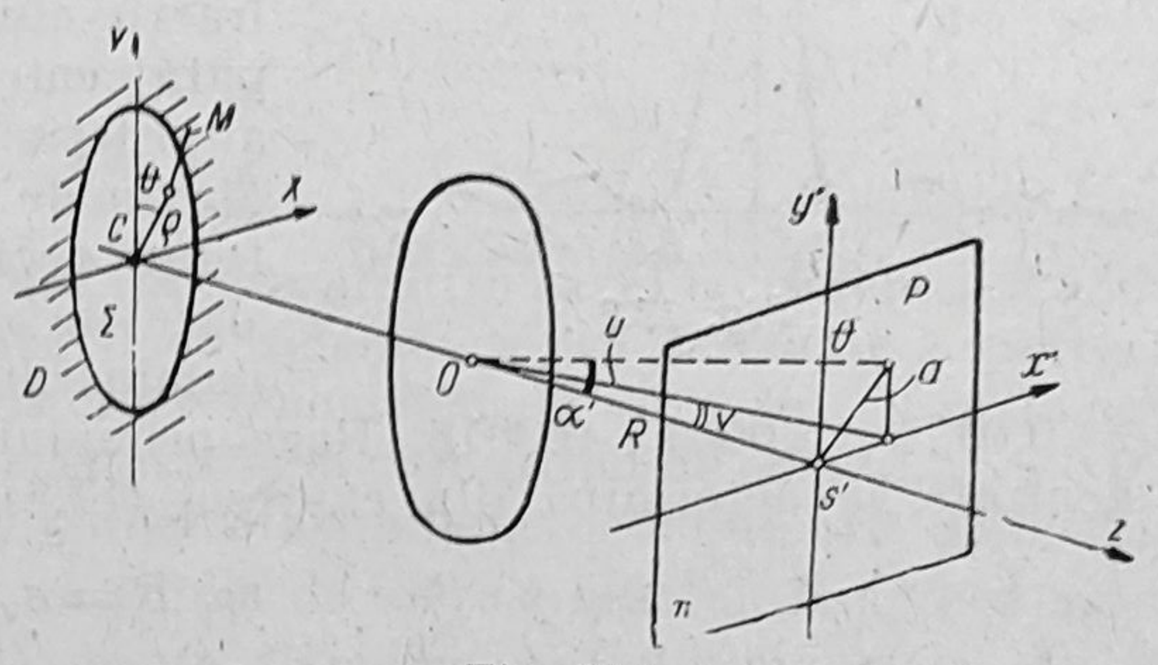


Fig. 17.1

Se fac schimbările de variabile

$$Y = \rho \cos\theta,\ X = \rho \sin\theta$$

$$u = \frac{y'}{R} = \frac{a'}{R} \cdot \cos\theta' = \alpha' \cos\theta' \tag{17.1}$$

$$v = \frac{x'}{R} = \frac{a'}{R} \cdot \sin\theta' = \alpha' \sin\theta'.$$

Dacă ρ_0 este raza deschiderii circulare, amplitudinea oscilației luminoase în P este dată de expresia

$$f(\alpha') = \pi\rho_0^2 \cdot \frac{2J_1(K\rho_0\alpha')}{K\rho_0\alpha'} \tag{17.2}$$

unde am notat :

— funcția Bessel de ordinul zero

$$J_0(K\rho\alpha') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(iK\rho\alpha' \cos\theta)\, d\theta\ ;$$

— funcția Bessel de ordinul întîi

$$J_1(K\rho_0\alpha') = \frac{1}{K\rho_0\alpha'}\int_0^{K\rho_0\alpha'} J_0(K\rho\alpha')K\rho\alpha'\, d(K\rho\alpha').$$

Aşadar, iluminarea în P este proporţională cu expresia

$$E_P = (\pi\rho_0^2)^2 \cdot \left[\frac{2J_1(K\rho_0\alpha')}{K\rho_0\alpha'}\right]^2. \qquad (17.3)$$

Se notează

$$Z = K\rho_0\alpha' = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\rho_0\frac{a'}{R} = \frac{2\pi\rho_0}{\lambda R}(x'^2 + y'^2)^{1/2} \qquad (17.4)$$

Lăsînd la o parte factorul de proporţionalitate $(\pi\rho_0^2)^2$, rezultă iluminarea într-un punct al figurii de difracţie

$$E_P = [2J_1(Z)/Z]^2 \qquad (17.5)$$

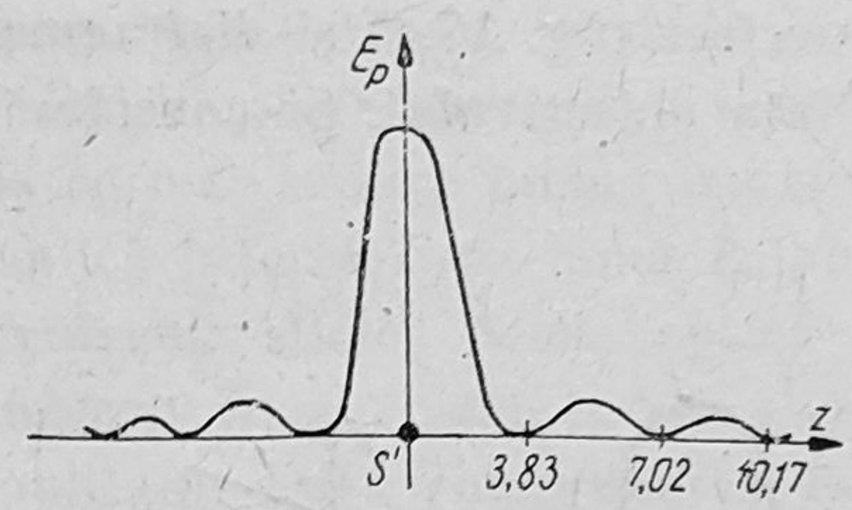


Fig. 17.2

expresie care constituie distribuţia iluminării sau intensităţii luminoase în figura de difracţie numită pata lui Airy, care conţine o pată centrală luminoasă înconjurată de inele alternativ luminoase şi întunecoase (fig. 17.2). Maximele inelelor sînt mult mai puţin intense decît maximul central, razele fiind date de valorile: $Z = 5{,}14;\ 8{,}46;\ 11{,}62;\ \ldots$, iluminările corespunzătoare fiind: $E_P = 0{,}0175;\ 0{,}0041;\ 0{,}0016$. Raza primului inel întunecos sau raza petei centrale se determină din expresia (17.4), folosind notaţia

$$\rho_0/R = \sigma_0$$

$$Z = K\rho_0\alpha' = \frac{2\pi}{\lambda}\rho_0\frac{a'}{R} = \frac{\pi}{\lambda}\cdot 2\sigma_0 a'$$

$$Z = 3{,}83 \rightarrow a' = \frac{1{,}22\lambda}{2\sigma_0} \qquad (17.6)$$

sau raza unghiulară

$$\alpha' = \frac{a'}{R} = \frac{1{,}22\lambda}{2\rho_0}. \qquad (17.6')$$

În tabelul 17.1 se dau razele (în μm) ale petelor centrale pentru deschideri ale obiectivelor $2\sigma_0$ cuprinse între 1/3 pînă la 1/20.

Tabelul 17.1

$2\sigma_0$	1/3	1/6	1/10	1/20
$\lambda = 0{,}555\ \mu$m	2	4,1	6,8	13,6
$\lambda = 0{,}435\ \mu$m	1,6	3,2	5,3	10,6

17.1.2. Limita de rezoluţie a sistemelor optice

a) *Limita de rezoluţie a unei lunete.* Se consideră două obiecte luminoase S_1 şi S_2, de aceeaşi intensitate şi situate la infinit; imaginile lor, date de obiectivul de lunetă *Ob* (fig. 17.3), sînt două pete de difracţie centrate în

jurul lui S_1' și S_2' (imaginile geometrice ale lui S_1 și S_2). Dacă distanța $\overline{S_1'S_2'}$ este suficient de mare, ochiul vede două imagini distincte, dar dacă imaginile S_1' și S_2' sînt prea apropiate, figurile de difracție sînt practic confundate.

Limita de rezoluție constituie distanța $\overline{S_1'S_2'}$ de la care ochiul nu mai distinge două imagini ; această limită depinde nu numai de structura difrac-

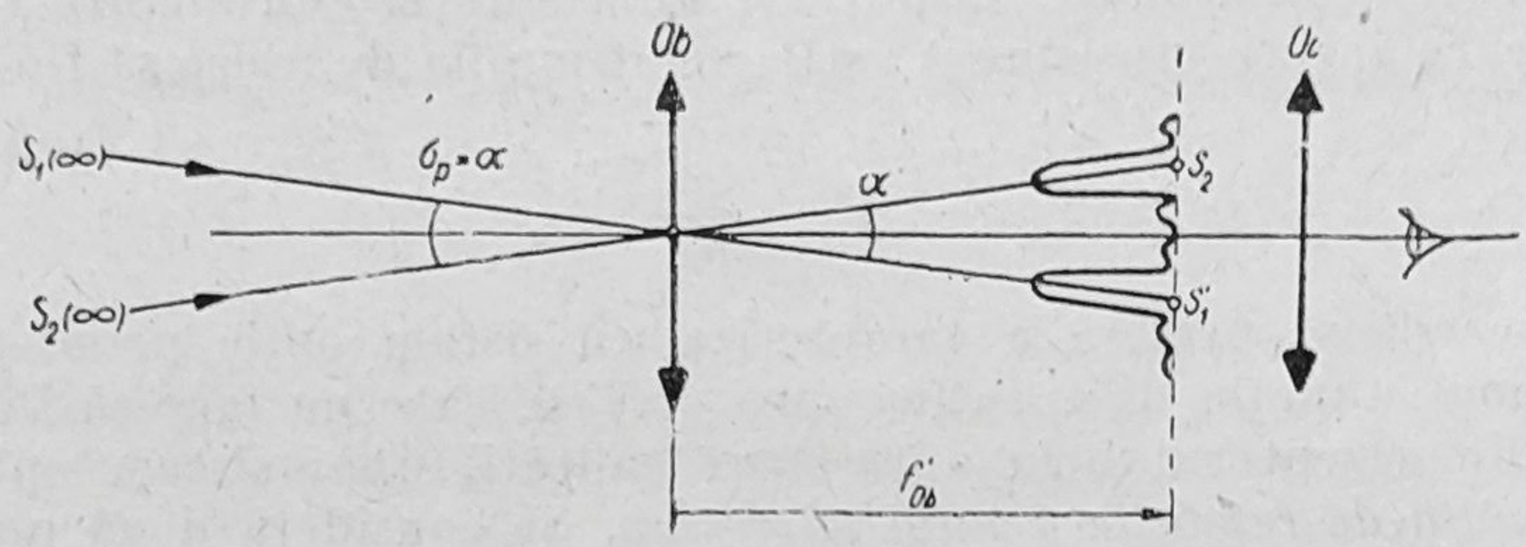


Fig. 17.3

țională a imaginii, ci și de structura receptorului (în cazul considerat, ochiul). În anumite condiții ochiul poate fi considerat ca un instrument perfect, limita de rezoluție fiind determinată de fenomenul de difracție, cu o singură influență de ordin fiziologic : contrastul minim perceptibil de ochi $\gamma_{min} = 0{,}02$. Aceste condiții sînt îndeplinite atunci cînd pupila ochiului are diametrul $\simeq 0{,}6$ mm ; se consideră, așadar, că pupila de ieșire a lunetei (imaginea monturii obiectivului dată de ocular) are un diametru de 0,6 mm. Petele de difracție, distanțate la o distanță $\overline{S_1'S_2'}$ oarecare, dau o distribuție a iluminării rezultante (suma celor două iluminări) reprezentată în figura 17.4.

Pentru ca ochiul să poată vedea două imagini distincte, este necesar ca contrastul să fie mai mare decît contrastul minim perceptibil

$$\gamma = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \gtrsim \gamma_{min} = 0{,}02.$$

Conform criteriului Sparow se consideră această condiție îndeplinită dacă marginile primelor inele întunecate ale figurilor de difracție depășesc cu puțin centrele petelor centrale. Ținînd seama de relația (17.6'), rezultă limita de rezoluție: $\alpha' = \lambda/(2\rho_0)$, unde $2\rho_0$ este diametrul obiectivului lunetei. Conform criteriului de rezoluție Rayleigh, adoptat în majoritatea țărilor cu industrie optică, se consideră imaginile celor două puncte separate dacă marginile primelor inele întunecate coincid cu centrele petelor centrale ; așadar, limita de rezoluție este dată de raza unghiulară a primului inel întunecat

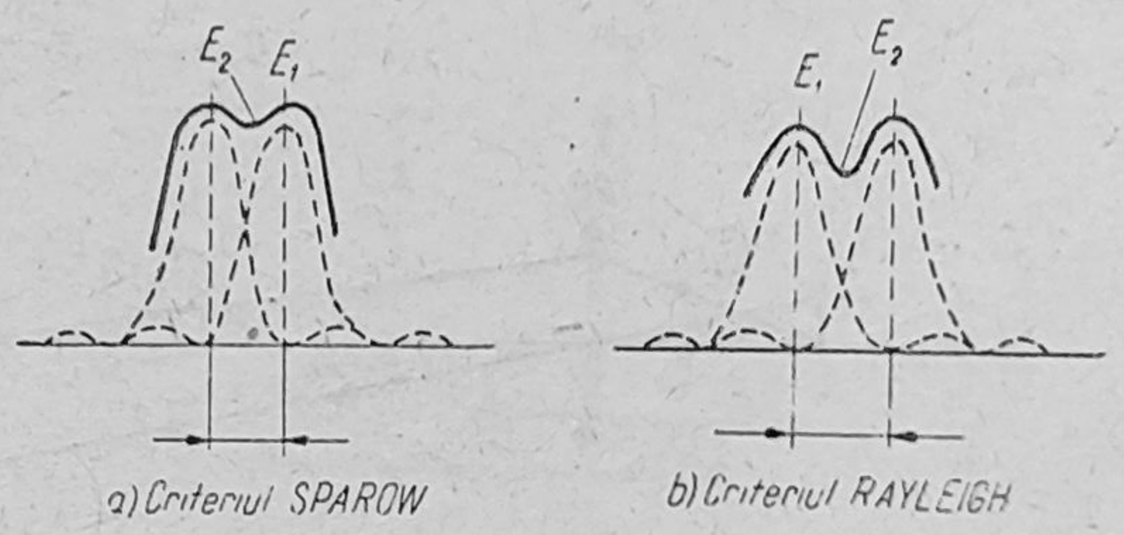


Fig. 17.4

$$\alpha' = 1{,}22\,\lambda'(2\rho_0). \qquad (17.7)$$

Exemplu numeric : $2\rho_0 = 100$ mm (diametrul util al obiectivului), $\lambda = 0{,}6\ \mu m \rightarrow \alpha' = 1{,}51''$. Relația (17.7) poate fi exprimată în secunde de arc, pentru $\lambda \simeq 0{,}6\ \mu m$ și $\langle 2\rho_0 \rangle =$ mm

$$\sigma_p = \alpha' = \left(\frac{125}{2\rho_0}\right)'' \tag{17.7'}$$

Relația (17.7) dă limita de rezoluție a unei leunte, considerată sistem optic perfect și care are un grosisment astfel încît pupila de ieșire să fie $\simeq 0{,}6$ mm, adică

$$\Gamma = \frac{2\rho_0}{0{,}6}. \tag{17.8}$$

În prezent se preferă a caracteriza un sistem optic printr-un criteriu calitativ nou : funcția de transfer optic (*FTO*), care nu face să intervină caracteristicile receptorului în aprecierea calității unui sistem optic.

b) *Limita de rezoluție a unui microscop.* Se consideră două puncte luminoase S_1, S_2 de aceeași intensitate, situate în planul obiect al unui microscop (fig. 17.5).

Fie σ unghiul razei obiective cu axa optică și n indicele de refracție al mediului obiect ; produsul $n \sin \sigma = A$ constituie apertura numerică a obiectivului de microscop. Imaginile celor două puncte sînt pete de difracție cu centrele în S_1' și S_2', imaginile geometrice ale lui S_1 și S_2. Limita de rezoluție, conform criteriului Rayleigh, este considerată distanța $y'_{min} = \overline{S_1' S_2'}$ egală cu raza primului inel întunecat al petei Airy

$$(17.6) \rightarrow y'_{min} = \frac{1{,}22\lambda}{2\sigma'}. \tag{17.9}$$

Aplicînd invariantul Lagrange-Helmholtz obiectivului de microscop se obține

$$ny \sin \sigma = n'y' \sin \sigma',$$

unde $\sin \sigma' \simeq \sigma'$, $n' = 1$, relația (17.9) putînd fi trecută în spațiul obiect

$$y_{min} = \frac{0{,}61\lambda}{A}. \tag{17.9'}$$

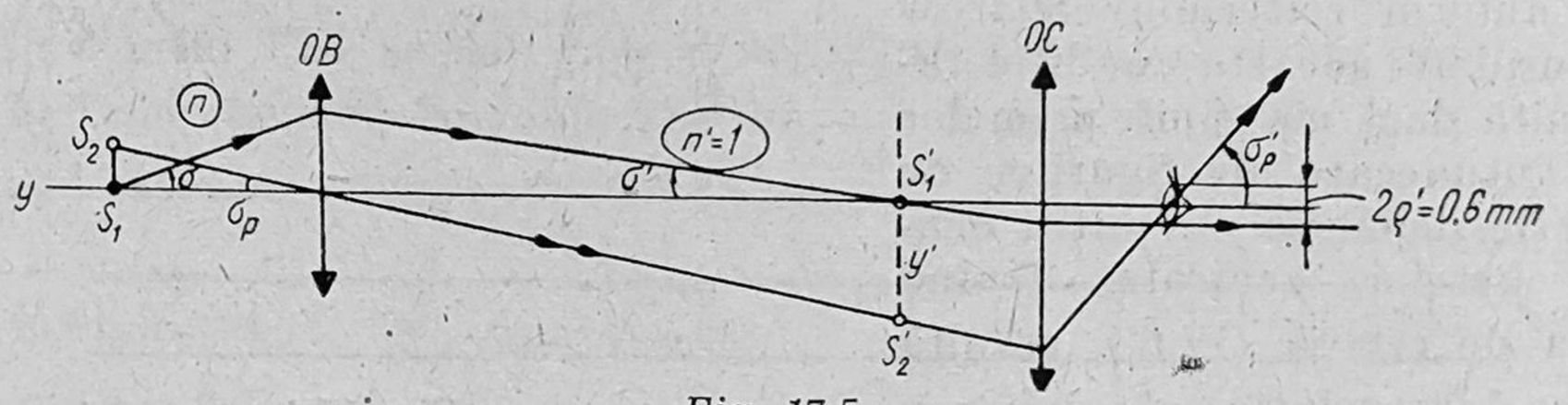


Fig. 17.5

Formula (17.9) este aplicabilă dacă grosismentul microscopului asigură o pupilă de ieșire cu un diametru egal cu 0,6 mm. Ținînd seama de expresiile grosismentului convențional al microscopului și a puterii microscopului

$$\Gamma_c \equiv \frac{\operatorname{tg} \sigma'}{y} \cdot 250, \text{ unde } \langle y \rangle = \text{mm}$$

$$P \equiv \frac{\sigma'}{y} = \frac{1}{f'}, \text{ unde } \langle y \rangle = \langle f' \rangle = \text{m}$$

rezultă

$$\Gamma_c = 0{,}25\ P. \tag{17.10}$$

Aplicînd legea sinusurilor întregului microscop, care formează imaginea obiectului la infinit : $ny \sin \sigma = -n'h'\sigma'_p$, unde $n' = 1$, $h' = \rho'$ (raza pupilei de ieşire) şi ţinînd seama de definiţia puterii microscopului, rezultă : $P \equiv \sigma'/y = -A/\rho'$ (puterea microscopului este negativă), care introdusă în relaţia (17.10) dă expresia grosismentului convenţional al microscopului în funcţie de raza pupilei de ieşire

$$\Gamma_c = 0{,}25\,\frac{A}{\rho'}. \tag{17.11}$$

Punînd condiţia ca grosismentul microscopului să asigure diametrul pupilei de ieşire $2\rho' = 0{,}6$ mm $= 6 \cdot 10^{-4}$ m, rezultă

$$\Gamma_c = 833 \cdot A. \tag{17.12}$$

Aşadar, grosismentul microscopului trebuie să fie de 833 ori mai mare decît apertura numerică a obiectivului pentru a asigura limita de rezoluţie dată de relaţia (17.9).

17.1.3. Contrastul de fază

Obiectele caracterizate prin variaţii ale indicelui de refracţie sau ale grosimii sînt denumite *obiecte de fază*. Exemple :

a) o lamă plan-paralelă cu indice de refracţie n, care prezintă o regiune A cu indice de refracţie $n' \neq n$ (fig. 17.6, a). Diferenţa de drum optic între două raze care traversează lama prin regiunea A (1), respectiv pe lîngă această regiune (2) este $\delta = (n' - n)e$.

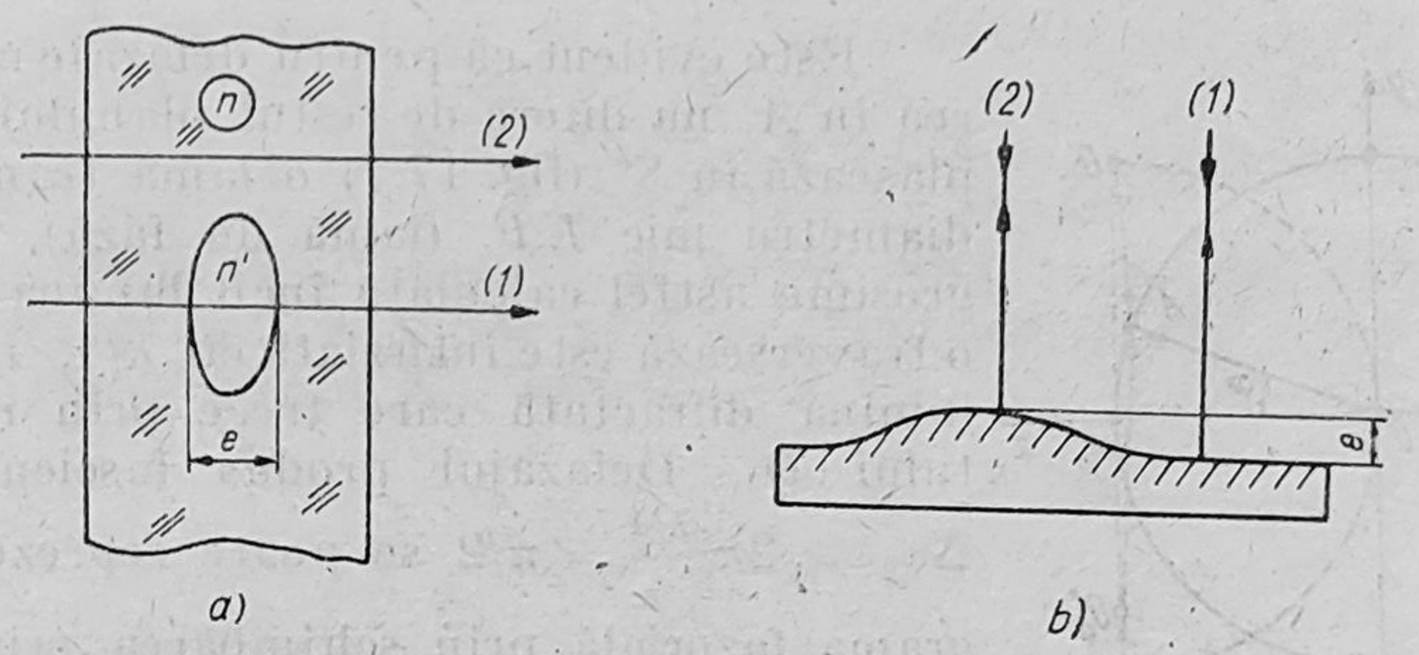


Fig. 17.6

b) un obiect reflectant ale cărui neregularităţi de polisare modifică drumurile optice ale razelor reflectante ; astfel diferenţa de drum optic între razele (1) şi (2) din figura 17.6, b este : $\delta = 2e$, unde e reprezintă diferenţa de grosime a obiectului reflectant.

Obiectele de acest tip, caracterizate numai de variaţii de fază şi nu de variaţii ale amplitudinii, nu sînt vizibile prin metodele de observare clasice.

Metoda contrastului de fază schimbă variațiile de fază ale obiectului în variații de amplitudine ale imaginii, obiectul de fază devenind astfel vizibil. Un obiect de fază situat în planul obiect π al unui microscop (fig. 17.7) este iluminat telecentric cu ajutorul unei surse S plasată în focarul obiectivului de colimator C; imaginea sursei, S', se formează în planul obiectivului O_2,

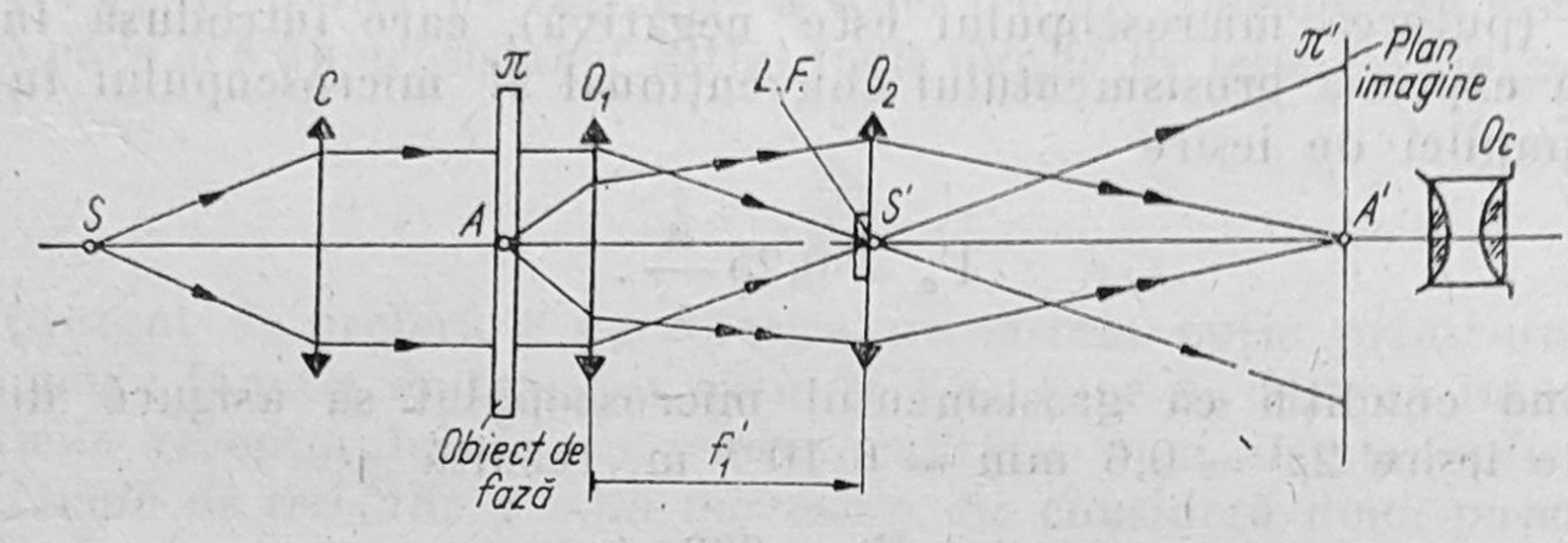


Fig. 17.7

astfel încît fasciculul direct (provenit de la sursă) iluminează uniform planul imagine π'. Detaliul defazant A al obiectului de fază difractă lumina care este concentrată de O_1 și O_2 în planul imagine π'. Imaginea A' observată cu un ocular rezultă în urma interferenței luminii difractate cu fasciculul direct care formează un *fond coerent* în planul π'. În figura 17.8 se reprezintă diagrama fazorială a oscilațiilor luminoase în A'. Fazorul $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A}$ reprezintă suma a două oscilații aflate în cuadratură : $\overrightarrow{OA_0}$ (datorat regiunilor obiectului unde $\varphi = 0$) și $\overrightarrow{A_0A}$ (datorat regiunii A, care produce un defazaj $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$). Iluminarea în planul imagine este

$$E = (\overrightarrow{OA})^2 = (\overrightarrow{OA_0})^2 + (\overrightarrow{A_0A})^2 \simeq E_0 = (\overrightarrow{OA_0})^2.$$

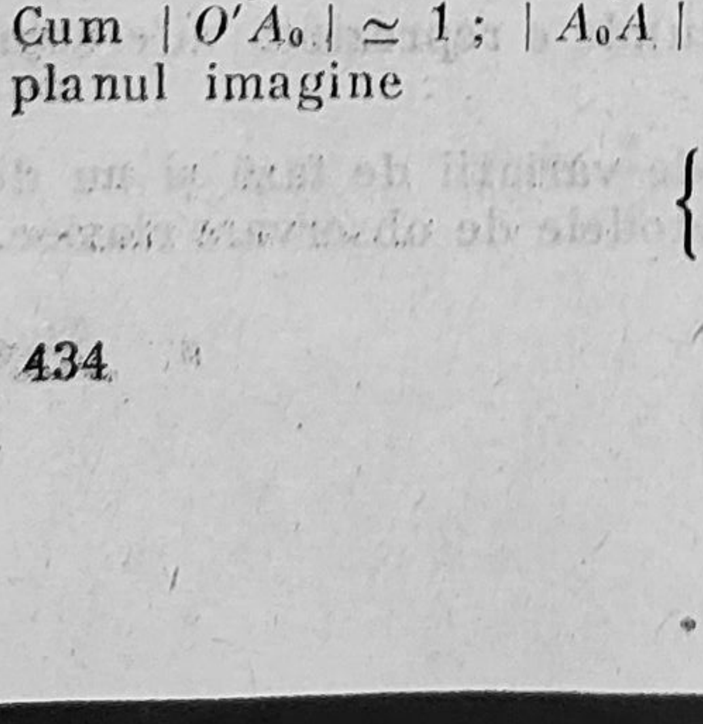


Fig. 17.8

Este evident că pentru defazaje mici iluminarea în A' nu diferă de restul planului imagine. Se plasează în S' (fig. 17.7) o lamă transparentă de diametru mic *L.F.* (lamă de fază), care are o grosime astfel calculată încît lumina directă care o traversează este întîrziată cu $\lambda/4$, în raport cu lumina difractată care trece prin restul obiectului O_2. Defazajul produs fasciculului direct $\Delta\varphi_0 = 2\pi \frac{\lambda/4}{\lambda} = \pi/2$ se poate reprezenta pe diagrama fazorială prin schimbarea originei din O în O'. Amplitudinea vibrației în A devine $\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'A_0} - \overrightarrow{A_0A}$, fazorii $\overrightarrow{O'A_0}$, $\overrightarrow{A_0A}$ putînd fi considerați în prelungire, pentru defazaje φ mici. Cum $|\overrightarrow{O'A_0}| \simeq 1$; $|\overrightarrow{A_0A}| = \varphi$, rezultă $|\overrightarrow{O'A}| = 1 - \varphi$, iar iluminarea în planul imagine

$$\begin{cases} E_{A'} = (1 - \varphi)^2 \simeq 1 - 2\varphi \\ E_{fond} = 1. \end{cases} \tag{17.13}$$

Imaginea A' apare deci cu un contrast

$$\gamma = \frac{E_{fond} - E_{A'}}{E_{fond} + E_{A'}} \simeq \varphi. \qquad (17.14)$$

Dacă obiectul A produce un avans de fază $\varphi > 0$, iluminarea în A' este mai mică decît în restul cîmpului imagine (planul π'), contrastul de fază fiind negativ. Observație: dacă în locul lamei de fază care produce o întîrziere cu $\lambda/4$ se așază o lamă mai groasă care produce un avans al oscilației undei directe cu $\lambda/4$ (care echivalează cu o întîrziere cu $3\lambda/4$), originea diagramei fazoriale se schimbă în O''. În acest caz, iluminarea în A' este $E_{A'} = 1 + 2\varphi$, iar contrastul rămîne același: $\gamma = \varphi$; însă dacă obiectul A produce un avans de fază ($\varphi > 0$), iluminarea în A' este mai mare decît în restul planului π', contrastul de fază fiind pozitiv.

Contrastul minim perceptibil de ochi fiind 0,02, diferența de fază minimă observabilă cu această metodă este $\varphi = 2\pi\delta/\lambda = 0{,}02$, ceea ce corespunde unei diferențe de drum optic $\delta \simeq 20$ Å. Sensibilitatea metodei crește substanțial dacă lama de fază este absorbantă. Dacă intensitatea luminii directe incidente este micșorată de N ori, adică densitatea optică a lamei este $d = \log_{10} N$, originea diagramei fazoriale se modifică din O'' în O''_a astfel încît

$$\left(\frac{\overline{O''A_0}}{\overline{O''_aA_0}}\right)^2 = N. \qquad (17.15)$$

Iluminarea în imaginea A' devine

$$E_{A'} = (N^{-1/2} + \varphi)^2 \simeq (1 + 2\varphi N^{1/2})/N$$

iar în restul planului imagine π' unde $\varphi = 0$: $E_{fond} = 1/N$. Contrastul imaginii devine

$$\gamma = \frac{E_{A'} - E_{fond}}{E_{A'} + E_{fond}} \simeq \varphi \cdot N^{1/2}. \qquad (17.16)$$

Așadar, utilizarea unei lame de fază absorbante caracterizată prin N produce amplificarea contrastului cu $N^{1/2}$ față de o lamă de fază obișnuită. Exemplu: dacă $N = 2\,500 (d = 3{,}4)$ se pot observa diferențe de drum optic de ordinul $\delta \simeq 10$ Å cu un contrast bun ($\gamma = 0{,}5$).

Contrastul de fază permite obținerea unei sensibilități ridicate cu condiția ca sistemul optic să fie de calitate corespunzătoare și, în particular, calea optică să fie protejată de lumina parazită.

17.1.4. Strioscopie

Dacă lama de fază *L.F.* (fig. 17.7) este înlocuită de un ecran opac, amplitudinea în A' este dată de φ și este nulă în tot restul planului π', deoarece fasciculul direct este obturat de ecranul opac plasat în S'. În acest caz iluminarea în A' este foarte redusă $E_{A'} = \varphi^2$, dar contrastul este maxim: $\gamma = 1$.

Această metodă, numită metoda strioscopiei sau metoda fondului negru, se utilizează pentru a pune în evidență defectele sticlelor optice, impurități, care difractă puternic lumina. Dar, spre deosebire de metoda contrastului de fază, imaginile furnizate de metoda strioscopiei sînt uneori dificil de interpretat.

17.1.5. **Apodizarea**

Limita de rezoluție a unui aparat optic este determinată în principal de deschiderea acestuia. Dacă iluminările obiectelor ce trebuie separate sînt egale, limita de rezoluție este dată de raza primului inel întunecos, intensitățile inelelor luminoase neglijîndu-se. În cazul în care unul dintre cele două

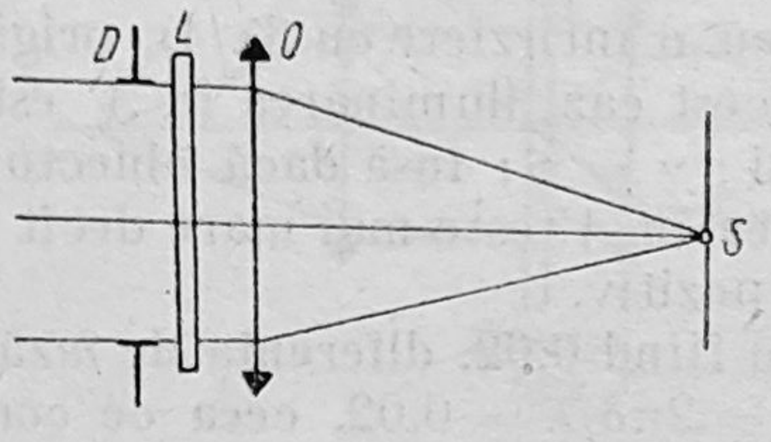


Fig. 17.9

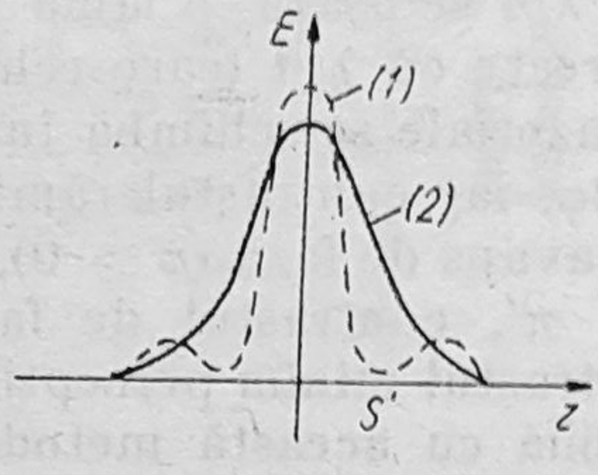


Fig. 17.10

obiecte prezintă o iluminare mult mai mare decît a celuilalt, intensitățile inelelor luminoase nu mai pot fi neglijate, limita de rezoluție fiind diferită de valoarea determinată convențional.

Din studierea distribuției energiei în pata lui Airy rezultă că $\simeq 84\%$ din energia totală se află în partea centrală, iar restul de 16% în inelele luminoase, energie care este nu numai pierdută pentru formarea imaginii, dar produce și efecte nedorite (voal parazit). Este, deci, interesant să se reducă pe cît posibil această energie din inelele luminoase, ceea ce se numește apodizarea petei de difracție. În acest mod se poate ameliora observarea unei surse punctiforme de intensitate mică în vecinătatea uneia foarte intense și, în același fel, observarea obiectelor cu contrast slab. Realizarea apodizării se poate face atenuînd efectul marginii diafragmei unde se produce anularea bruscă a amplitudinii luminoase. Astfel, se plasează între diafragma sistemului optic și obiectiv o lamă plan-paralelă L (fig. 17.9) care are factorul de transmisie al amplitudinii descrescător din centru spre margini, după funcția lui Gauss. Cum figura de difracție din S' este transformata Fourier a distribuției amplitudinii pe suprafața echifază și cum transformata Fourier a funcției Gauss este tot o funcție Gauss, rezultă că figura de difracție va avea forma curbei lui Gauss. În figura 17.10 sînt reprezentate distribuțiile iluminării în pata Airy (curba 1) și în pata de tip Gauss (curba 2) la care inelele luminoase dispar, dar pata centrală se lărgește.

17.2. **Imaginea unei surse punctiforme printr-un sistem optic imperfect**

17.2.1. **Relația analitică generală**

Se urmărește influența aberațiilor unui sistem optic asupra figurii de difracție la formarea imaginii unei surse punctiforme prin acel sistem. În acest caz unda transmisă prin sistemul optic nu mai este sferică. Problema

a fost studiată pentru prima dată de Rayleigh, care a enunțat celebra regulă a sfertului lungimii de undă : dacă suprafața echifază Σ' transmisă printr-un aparat optic poate fi cuprinsă între două sfere distanțate la un sfert din lungimea de undă, imaginea este foarte apropiată de imaginea furnizată de un sistem optic perfect.

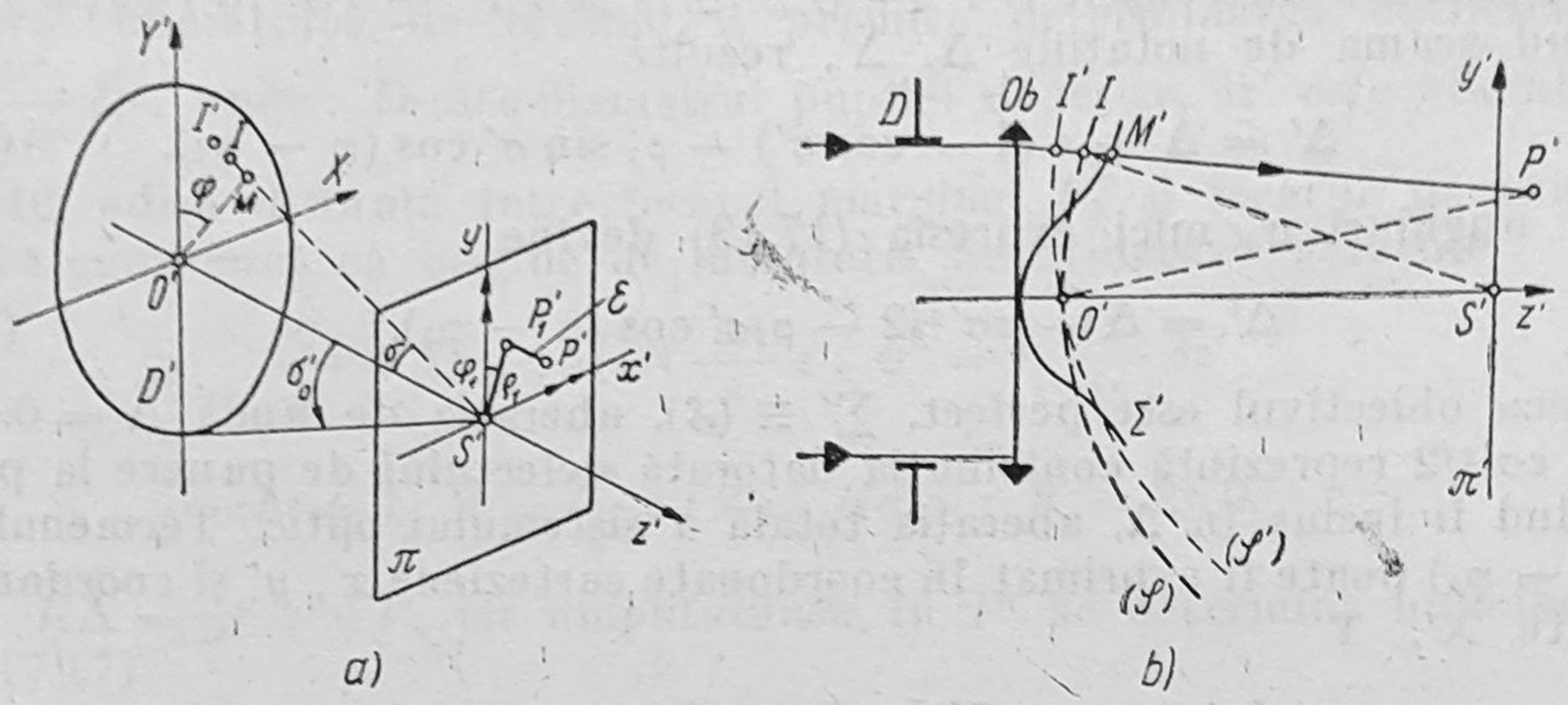


Fig. 17.11

Fie suprafața echifază Σ' puțin depărtată de forma sferică, transmisă de obiectivul *Ob* (fig. 17.11). Amplitudinea oscilației luminoase într-un punct P' din vecinătatea centrului S' al sferei de referință $(\mathcal{S})$ se determină pe baza principiului Huygens, ținînd seama de aberația de undă introdusă de sistemul optic. Se consideră raza emergentă $MP'(M \in \Sigma')$ care traversează sfera $(\mathcal{S})$ în I și sfera $(\mathcal{S}')$ în I'. Sfera $(\mathcal{S}')$ are centrul în P' și trece prin O'. Dacă se ia originea fazei în O', oscilația luminoasă în P' datorată punctului M este proporțională cu $\exp[iK(\overline{MP'} - \overline{O'P'})]$, unde : $\overline{MP'} - \overline{O'P'} = \overline{MP'} - \overline{I'P'} = \Delta'$. Se notează : $\Delta = \overline{IM}$, aberația de undă, distanța între suprafața echifază Σ' și sfera de referință $(\mathcal{S})$, $\Delta' = \overline{I'M}$, aberația de undă în raport cu sfera $(\mathcal{S}')$. Amplitudinea rezultantă a oscilațiilor luminoase în P' este dată de integrala (principiul Huygens)

$$f_{P'} = \frac{i}{\lambda R} \int_{\Sigma'} \exp(iK\Delta')\, ds \qquad (17.17)$$

unde ds este elementul de suprafață centrat în M. Pentru determinarea aberației de undă Δ' se consideră diferența de drum

$$\overline{O'P'} - \overline{O'S'} = \overline{I'P'} - \overline{IS'}, \qquad (17.18)$$

unde $\overline{O'P'} - \overline{O'S'} \simeq \varepsilon = \overline{P'P'_1}$ (defectul de punere la punct), iar $\overline{I'P'} - \overline{IS'}$ se poate aproxima ca fiind egală cu proiecția lui $\overline{I'P'}$ pe direcția IS' din care se scade $\overline{IS'}$ (deoarece P' se află în vecinătatea lui S'), adică este egală cu suma proiecțiilor $\overline{II'}$ și $\overline{S'P'}$ pe IS'. Pentru efectuarea calculului ținem seama de următoarele :

— coordonatele sferice ale lui I : $R = \overline{IS'}$; σ' ; φ ;

— cosinușii directori al lui IS' : $\sin\sigma' \sin\varphi$; $\sin\sigma' \cos\varphi$; $\cos\sigma'$;

— coordonatele lui P' : $\rho_1 \sin\varphi_1$; $\rho_1 \cos\varphi_1$; ε ;

— proiecția lui $\overline{S'P'}$ pe $IS' = \rho_1 \cdot \sin\sigma' \cos(\varphi - \varphi_1) + \varepsilon \cos\sigma'$;

— proiecția lui $\overline{II'}$ pe $\overline{IS'} \simeq \overline{II'}$, deoarece unghiul de înclinare este foarte mic.

Așadar, rezultă $\overline{I'P'} - \overline{IS'} = \overline{II'} + \rho_1 \sin\sigma' \cos(\varphi - \varphi_1) + \varepsilon \cdot \cos\sigma'$.

Introducînd diferențele $\overline{O'P'} - \overline{O'S'} \simeq \varepsilon$ și $\overline{I'P'} - \overline{IS'}$ în relația (17.18) și ținînd seama de notațiile Δ, Δ', rezultă

$$\Delta' = \Delta + \varepsilon(1 - \cos\sigma') - \rho_1 \sin\sigma' \cos(\varphi - \varphi_1). \qquad (17.19)$$

Pentru unghiuri σ' mici expresia (17.19) devine

$$\Delta' = \Delta + \varepsilon\sigma'^2/2 - \rho_1\sigma' \cos(\varphi - \varphi_1). \qquad (17.20)$$

Dacă obiectivul este perfect, $\Sigma' \equiv (\mathcal{S})$, aberația de undă $\Delta = 0$. Termenul $\varepsilon\sigma'^2/2$ reprezintă contribuția datorată defectului de punere la punct, el putînd fi inclus în Δ, aberația totală a sistemului optic. Termenul $\rho_1\sigma' \cos(\varphi - \varphi_1)$ poate fi exprimat în coordonate carteziene x', y' și coordonatele normate X', Y'

$$\begin{cases} \sigma' \cos\varphi = Y' \\ \sigma' \sin\varphi = X' \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_1 \cos\varphi_1 = y' \\ \rho_1 \sin\varphi_1 = x'. \end{cases}$$

Așadar, expresia lui Δ' devine

$$\Delta' = \Delta - (X'x' + Y'y'). \qquad (17.20')$$

În cazul deschiderilor circulare (utilizate în marea majoritate a aparatelor optice) este mai comodă utilizarea coordonatelor polare $h \in [0\,;\,1]$, φ; $h = (X'^2 + Y'^2)^{1/2}/\sigma'$, aberația de undă Δ incluzînd și eroarea de punere la punct, putînd fi dezvoltată în următoarea formă (care se poate stabili în cadrul opticii geometrice):

$$\Delta = dh^2 + S_1h^4 + S_2h^6 + (lh + c_1h^3 + c_2h^5)\cos\varphi + ah^2\cos 2\varphi \qquad (17.21)$$

În această expresie coeficienții au următoarele semnificații:

d — reprezintă defectul de punere la punct sau curbura cîmpului, adică depărtarea maximă la marginea pupilei ($h = 1$) între suprafața echifază și sfera de referință;

S_1 — coeficientul aberației de sfericitate de ordinul 3, adică depărtarea maximă (la marginea pupilei) între suprafața echifază Σ' și sfera de referință;

S_2 — reprezintă, în aceleași condiții, coeficientul aberației de sfericitate de ordinul 5;

l — este un coeficient introdus pentru a ține cont de o eventuală schimbare a sferei de referință;

c_1 — coeficientul aberației de coma de ordinul 3, adică depărtarea marginală maximă între suprafața echifază afectată de coma și sfera de referință centrată în focarul imagine paraxial;

c_2 — reprezintă, în aceleași condiții, coeficientul aberației de coma de ordinul 5;

a — coeficientul aberației de astigmatism.

17.2.2. Imaginea unui punct în prezența aberației de sfericitate și a unui defect de punere la punct

În acest caz se reține din expresia generală (17.21) numai primii doi termeni : $\Delta = dh^2 + S_1 h^4$.

Teoria aberațiilor de ordinul 3 permite determinarea coeficientului $S_1 = \frac{D^2}{16R^2}\delta z'$, unde : D este diametrul pupilei de ieșire, $\delta z'$ este aberația de sfericitate, adică distanța între focarul marginal $\tilde{F}'_h$ și focarul paraxial F' care este considerat ca origine de măsurare. Se utilizează notațiile

$$\frac{D}{R} = \Omega\,;\ \psi = K\frac{\Omega^2}{8}\varepsilon\,;\ \psi' = K\frac{\Omega^2}{16}\delta z'$$

$$h^2 = l\,;\ d = \frac{\Omega^2}{8}\varepsilon\,;\ Z = K\sigma'_0\rho_1\,;\ K = 2\pi/\lambda$$

rezultă $K\Delta = \psi l + \psi' l^2$, iar amplitudinea în P' se determină aplicînd relația (17.17)

$$f_{P'} = \frac{\mathrm{i}}{\lambda R}\int_{\Sigma'}\exp(\mathrm{i}K\Delta')\,\mathrm{d}s = \mathrm{i}\frac{\pi R\sigma'_0}{\lambda}\int_0^1 \exp(\mathrm{i}K\Delta)J_0(Zl^{1/2})\,\mathrm{d}l$$

iar iluminarea în P' este proporțională cu expresia :

$$E_{P'} = [\int_0^1 J_0(Zl^{1/2})\cos(K\Delta)\,\mathrm{d}l]^2 + [\int_0^1 J_0(Zl^{1/2})\sin(K\Delta)\,\mathrm{d}l]^2. \qquad (17.22)$$

Figurile 17.12, a, b, c arată că apariția și creșterea aberației de sfericitate se traduce printr-o diminuare a iluminării în pata centrală a figurii de difracție și o creștere a iluminării în inelele concentrice. Este, de altfel, o remarcă generală : orice aberație se manifestă prin lărgirea figurii de difracție și micșorarea iluminării în centru.

17.2.3. Imaginea unui punct în prezența aberației de coma, astigmatism și a unei combinații de diferite aberații

În cazul aberației de coma de ordinul 3 calculul analitic se face introducînd expresia $\Delta = c_1 h^3 \cdot \cos\varphi$ în relația (17.20′), amplitudinea rezultînd în urma efectuării integralei (17.17). Figurile 17.13, a, b reprezintă curbele izofote în cazul aberației de coma (după A. Maréchal).

Figura 17.14, a reprezintă curba izofotă în cazul astigmatismului în vecinătatea unei focale (după A. Maréchal), calculul făcîndu-se analog ca și pentru celelalte aberații, luînd $\Delta = ah^2 \cdot \cos 2\varphi$. În sfîrșit, în figura 17.14, b se reprezintă pata de difracție calculată de A. Maréchal în cazul combinării aberațiilor de sfericitate, coma și astigmatism, pentru $S_1 = 2\lambda$, $C_1 = \lambda$ și $a = \lambda$. Ansamblul figurilor de difracție prezentate permite desprinderea următoarei concluzii : dacă aberația crește din ce în ce, influența aberației de astigmatism evoluează cel mai rapid, figura de difracție 17.14, b apropiindu-se de forma prezentată în figura 17.14, a. Evoluția influenței aberației de coma este mai puțin rapidă, iar a aberației de sfericitate este mai puțin rapidă decît coma.

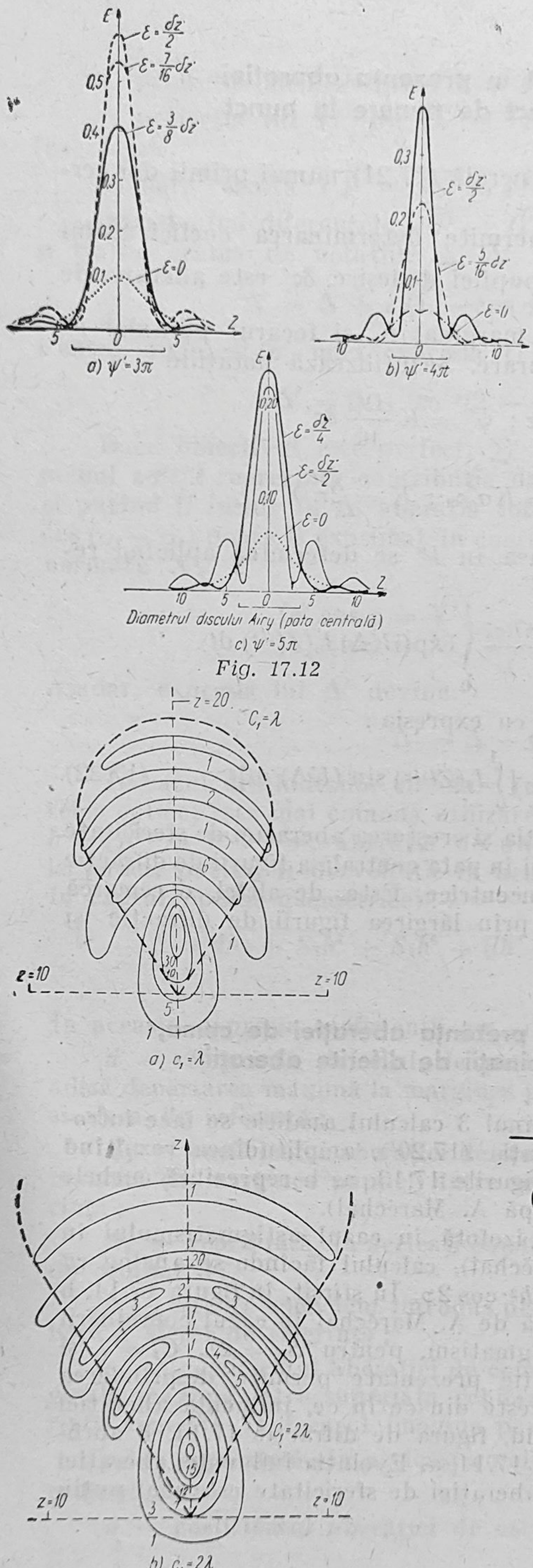
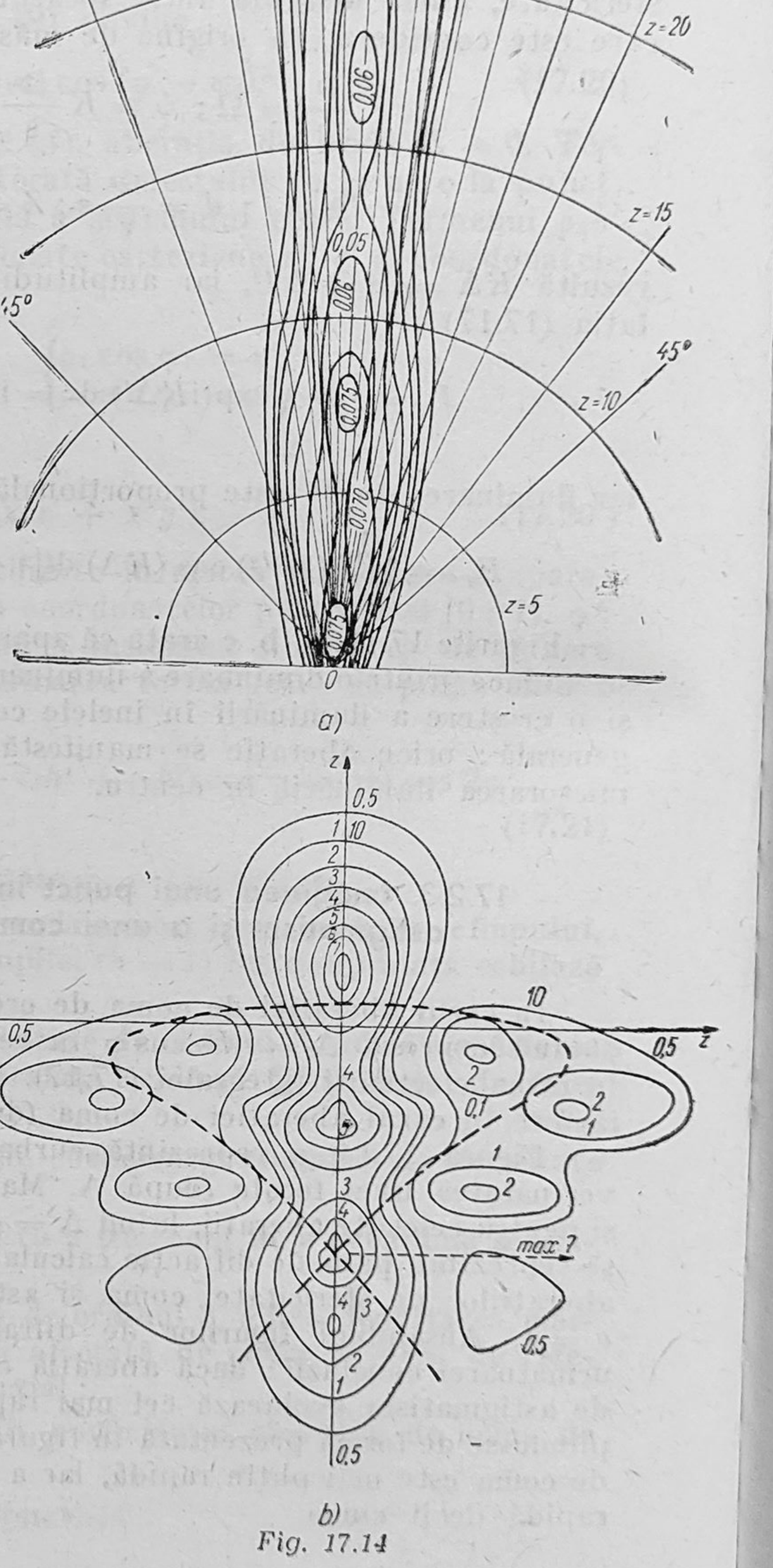


Fig. 17.12



a)

Fig. 17.13

b)

Fig. 17.14

17.2.4. Toleranțele aberațiilor în funcție de calitatea imaginii unui punct

Reluînd expresia distribuției amplitudinii luminoase în pata lui Aïry, relația (17.17), unde Δ' este dată de (17.20′), se dezvoltă funcția exponențială în serie de puteri și se ia ca unitate amplitudinea în centrul petei de difracție produse de sistemul optic considerat perfect ($\Delta = 0$). În acest caz amplitudinea relativă într-un punct $P'(x', y')$ este

$$f_r = 1 + iK\int_{\Sigma'} \Delta' \, ds - \frac{K^2}{2}\int_{\Sigma'} \Delta'^2 \, ds \tag{17.23}$$

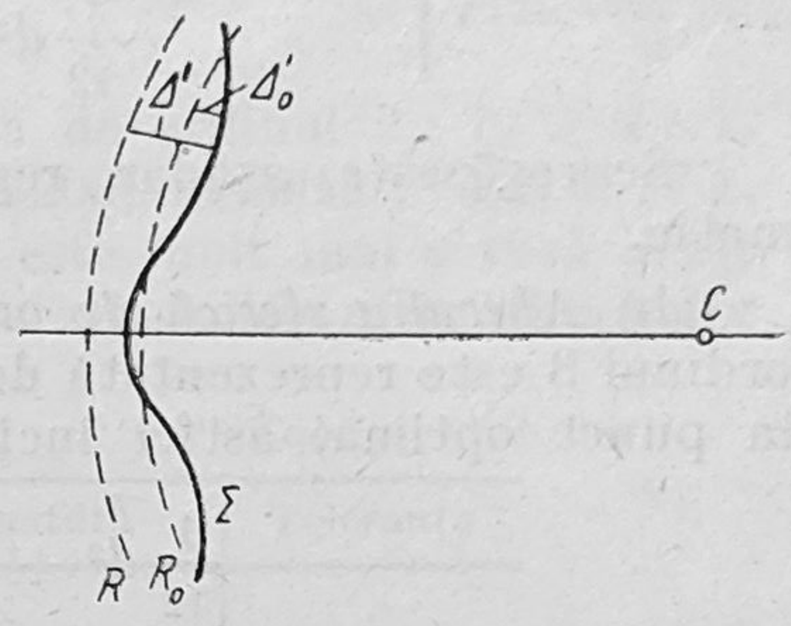


Fig. 17.15

de unde se poate deduce expresia iluminării relative față de centrul petei de difracție, limitată la termenii de gradul doi

$$E_r = ff_r^* = 1 - K^2[\int_{\Sigma'} \Delta'^2 \, ds - (\int_{\Sigma'} \Delta' \, ds)^2]. \tag{17.24}$$

În cazul schimbării razei sferei de referință, centrată în punctul-imagine geometric, E_r rămîne invariabil, ceea ce permite alegerea unei sfere astfel încît media aberației de undă să fie nulă. Din figura 17.15 rezultă : $\Delta - \Delta_0 = R - R_0$.

Ținînd seama de formula mediei și că $\overline{\Delta}'_0 = 0$, iluminarea relativă devine

$$E_r = 1 - K^2 (\overline{\Delta'^2_0}). \tag{17.25}$$

Relația (17.25) dă o aproximare suficient de precisă ; fiind aplicată într-o serie de cazuri au rezultat valori care, pentru $E_r \geqslant 0{,}75$, nu diferă cu mai mult de 0,01 față de valorile măsurate. Din aplicarea regulei sfertului lungimii de undă, enunțată de Rayleigh, rezultă, la o aberație a undei $\lambda/4$, o micșorare a maximului central al figurii de difracție cu aproximativ 20%, ceea ce nu afectează cu mult calitatea imaginii. Dacă se adoptă această valoare și se ține seama de expresia (17.25) a iluminării relative rezultă relația toleranței depărtării pătratice medii $(\overline{\Delta'^2_0})$ a suprafeței echifaze față de sfera de referință

$$K^2(\overline{\Delta'^2_0}) \leqslant 0{,}2 \rightarrow (\overline{\Delta'^2_0}) \leqslant \lambda^2/200. \tag{17.26}$$

Pentru inginerul proiectant este importantă posibilitatea determinării din această condiție a toleranțelor termenilor clasici ai aberațiilor. Alegînd sfera de referință conform condiției $\overline{\Delta}'_0 = 0$, astfel încît $y' = x' = 0$, din relațiile (17.20′) și (17.21) rezultă

$$(\overline{\Delta'^2_0}) = \frac{1}{12}d^2 + \frac{1}{6}d\cdot S_1 + \frac{4}{45}S_1^2 + \frac{3}{20}d\cdot S_2 + \frac{1}{6}S_1S_2 + \frac{9}{112}S_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{3}lc_1 + \frac{1}{8}c_1^2 + \frac{1}{4}lc_2 + \frac{1}{5}c_1c_2 + \frac{1}{12}c_2^2 + \frac{1}{6}a^2 \leqslant \lambda^2/200 \tag{17.27}$$

Observație. Fiecare termen al relației (17.27) a fost obținut în urma calculării mediei $(\Delta_0'^2) = \int_{\Sigma'} \Delta'^2 \, ds - (\int_{\Sigma'} \Delta' ds)^2$, pentru diferitele tipuri de aberații, reprezentate prin termenii expresiei (17.21).

Exemple de calcul al toleranțelor:

a) *Defect de punere la punct.* Din relația (17.27) rezultă

$$\frac{1}{12} d^2 \leqslant \lambda^2/200 \rightarrow d \lesssim \lambda/4.$$

Se regăsește, așadar, regula lui Rayleigh pentru un sistem optic stigmatic.

b) *Aberația sferică de ordinul 3.* În relația (17.27) aberația sferică de ordinul 3 este reprezentată de termenii care conțin S_1; se urmărește punerea la punct optimă, astfel încît

$$\frac{1}{12} d^2 + \frac{1}{6} d \cdot S_1 + \frac{4}{45} S_1^2 \Rightarrow \text{minim}.$$

Aceasta are loc pentru $d = -S_1$, adică punerea la punct se face în centrul sferei de referință care trece pe la marginea suprafeței de undă afectată de aberația sferică (fig. 17.16).

În cadrul opticii geometrice, la studiul aberației de sfericitate s-a stabilit că cea mai bună punere la punct corespunde mijlocului segmentului axial care reprezintă aberația sferică longitudinală. În acest caz, din condiția (17.27) se obține toleranța pentru aberația de sfericitate: $S_1 \lesssim \lambda$.

c) *Aberația sferică de ordinul 5* fiind practic dificil de redus, se urmărește determinarea aberației sferice reziduale de ordinul 3 care atenuează cel mai bine efectul termenului de ordinul 5. Mai mult decît atît, se poate urmări punerea la punct astfel încît polinomul în d, S_1, S_2 din expresia (17.27) să atingă o valoare minimă în raport cu d și S_1. Se determină

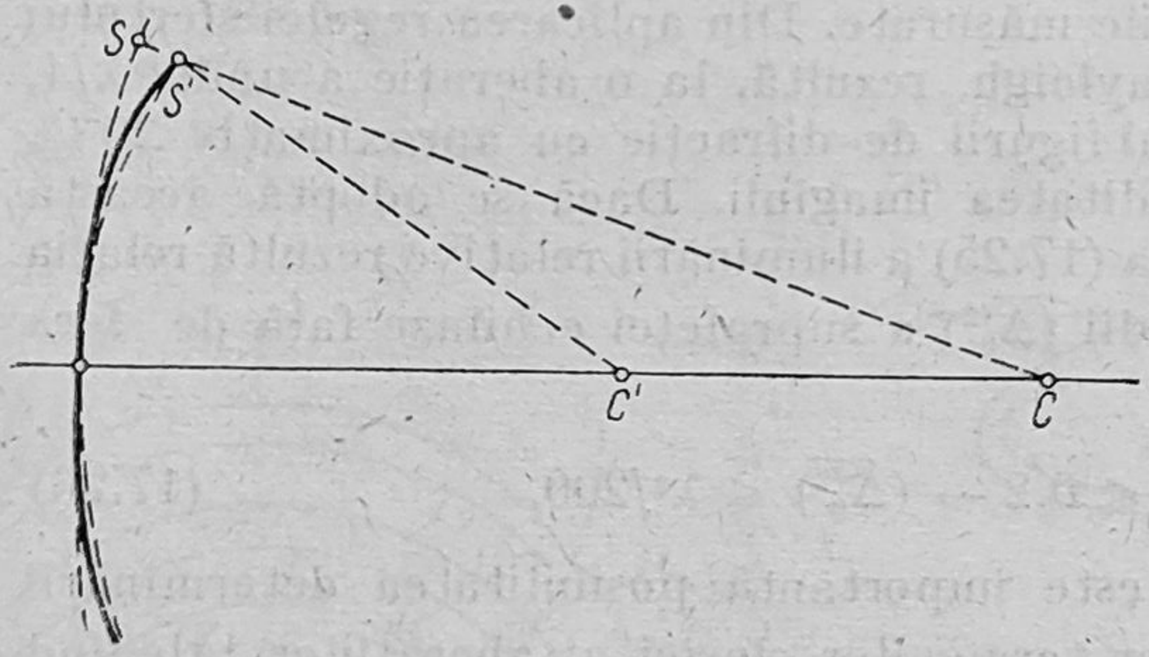


Fig. 17.16

$$d = \frac{3}{5} S_2 ; \quad S_1 = -\frac{3}{2} S_2,$$

ceea ce conduce la determinarea toleranței $S_2 \lesssim 3{,}75\,\lambda$; bineînțeles că depărtarea suprafeței de undă față de sfera de referință rămîne în general inferioară unui sfert de lungime de undă. Astfel, conform relației (17.21), aberația de undă datorită sfericității de ordinul 3 și 5 este

$$\Delta = 3{,}75\,\lambda \left(-\frac{3}{2} h^4 + h^6 \right).$$

d) *Aberația de coma.* Ca și în cazul aberației sferice se poate urmări determinarea centrului sferei de referință, utilizînd de această dată parametrul l.

Pentru coma de ordinul 3 se determină minimul polinomului pentru $l = -\frac{2}{3} c_1$. Aplicînd condiția (17,27) rezultă toleranța pentru coma de ordinul 3:

$c_1 \lesssim 0{,}6\,\lambda$. Dacă se caută compensarea cea mai bună a aberației de coma de ordinul 5 printr-un reziduu al comei de ordinul 3, se urmărește obținerea unui minim al polinomului în l, c_1, c_2 în raport cu l și c_1

$$\frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{3}lc_1 + \frac{1}{8}c_1^2 + \frac{1}{4}lc_2 + \frac{1}{5}c_1c_2 + \frac{1}{12}c_2 \Rightarrow \text{minim} \Rightarrow \begin{cases} l = \frac{3}{10}\cdot c_2 \\ c_1 = -\frac{6}{5}c_2. \end{cases}$$

Pentru aceste valori găsite, rezultă pentru coma de ordinul 5 : $c_2 \lesssim 2{,}5\,\lambda$.

e) *Astigmatism.* Punînd condiția $a^2/6 < \lambda^2/200$, rezultă : $a \lesssim 0{,}17\,\lambda$.

Se observă că toleranța pentru astigmatism este mult mai severă decît celelalte aberații. În tabelul 17.2 sînt date comparativ toleranțele diferitelor aberații, determinate pe baza condiției (17.27).

Tabelul 17.2

Aberația	Relații de legătură	Toleranța
Defect de punere la punct (d)		$\lambda/4$
Sfericitate de ordinul 3 (S_1)	$d = -S_1/2$	λ
Sfericitate de ordinul 5 (S_2)	$d = (3/5)S_2$ $S_1 = -(3/2)S_2$	$3{,}75\lambda$
Coma de ordinul 3 (C_1)	$l = -2/3c_1$	$0{,}6\lambda$
Coma de ordinul 5 (C_2)	$l = (3/10)c_2$ $c_1 = -(6/5)c_2$	$2{,}5\lambda$
Astigmatism (a)		$0{,}17\lambda$

17.3. Explicarea difracțională a formării imaginilor prin sisteme optice

17.3.1. Transformarea Fourier

a) *Reprezentarea unei funcții periodice printr-o serie Fourier.* Orice funcție periodică $F(x)$ poate fi reprezentată printr-o serie de funcții sinusoidale de perioade p, $p/2$, $p/3\ldots$, frecvențele succesive fiind multiple de frecvența fundamentală $1/p$

$$F(x) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi x}{p} + b_1 \sin\frac{2\pi x}{p} + a_2 \cos 2\frac{2\pi x}{p} + \\ + b_2 \sin 2\frac{2\pi x}{p} + \ldots + a_n \cos n\frac{2\pi x}{p} + b_n \sin n\frac{2\pi x}{p}$$

unde

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{x_0}^{x_0+p} F(x)\cos n\frac{2\pi x}{p}\,dx \qquad (17.28)$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{x_0}^{x_0+p} F(x)\sin n\frac{2\pi x}{p}\,dx.$$

Exemplu. Reprezentarea printr-o serie Fourier a unei funcții *tren de impulsuri dreptunghiulare* (fig. 17.17), care ia alternativ valorile $+1$, -1 și are perioada p.

Integrînd în intervalul $-p/2\,;\ +p/2$ se obțin coeficienții $a_n = 0$, $b_n = 4/(n\pi)$, pentru n impar, și $b_n = 0$, pentru n par, funcția putînd fi pusă sub forma

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi x}{p} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{2\pi x}{p} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{2\pi x}{p} + \ldots\right).$$

În figura 17.18, a, b se poate vedea în ce mod diferiți termeni ai dezvoltării în serie contribuie la reprezentarea din ce în ce mai precisă a funcției. Curba (1) reprezintă primul termen al dezvoltării, iar curba (2) reprezintă primii trei termeni, apropiindu-se mai mult de forma funcției $F(x)$.

Reprezentînd în abscisă frecvențele $\nu = n/p$ și în ordonată coeficienții diferiților termeni sinusoidali raportați la coeficientul frecvenței fundamentale $1/p$ (fig. 17.18, c)

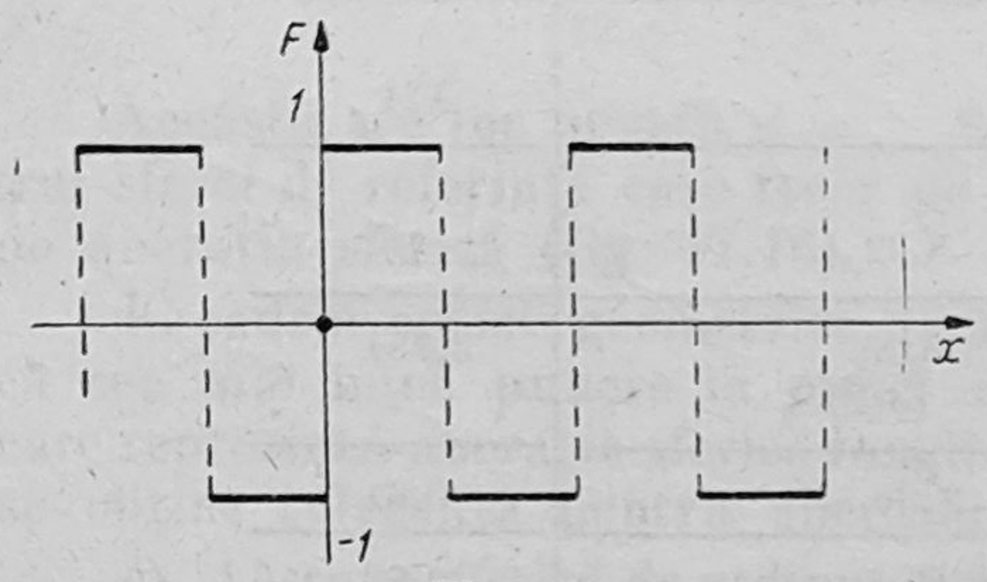


Fig. 17.17

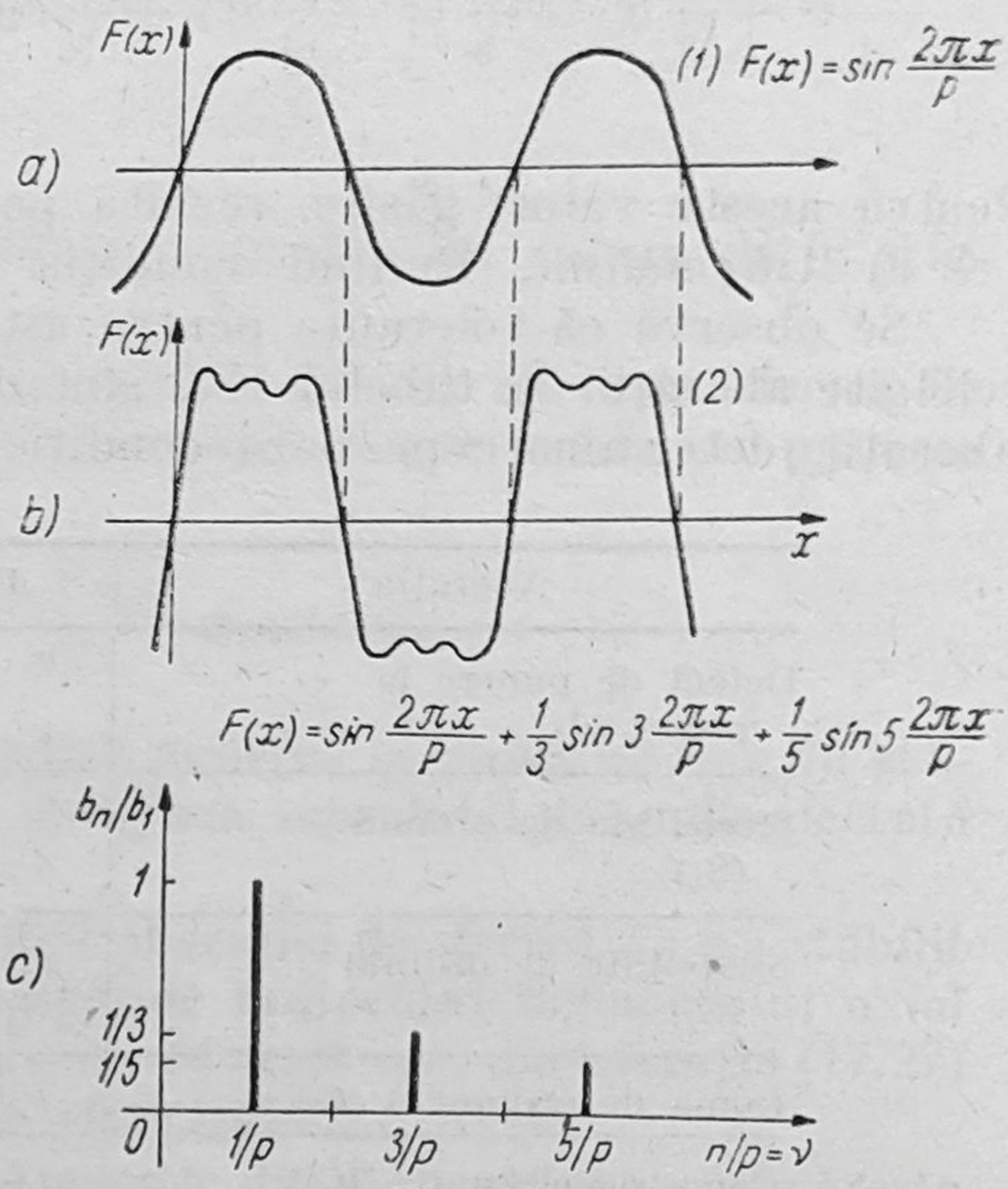


Fig. 17.18

se obține un ansamblu discontinuu de semnale, denumit *spectrul funcției* $F(x)$. Valorile ordonatelor indică importanța fiecărei frecvențe în spectrul lui $F(x)$.

b) *Reprezentarea unei funcții oarecare printr-o integrală Fourier.* Dacă funcția $F(x)$ nu este periodică, reprezentarea ei printr-o serie Fourier se poate face considerînd $p \to \infty$, astfel încît, utilizînd notația $\omega = 2\pi\nu = 2\pi n/p$, se obține

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x\,;\quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x$$

$$F(x) = 2\int_0^{\infty}[a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]\,\mathrm{d}\omega. \tag{17.29}$$

În calculele fenomenelor de difracție utilizarea notațiilor complexe este mai avantajoasă ; înlocuind în expresiile (17.29) funcțiile trigonometrice cu formule Euler, se obține

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\exp(\mathrm{i}\omega x)\,\mathrm{d}x = a(\omega) + \mathrm{i}b(\omega)$$

$$f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\exp(-\mathrm{i}\omega x)\,\mathrm{d}x = a(\omega) - \mathrm{i}b(\omega) \tag{17.30}$$

$$F(x) = \int_0^{+\infty}[f(\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega x) + f(-\omega)\exp(\mathrm{i}\omega x)]\mathrm{d}\omega.$$

Variind convențional frecvența ω între $-\infty$ și $+\infty$, se poate scrie

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(i\omega x)\, dx \equiv \mathcal{T}(F)$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp(-i\omega x)\, d\omega \equiv \mathcal{T}^{-1}(f). \tag{17.31}$$

Aceste două expresii definesc transformarea Fourier, ele avînd roluri simetrice : una este spectrul celeilalte.

Teorema lui Parseval. Fie funcțiile $F(x)$ și $G(x)$ și transformatele Fourier corespunzătoare $f(u)$ și $g(u)$. Se caută transformata produsului $F(x)G(x)$, care conform (17.31) este

$$\mathcal{T}(FG) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)G(x) \exp(iux)\, dx$$

Înlocuind $F(x)$ prin transformata $\mathcal{T}^{-1}[f(\omega)]$ și, apoi, inversînd ordinea integrării se obține

$$\mathcal{T}(FG) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \exp(iux)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \exp(-i\omega x)d\omega\right] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \exp(i(u-\omega)x)\, dx\right]d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)g(u-\omega)d\omega.$$

Așadar, transformata produsului $F(x)G(x)$ se exprimă prin operația de convoluție între transformatele f și g (teorema lui Parseval). Este ușor de arătat că operația de convoluție este comutativă astfel încît

$$\mathcal{T}(FG) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)g(u-\omega)d\omega \equiv f \otimes g =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)f(u-\omega)d\omega \equiv g \otimes f \tag{17.32}$$

Cu ajutorul acestei teoreme se poate determina transformata pătratului modulului lui $F(x)$, făcînd $G(x) \equiv F^*(x)$, conjugata imaginară a funcției $F(x)$

$$\mathcal{T}[|F(x)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)f^*(\omega - u)\, d\omega \tag{17.33}$$

deoarece pentru $G(x) \equiv F^*(x)$ rezultă între transformate : $g(u) = f^*(-u)$.

Cazul funcțiilor de două variabile. Rezultatele precedente se generalizează pentru funcțiile de două variabile x, y

$$f(\omega_x, \omega_y) = \int F(x, y) \exp[i(\omega_x x + \omega_y y)]\, dx\, dy \equiv \mathcal{T}[F(x, y)]$$
$$F(x, y) = \iint f(\omega_x, \omega_y) \exp[-i(\omega_x x + \omega_y y)]\, d\omega_x d\omega_y \equiv \mathcal{T}^{-1}[f(\omega_x, \omega_y)] \tag{17.34}$$

Teorema lui Parseval pentru funcţii de două variabile :

$$\mathcal{T}(FG) = \int F(x,\ y)\cdot G(x,\ y)\ \exp\left[\mathrm{i}(\omega_{0x}x + \omega_{0y}y)\right]\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y =$$

$$= \begin{cases} \iint f(\omega_x,\ \omega_y)g(\omega_{0x} - \omega_x,\ \omega_{0y} - \omega_y)\ \mathrm{d}\omega_x\ \mathrm{d}\omega_y = f \otimes g \\ \iint f(\omega_{0x} - \omega_x,\ \omega_{0y} - \omega_y)g(\omega_x,\ \omega_y)\ \mathrm{d}\omega_x\ \mathrm{d}\omega_y = g \otimes f \end{cases} \tag{17.35}$$

$$\mathcal{T}[|\ F(x,\ y)\ |^2] = \begin{cases} \int f(\omega_x + \omega_{0x},\ \omega_y + \omega_{0y})f^*(\omega_x,\ \omega_y)\ \mathrm{d}\omega_x\ \mathrm{d}\omega_y \\ \int f(\omega_x,\ \omega_y)f^*(\omega_x - \omega_{0x},\ \omega_y - \omega_{0y})\ \mathrm{d}\omega_x\ \mathrm{d}\omega_y. \end{cases} \tag{17.36}$$

17.3.2. Reinterpretarea principiului lui Huygens

Reluînd ecuaţia (17.17), care reprezintă principiul lui Huygens pentru sisteme optice cu deschideri medii, se constată că ea se identifică cu transformarea Fourier : dacă se consideră sistemul optic ideal (lipsit de aberaţii, adică $\Delta = 0$), ceea ce duce la : $\Delta' = -(X'x' + Y'y')$ şi dacă se fac schimbările de variabile :

$$x \to x' \ ;\ \nu_x = \omega_x/(2\pi) = X'/\lambda' \ ;\ 2\pi/\lambda' = K'$$

$$y \to y' \ ;\ \nu_y = \omega_y/(2\pi) = Y'/\lambda'$$

se pot scrie relaţiile care definesc transformarea Fourier

$$f_{\Sigma'}(X',\ Y') = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda' R'}\int F(x',\ y')\ \exp\left[\mathrm{i}K'(X'x' + Y'y')\right]\mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y' \tag{17.37}$$

$$F(x',\ y') = \frac{\mathrm{i}R'}{\lambda'}\int f_{\Sigma'}(X',\ Y')\ \exp\left[\mathrm{i}K'(X'x' + Y'y')\right]\mathrm{d}X'\ \mathrm{d}Y'. \tag{17.37'}$$

Relaţiile (17.36) devin

$$\int |\ F(x',\ y')\ |^2\ \exp\left[\mathrm{i}K'(X_0x' + Y_0y')\right]\mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y' =$$

$$= \begin{cases} R'^2\int f_{\Sigma'}(X' + X_0,\ Y' + Y_0)f^*_{\Sigma'}(X',\ Y')\ \mathrm{d}X'\ \mathrm{d}Y' \\ R'^2\int f_{\Sigma'}(X',\ Y')f^*_{\Sigma'}(X' - X_0,\ Y' - Y_0)\ \mathrm{d}X'\ \mathrm{d}Y' \end{cases} \tag{17.38}$$

sau, mai bine, sub forma general simetrică

$$R'^2\int f_{\Sigma'}(X' + X_0/2,\ Y' + Y_0/2)f^*_{\Sigma'}(X' - X_0/2,\ Y' - Y_0/2)\ \mathrm{d}X'\ \mathrm{d}Y'.$$

Transformarea Fourier legată de formarea imaginii poate fi interpretată astfel :

— fiind dată repartiţia de amplitudine complexă $f_{\Sigma'}(X',\ Y')$ pe suprafaţa echifază Σ', emergentă dintr-un sistem optic, ecuaţia (17.37') dă structura fenomenului de difracţie din imaginea sursei punctiforme prin sistemul optic considerat ;

— invers, dacă se cunoaşte structura fenomenului de difracţie $F(x',\ y')$ din planul imagine, se poate determina cu ecuaţia (17.37) structura suprafeţei echifază Σ' care a produs imaginea respectivă.

17.3.3. Formarea imaginilor obiectelor extinse iluminate necoerent

După studierea formării imaginii de difracţie a unui punct izolat, pentru a putea aprecia calitatea imaginii, gradul de asemănare a acesteia cu obiectul, contrastul etc., este necesar de a stabili legile generale ale formării imaginii unui obiect extins. Problema pare relativ simplă : se suprapun iluminările produse de fiecare punct al obiectului pentru a obţine repartiţia globală a iluminării în planul imagine. Această însumare este justificată în condiţiile iluminării necoerente a obiectului (diferite elemente ale obiectului emit oscilaţii luminoase necoerente între ele, adică neprezentînd nici o legătură permanentă de fază), verificate de majoritatea sistemelor optice (aparatură optică de observare, lunete, obiective foto, spectrometre etc.). Dar există sisteme optice (microscopul şi unele tipuri de obiective de proiecţie) la care obiectul este iluminat de către o sursă auxiliară, oscilaţiile luminoase emise de diferite puncte ale obiectului nefiind perfect independente : iluminarea se numeşte parţial coerentă, relaţiile care definesc formarea imaginii trebuind să ţină seama de aceasta.

Se consideră un sistem optic care formează în planul $x'A'y'$ imaginea unui obiect situat în planul xAy (fig. 17.19) şi $B(x, y)$, $B'(\beta x, \beta y)$ două puncte conjugate din planele respective, β reprezentînd mărirea sistemului optic. Dacă $E(x', y')$ reprezintă repartiţia iluminării în planul imagine în cazul unui punct obiect luminos plasat în A (ţinînd seama de difracţie şi de influenţele aberaţiilor) şi dacă sistemul optic poate fi presupus izoplanetic (aberaţiile nu variază foarte repede către marginile cîmpului), atunci imaginea punctului $B(x, y)$ va fi reprezentată de repartiţia iluminării în jurul lui

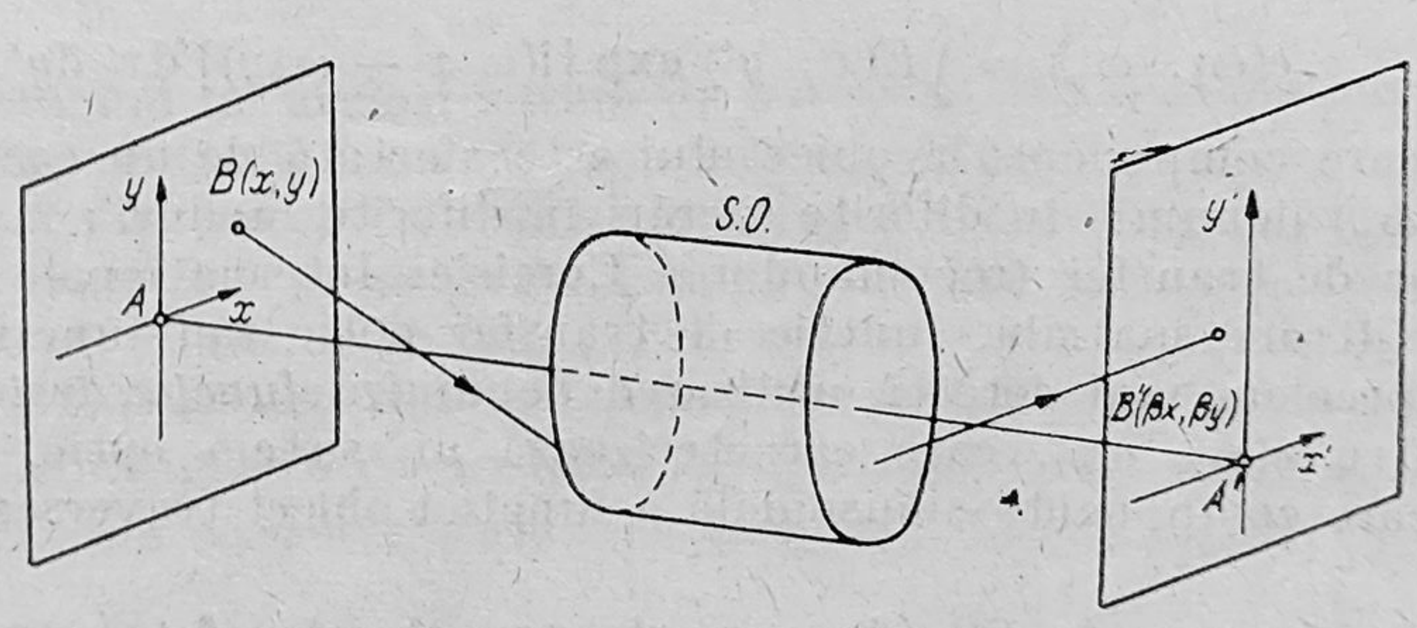


Fig. 17.19

$B'(\beta x, \beta y) : E(x' - \beta x, y' - \beta y)$, care este de forma dată de relaţia (17.5). Dacă repartiţia iluminării în planul obiect este $O(x, y)$, rezultă distribuţia iluminării în planul imagine $I(x', y')$ ca suma iluminărilor produse de imaginile diferitelor puncte

$$I(x', y') = \int O(x, y) \cdot E(x' - \beta x, y' - \beta y)\, dx\, dy \qquad (17.39)$$

ceea ce reprezintă operaţia de convoluţie : $I = O \otimes E$.

Relația (17.39) descrie procesul de formare a imaginii cînd elementele obiectului emit oscilații luminoase perfect necoerente. Se va vedea că un astfel de proces liniar se traduce într-o formă mult mai simplă utilizînd transformarea Fourier, ceea ce va permite considerarea unui sistem optic ca filtru de frecvențe spațiale.

17.3.4. Transmiterea frecvențelor spațiale printr-un sistem optic în cazul iluminării necoerente

Funcția de transfer optic. Aplicînd transformarea Fourier repartiției iluminării $O(x, y)$ rezultă că această repartiție poate fi considerată ca o suprapunere de o infinitate de variații sinusoidale, fiecare fiind caracterizată prin: direcție (determinată de ω_x, ω_y), frecvență spațială (modulul $[\nu_x^2 + \nu_y^2]^{1/2}$), amplitudine și fază.

Pentru a cunoaște modul în care un sistem optic transmite diferitele componente sinusoidale, trebuie făcută analiza armonică a imaginii, adică a determina transformata Fourier (i) a distribuției iluminării în planul imagine (I). Aplicînd teorema lui Parseval din expresia (17.39) se deduce că transformata Fourier a distribuției iluminării în planul imagine este egală cu produsul transformatei funcției obiect și a transformatei funcției imagine a unui punct izolat, adică

$$i(\omega_x, \omega_y) = o(\omega_x, \omega_y)e(\omega_x, \omega_y) \tag{17.40}$$

unde

$$i(\omega_x, \omega_y) = \int I(x', y') \exp [i(\omega_x x' + \omega_y y')] \, dx' \, dy'$$

$$o(\omega_x, \omega_y) = \int O(x, y) \exp [i(\omega_x x + \omega_y y)] \, dx \, dy \tag{17.40'}$$

$$e(\omega_x, \omega_y) = \int E(x', y') \exp [i(\omega_x x + \omega_y y)] \, dx' \, dy'.$$

Așadar, fiecare componentă a obiectului este afectată de un coeficient complex $e(\omega_x, \omega_y)$ denumit în diferite lucrări în diferite moduri: factor de contrast, factor de transfer (recomandarea Comisiei Internaționale de Optică), funcție de filtrare spațială, funcție de transfer optic sau funcție optică de transfer. Apreciem mai corectă utilizarea denumirii *funcție de transfer optic (FTO)* pentru $e(\omega_x, \omega_y)$, care caracterizează un sistem optic, indicînd în ce mod fiecare componentă sinusoidală a funcției obiect traversează sistemul optic.

Fie un sistem optic SO (de exemplu, un obiectiv foto) care formează imaginea unui obiect periodic necoerent situat în focarul colimatorului C, distribuția iluminării obiectului fiind dată de funcția *tren de impulsuri*

$$O(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin \frac{2\pi x}{p} + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{2\pi x}{p} + \ldots\right). \tag{17.41}$$

Imaginea obiectului se formează în focarul F_2' al sistemului optic (fig. 17.20. Problema care se pune este de a determina cum sînt transmise prin sistemul optic diferitele frecvențe spațiale: $1/p$, $3/p$, $5/p$ etc. Alegînd ca variabilă frecvența spațială $\nu = X/(\lambda s)$, transformata Fourier a funcției obiect este: $o(\nu) = \int O(x) \exp [i2\pi\nu x] \, dx$. Dacă obiectivul este diafragmat de o fantă

(ca în figura 17.20), transformata Fourier a funcției $E(x')$, care reprezintă iluminarea în planul imaginii produsă de un punct obiect luminos, este reprezentată de două drepte (fig. 17.21, a); unghiul $2\sigma_0' = 2X_0/s$ reprezintă deschiderea obiectivului ($2X_0$ este lățimea fantei, iar s distanța la care se așează fanta față de obiectiv).

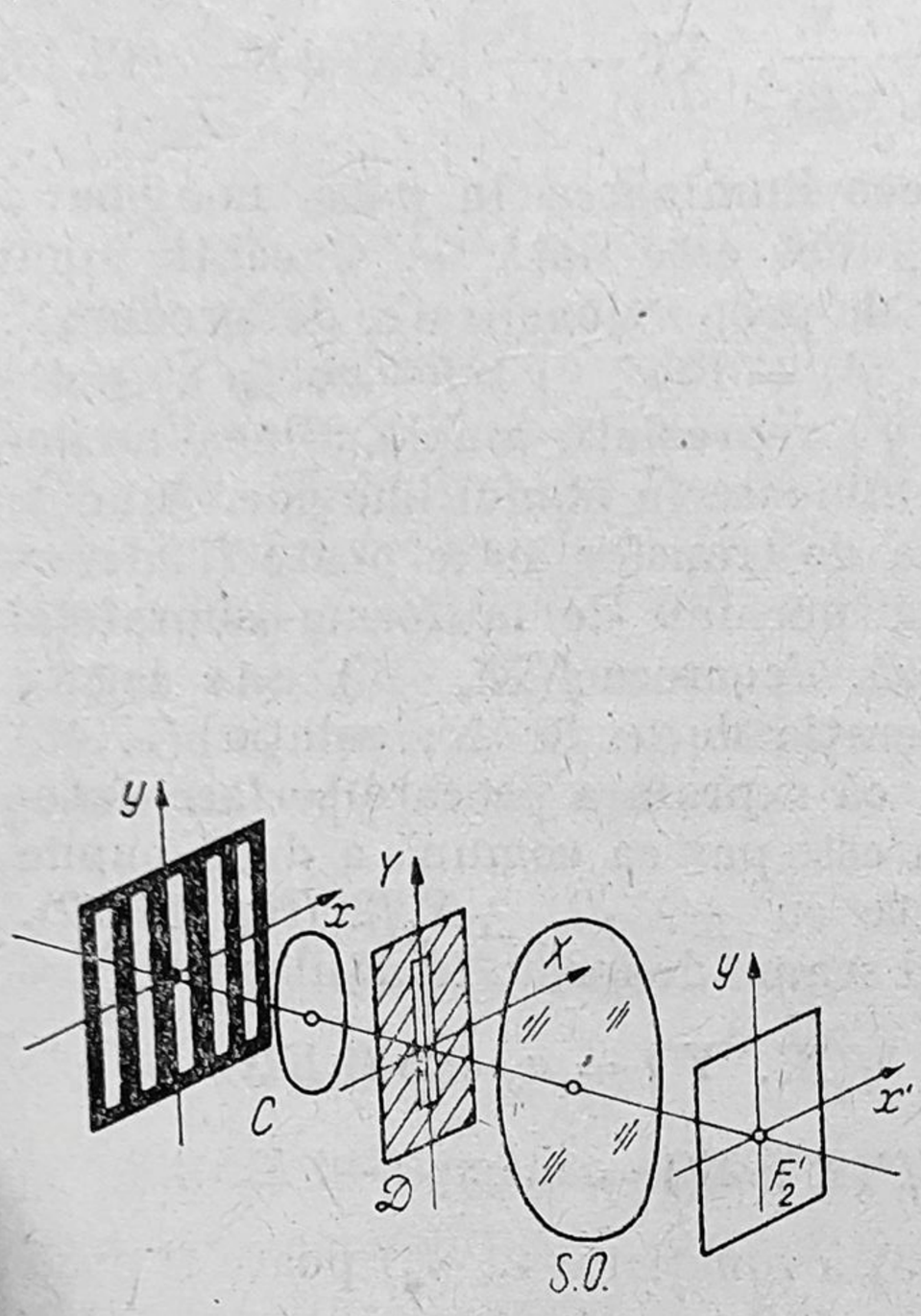


Fig. 17.20

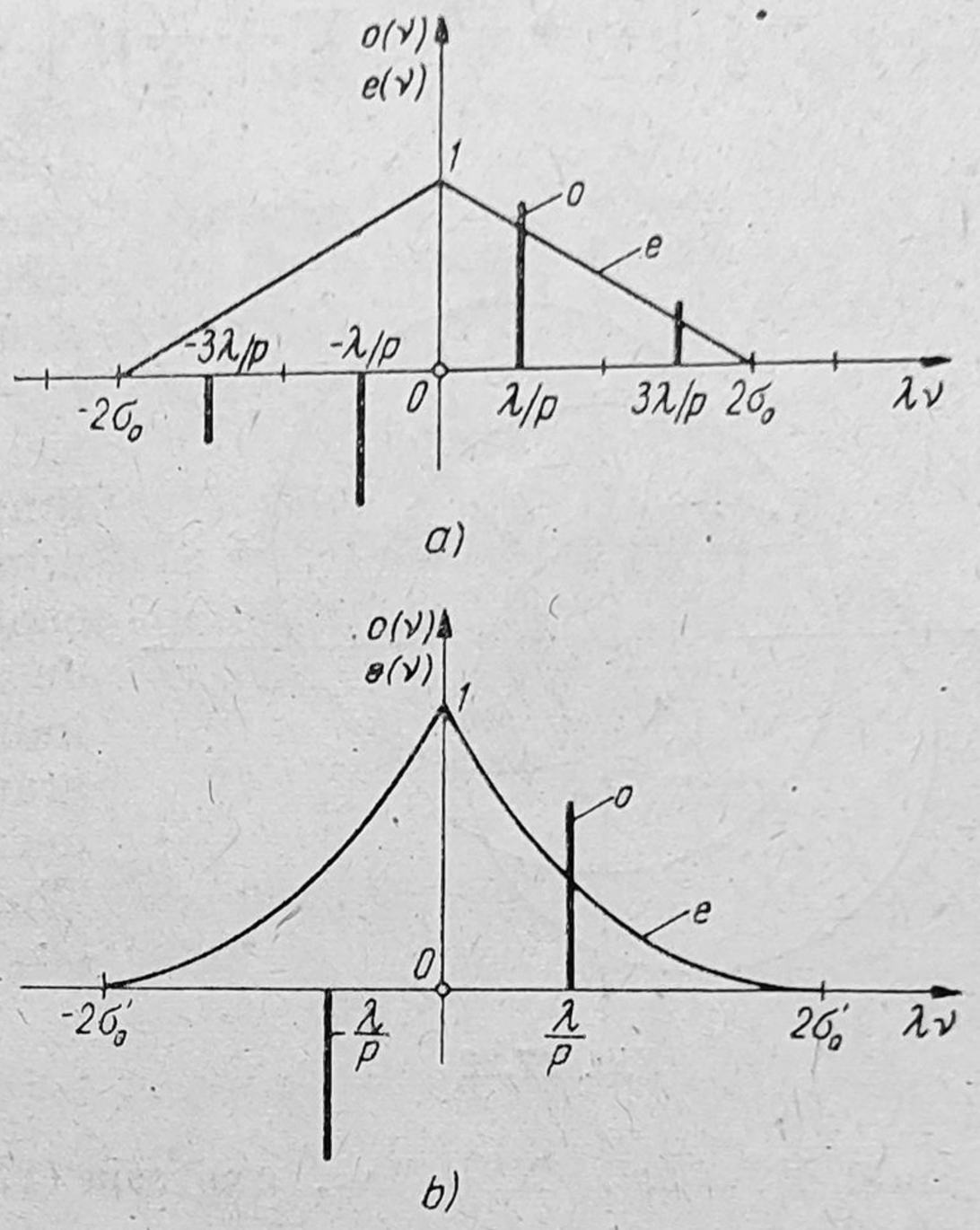


Fig. 17.21

Reprezentînd pe același sistem de axe graficele transformatelor Fourier $e(\nu)$ și $o(\nu)$ în funcție de frecvența spațială amplificată cu λ, $\lambda\nu = X/R$ — ceea ce reprezintă din punct de vedere matematic un unghi de difracție a unei rețele de frecvență ν — se poate înțelege imediat filtrajul frecvențelor spațiale printr-un sistem optic (fig. 17.21, a): frecvențele $1/p$ și $3/p$ sînt transmise, cu o atenuare, dar frecvențele superioare lui $5/p$ nu mai sînt transmise (obiectivul se comportă ca un filtru de frecvențe *trece-jos*). Cazul limită este atins atunci cînd sistemul optic lasă să treacă numai primul termen

$$\lambda/p = 2\sigma_0' \rightarrow \frac{1}{p} = \frac{2\sigma_0'}{\lambda} \tag{17.42}$$

ceea ce reprezintă frecvența limită transmisă printr-un sistem optic. Dacă obiectivul este diafragmat de o deschidere circulară (cazul cel mai frecvent) transformatele Fourier sînt reprezentate în figura 17.21, b. Aberațiile sistemului optic modifică curba $e(\nu)$, care reprezintă funcția de transfer optic și care arată în ce mod diferitele frecvențe spațiale ale obiectivului sînt transmise prin sistem. Așadar, un sistem optic este caracterizat de funcția sa de transfer și nu numai prin noțiunea foarte subiectivă de limită de rezoluție.

În cazul repartiției bidimensionale a iluminării în planul obiect, expresia generală a funcției de transfer rezultă din relația (17.38) de autocorelație a lui $F(x', y')$

$$e(\nu_x, \nu_y) = \int |F(x', y')|^2 \exp[i2\pi(\nu_x x' + \nu_y y')]\, dx'\, dy' =$$

$$= \int f\left(X' + \frac{X_0}{2}, \quad Y' + \frac{Y_0}{2}\right) f^*\left(X' - \frac{X_0}{2}, \quad Y' - \frac{Y_0}{2}\right) dX'\, dY' \quad (17.43)$$

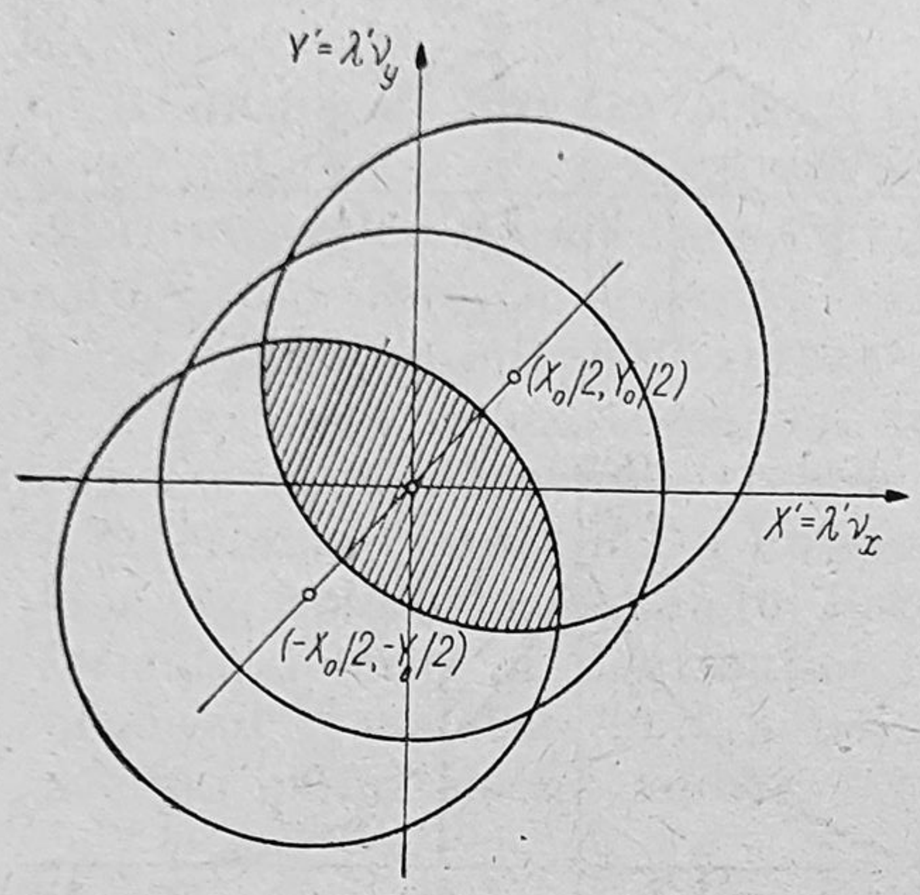


Fig. 17.22

deoarece iluminarea în pata imagine a unui punct este dată, cu excepția unui factor de proporționalitate, de produsul: $E(x', y') = F(x', y') \cdot F^*(x', y')$, unde $F(x', y')$ reprezintă amplitudinea oscilației luminoase în planul imagine. Așadar, funcția de transfer optic poate fi determinată pornind de la forma suprafeței echifază, deoarece $f(X', Y')$ este legată de aberația de undă Δ; relația (17.43) indică că suprafața pe care se face integrarea este partea comună a două pupile decalate cu $\pm X_0/2$, $\pm Y_0/2$ (fig. 17.22). Ținînd seama de forma funcțiilor

$$f(X', Y') = a_0 \exp(i K\Delta)$$

$$f^*(X', Y') = a_0 \exp(-i K\Delta),$$

unde $Y' = \lambda\nu_y$, $X' = \lambda\nu_x$, expresia (17.43) a funcției $e(\nu_x, \nu_y)$ poate fi pusă sub forma

$$e(X', Y') = R^2 \cdot \int \exp(i K\delta)\, dX'\, dY' \quad (17.44)$$

unde

$$\delta(X', Y', X_0, Y_0) = \Delta\left(X' + \frac{X_0}{2}, \quad Y' + \frac{Y_0}{2}\right) - \Delta\left(X' - \frac{X_0}{2} Y' - \frac{Y_0}{2}\right). \quad (17.45)$$

În cazul aberațiilor mici, integrala (17.44) poate fi calculată cu aproximație bună, utilizînd dezvoltarea în serie Taylor

$$e(X', Y') \simeq R^2 \int \left(1 + iK\delta - \frac{1}{2} K^2\delta^2\right) dX'\, dY' =$$

$$= R^2 \mathcal{A}[1 + iK\bar{\delta} - K^2(\bar{\delta^2})/2], \quad (17.46)$$

unde

$$\mathcal{A} = \int dX'\, dY'.$$

Funcția de transfer optic este, în această aproximație, o mărime complexă de modul și, respectiv, argument

$$|e(X', Y')| = R^2 \mathcal{A}\left[1 - \frac{K^2}{2}((\bar{\delta^2}) - (\bar{\delta})^2)\right] \quad (17.47)$$

$$\theta(X', Y') = K\bar{\delta}.$$

Se observă că în prezența aberațiilor modulul funcției de transfer suferă o micșorare relativă egală cu : $[(\overline{\delta^2}) - (\overline{\delta})^2]K^2/2$

Punînd condiția ca această micșorare să fie mai mică decît 20% și înlocuind $K = 2\pi/\lambda$, se determină relația pentru toleranța generală a aberației de undă

$$(\overline{\delta^2}) - (\overline{\delta})^2 \leqslant \frac{\lambda^2}{10\pi^2} \simeq \lambda^2/100. \qquad (17.48)$$

Această relație generală permite determinarea valorii maxime a unei aberații pentru o anumită frecvență spațială care trebuie transmisă prin sistemul optic. Însă, în cele mai multe cazuri practice, se studiază modul de transmitere a frecvențelor mult inferioare frecvenței maxime (limită) transmise prin sistemul optic. De exemplu, un obiectiv foto avînd deschiderea $f'/2$ asigură, conform relației (17.42), transmiterea unei frecvențe spațiale maxime : $\nu_{max} = 2\sigma'_0/\lambda = 1\,000$ mm^{-1} pentru $\lambda = 0{,}5$ μm. Dar emulsiile fotografice obișnuite nu permit înregistrarea frecvențelor superioare la 100—200 mm^{-1}, astfel încît un obiectiv foto este studiat pentru frecvențele cuprinse între [0 ; 100] mm^{-1}.

17.3.5. Determinarea funcției de transfer optime a unui sistem optic

S-a stabilit că între obiect și imaginea furnizată de un sistem optic există relația de convoluție (17.39) : $I = O \otimes E$, iar între transformatele Fourier relația de *filtraj spațial* (17.40) : $i = o \cdot e$. Studiul calității imaginii (asemănarea cu obiectul) se poate face din două puncte de vedere :

a) *Global.* Se alege drept criteriu de calitate media pătratică a aberației de undă. Funcția de transfer optic, $e(X', Y')$ sau $e(\nu_x, \nu_y)$, considerată optimă din punctul de vedere al acestui criteriu clasic, este constantă în domeniul finit (deschiderea pupilară) : în acest caz, dacă obiectul nu conține frecvențe spațiale superioare frecvenței maxime transmise prin sistemul optic, imaginea este analogă obiectului.

b) *Local.* Se studiază diferența între funcția obiect și funcția imagine în fiecare punct al imaginii, pornind de la repartiția iluminării în jurul unui punct imagine $E(x', y')$. Pentru a simplifica problema se consideră repartiția unidimensională (x) ; ținînd seama de relația (17.39) și de comutativitatea operației de convoluție (teorema lui Parseval) exprimată prin relația (17.32), rezultă imaginea

$$I(x') = O \otimes E = \int_{-\infty}^{+\infty} O(x' - \beta x)E(x) \cdot dx \qquad (17.49)$$

iar diferența între imagine și obiect este dată de integrala

$$I - O = \int_{-\infty}^{+\infty} [O(x' - \beta x) \cdot O(x')E(x)\, dx. \qquad (17.50)$$

Deci, diferența între imagine și obiect depinde de :

— regularitatea obiectului în regiunea în care $E(x)$ este maximă ;

— viteza cu care descreşte $E(x)$ în celelalte regiuni.

Forma optimă a funcției de transfer depinde de criteriul ales pentru aprecierea calității imaginii :

— În cazul în care se alege diferența pătratică medie minimă între I și O, funcția de transfer optimă este constantă pentru un domeniu finit și nulă în afară (ca și în cazul criteriului global). Alegerea acestui criteriu devine necorespunzătoare dacă obiectul prezintă variații rapide ale iluminării.

— În cazul în care se alege cea mai bună calitate posibilă, $(I - O)_{min}$, în fiecare punct este necesar să se suprime punctele unghiulare ale funcției $\varepsilon(\nu)$, pentru a asigura continuitatea derivatei întîi $\varepsilon'(\nu)$.

17.3.6. Transmiterea frecvențelor spațiale prin sisteme optice, în cazul iluminării coerente

În general există două tipuri de iluminare a obiectului, reprezentate schematic în figura 17.23 :

a) imaginea unei surse, de exemplu o lampă cu filament, se formează în planul obiectului sau în vecinătatea acestuia (sistemul este utilizat la aparatele de proiecție) ; în acest caz iluminarea este necoerentă.

b) cînd sursa, de dimensiuni reduse, este plasată în focarul obiect $\bar{F}_K$ al condensorului se obține un fascicul paralel, iluminarea asigurînd ceea ce se numește *coerență transversală* în tot cîmpul obiect.

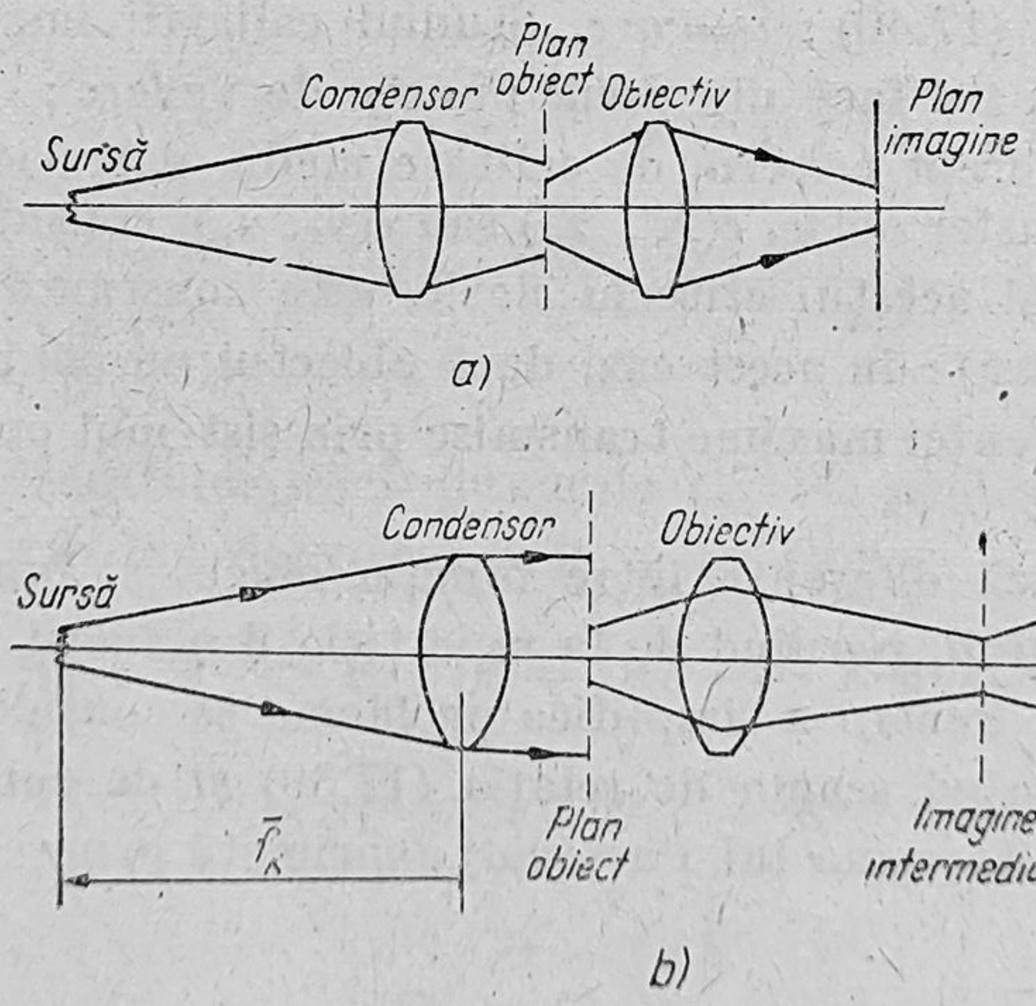


Fig. 17.23

În ipoteza iluminării obiectului de o sursă unică punctiformă vibrațiile optice emise de diferite puncte ale obiectului prezintă diferențe de fază constante în timp. Este cazul microscopului atunci cînd se diafragmează puternic condensorul. Pentru a studia repartiția energetică în planul imagine este

necesar să se însumeze amplitudinile oscilațiilor luminoase provenind din fiecare punct și nu iluminările, ca în cazul iluminării necoerente. Folosind notațiile precedente, $f(x' - \beta x\,;\ y' - \beta y)$ este repartiția amplitudinilor produsă de un punct obiect (x, y). De asemenea, trebuie ținut seama de factorul de transmisie a amplitudinii și de defazajele introduse de obiect (ca de exem-

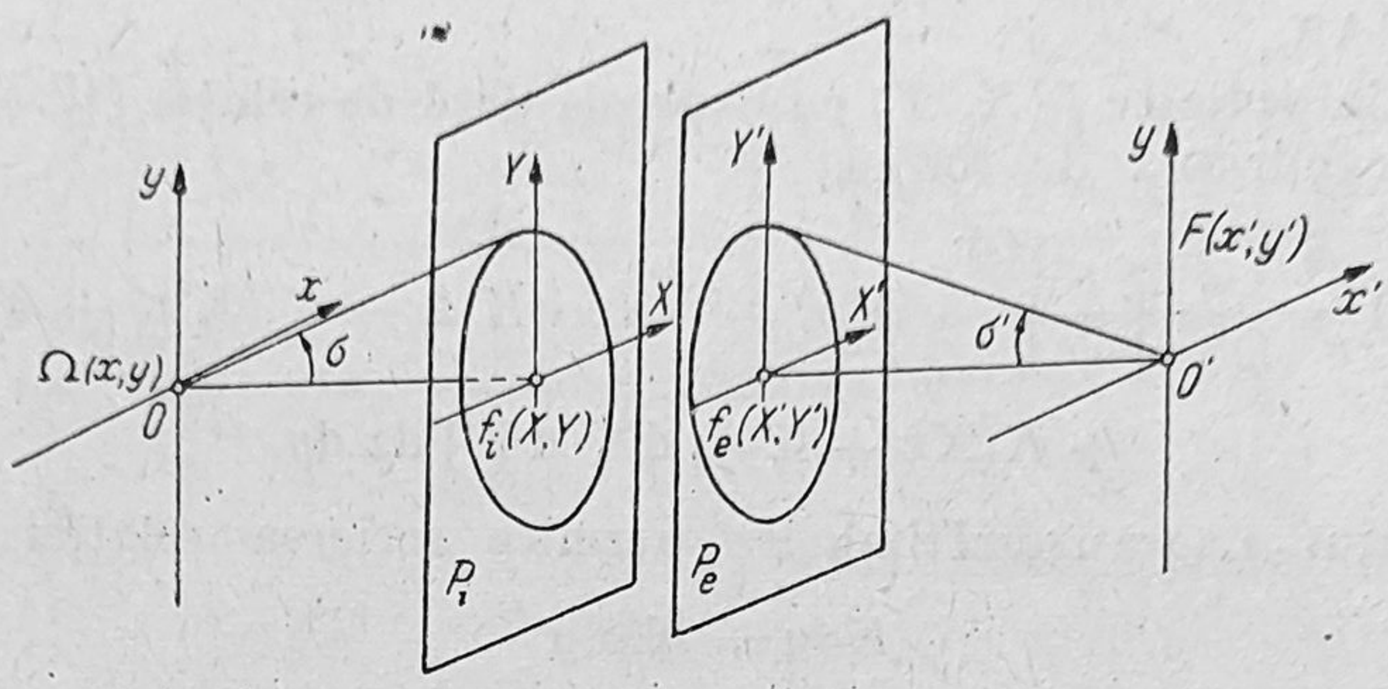


Fig. 17.24

plu pentru obiectele de fază), reprezentate prin factorul de transmisie complex $\Omega(x, y)$ care caracterizează obiectul. Repartiția amplitudinilor oscilațiilor luminoase în planul imagine rezultă în urma însumării contribuțiilor $f(x' - \beta \cdot x\,;\ y' - \beta \cdot y)$ amplificate cu $\Omega(x, y)$

$$F(x'\ y') = \int f(x' - \beta x\,;\ y' - \beta y)\Omega(x\,;\ y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (17.51)$$

Relația (17.51) necesită explicații mai detaliate asupra procesului de formare a imaginii, care se datorează unei duble difracții : obiectul fiind coerent, unda se va difracta în pupila de intrare, iar imaginea va fi rezultatul unei a doua difracții datorate pupilei de ieșire (fig. 17.24).

Dacă $\Omega(x, y)$ este repartiția amplitudinilor complexe în planul obiect, repartiția amplitudinilor pe o sferă de rază R, care se sprijină pe deschiderea pupilei de intrare, este dată de relația (17.37) aplicată în spațiul obiect

$$f_i(X,\ Y) = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda R}\int\Omega(x,\ y)\exp\left[\mathrm{i}K(Xx + Yy)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (17.52)$$

Structura undei din pupila de intrare se transferă în pupila de ieșire ținînd seama de aberațiile sistemului optic, caracterizate prin aberația de undă $n'\Delta$ (n' este indicele de refracție al spațiului imagine, iar Δ deformația suprafeței echifază) și, de asemenea, de conservarea fluxului luminos transmis prin sistemul optic

$$[n \mid f_i^2 \mid \sigma^2 R^2 = n' \mid f_e^2 \mid \sigma'^2 R'^2 \qquad (17.53)$$

unde $\pi\sigma^2R^2$ reprezintă suprafața sferei obiect care se sprijină pe pupila de intrare, iar $\pi\sigma'^2R'^2$ suprafața sferei corespondente din spațiul imagine. Rezultă structura undei imagine care se sprijină pe pupila de ieșire

$$f_e(X',\ Y') = \left(\frac{n}{n'}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sigma R}{\sigma' R'}f_i(X,\ Y)\exp\left(\mathrm{i}K'\Delta\right). \qquad (17.54)$$

Variabilele X', Y' intervin în expresia lui Δ, dar și în expresia $f_i(X, Y)$ deoarece raportul $X'/X = Y'/Y$ reprezintă mărirea sistemului între pupila de intrare și pupila de ieșire. Distribuția amplitudinii în planul imagine se determină aplicînd relația (17.37')

$$F(x', y') = \frac{iR'}{\lambda'} \int f_i(X, Y) \exp [-iK'(X'x' + Y'y')] \, dX' \, dY'. \qquad (17.55)$$

Dacă se înlocuiește $f_i(X, Y)$ cu expresia dată de relația (17.52) se obține o integrală cvadruplă de forma

$$F(x', y') = \frac{\sigma}{\lambda\lambda'\sigma'} \left(\frac{n}{n'}\right)^{1/2} \int \Omega(x, y)[\exp i(K'\Delta - K'(X'x' + Y'y') + K(Xx + Yy)) \, dX' \, dY'] \, dx \, dy. \qquad (17.56)$$

Invariantul Lagrange-Helmholtz permite scrierea relației

$$K\sigma y = K'\sigma' y' \qquad (17.57)$$

ținînd seama de relația între lungimile de undă în spațiul obiect și spațiul imagine $n\lambda = n'\lambda'$. Introducînd relația (17.57), integrala în funcție de X', Y' din relația (17.55) capătă forma repartiției amplitudinilor produse de un punct obiect $(x, y) : f(x' - \beta x ; y' - \beta y)$, unde β reprezintă mărirea transversală a sistemului optic între planele obiect și imagine, iar relația (17.56) capătă forma simplă (17.51). Rămîne neprecizat factorul constant din fața integralei, care dă dimensiunile reale ale amplitudinilor oscilațiilor luminoase (intensitatea cîmpului electric), dar aceasta nu are nici o importanță practică, deoarece repartiția amplitudinilor se poate considera raportată la o amplitudine unitară, de referință.

Teoria lui Abbe asupra formării imaginilor printr-un microscop se bazează pe existența dublei difracții : prima are loc între obiect și pupila de intrare, iar a doua între pupila de ieșire și imagine. Deoarece fiecare dintre aceste difracții corespunde unei analize armonice, legea filtrajului spațial devine simplă :

— dacă factorul de transmisie (funcția de transfer) al sistemzlui optic este cvasiconstant, toate frecvențele spațiale corespunzătoare direcțiilor care traversează pupila de intrare sînt transmise prin sistemul optic (eventual, cu un defazaj descris de factorul exp ($i \cdot K\Delta$) din relația (17.54)) ;

— frecvențele superioare unei frecvențe limită, corespunzătoare unei direcții care nu mai trece prin pupila de intrare a sistemului optic, sînt eliminate.

Se consideră obiectul, o rețea de linii transparente și opace (mira test Abbe). După cum s-a arătat, transformata Fourier a unei astfel de repartiții energetice (fig. 17.18, b) prezintă elemente discontinue corespunzătoare frecvenței fundamentale și eventual cîteva armonici superioare. Periodicitatea structurii va fi percepută dacă direcția corespunzătoare frecvenței fundamentale trece prin pupila de intrare ; pentru aceasta este suficient ca deschiderea unghiulară σ_0 să fie superioară unghiului de difracție λ/p

$$\sigma_0 > \lambda/p. \qquad (17.58)$$

Relația generală care se referă la unghiuri σ mari și la armonici de frecvență $n\lambda/p$ este

$$n \sin \sigma_0 > n\lambda/p. \tag{17.59}$$

Așadar, frecvențele superioare frecvenței limită $\sin \sigma_0/\lambda$ nu sînt transmise.

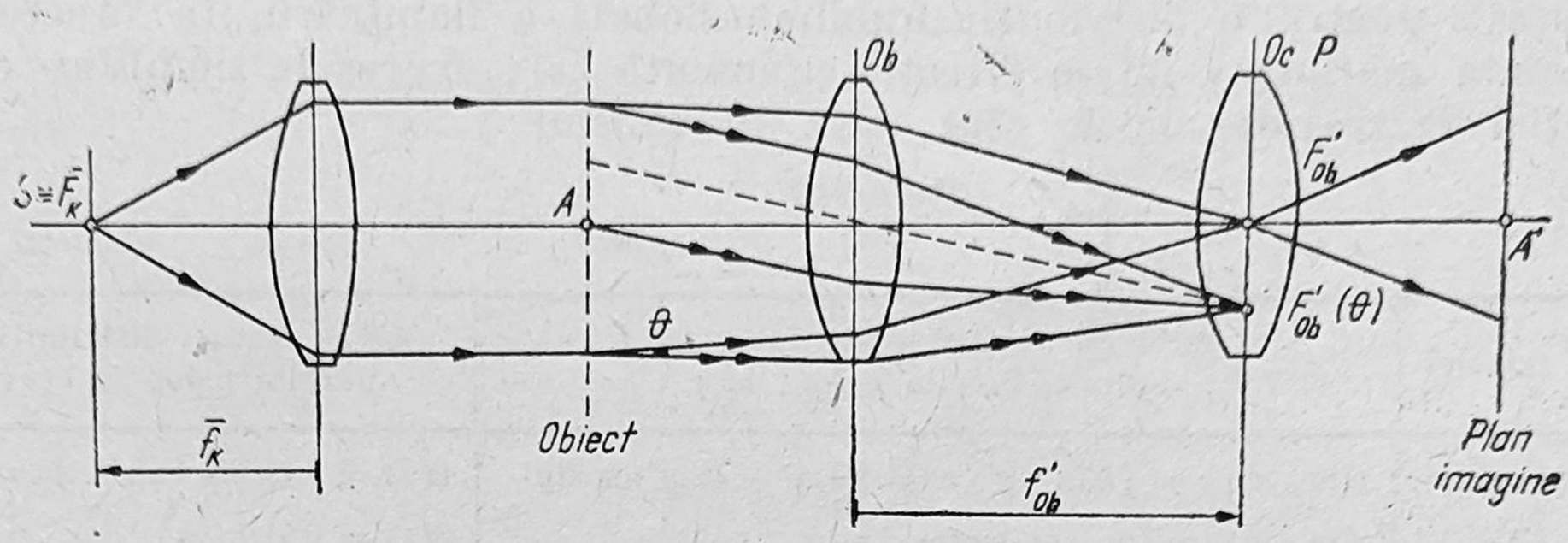


Fig. 17.25

În figura 17.25 este reprezentată schema optică a unui microscop cu proiecție, utilizat de Abbe pentru verificarea teoriei expuse, compus dintr-o sursă cvasipunctiformă plasată în focarul-obiect al condensatorului *K*, planul obiect *A*, obiectivul *OB*, ocularul de proiecție *OC.P.* plasat în focarul imagine al obiectivului, unde se formează și imaginea sursei *S* și planul imagine *A'* unde se poate observa repartiția amplitudinilor care reprezintă analiza armonică a obiectivului.

Dacă se utilizează un obiect periodic (o rețea) și se modifică deschiderea obiectivului se constată dispariția anumitor frecvențe.

Teoria lui Abbe referitoare la iluminarea telecentrică a obiectului a fost formulată inițial prin următoarele două idei :

1°. În absența obiectului fasciculul paralel va fi focalizat în F'_{Ob}, unde se află și pupila de ieșire a obiectivului (pupila de intrare se află la infinit). În prezența obiectului, fasciculele înclinate datorate difracției produse de acestea vor focaliza în alte puncte din planul focal $F'_{Ob}(\theta)$, *focare secundare*, în fiecare avînd loc o distribuție Airy, dacă se neglijează aberațiile obiectivului.

2°. Imaginea care se formează se datorează interferenței undelor emise de focarele secundare $F'_{Ob}(\theta)$.

Cele două idei formulate de teoria lui Abbe se regăsesc și în forma modernă exprimată anterior cu ajutorul transformatei Fourier.

17.3.7. Metode de măsurare a FTO

În ultimii ani teoria transmiterii frecvențelor spațiale prin sisteme optice, fundamentată teoretic de Duffieux în lucrarea *L'integrale de Fourier et ses applications a l'optique*, și-a găsit aplicații atît în calculul de optimizare a sistemelor optice, cît și în verificarea calității acestora, pe baza măsurării *FTO*. Funcția de transfer a devenit la ora actuală criteriul calitativ obiectiv de apreciere a componentelor optice în general și a obiectivelor fotografice și

de proiecție în special, cît și a fibrelor optice. În rezumat, funcția de transfer optic poate fi exprimată ca transformate Fourier a distribuției iluminării în planul imagine (17.40), ca raport a transformatelor Fourier a distribuțiilor iluminării în planul imagine și obiect (relația 17.40) sau ca rezultat al autocorelației distribuției amplitudinii oscilației luminoase în planul imagine (relația 17.42). Fără a afecta generalizarea funcției de transfer, aceasta poate fi măsurată pentru o distribuție unidimensională a iluminării, în funcție de frecvența spațială ν într-o direcție cunoscută (x); expresiile simplificate ale funcției de transfer optic sînt date în tabelul 17.3.

Tabelul 17.3

Nr. relației	FTO pentru distribuția bidimensională $e\ (\omega_x, \omega_y)$	FTO pentru distribuția unidimensională $e(\nu)$
(17.40)	$e(\omega_x, \omega_y) = \int E(x', y') \exp i(\omega_x x' + \omega_y y')dx'dy'$	$e(\nu) = \int E(x') \exp i\ 2\pi\nu x'dx'$
(17.40)	$e(\omega_x\omega_y) = i(\omega_x, \omega_y)/\sigma(\omega_x, \omega_y)$	$e(\nu) = i(\nu)/\sigma(\nu)$
(17.43)	$e(\omega_x, \omega_y) = \int f\left(X' + \frac{X_0}{2}, Y' + \frac{Y_0}{2}\right) f^*\left(X' - \frac{X_0}{2}, Y'' - \frac{Y_0}{2}\right) dX'dY'$	$e(\nu) = \int f\left(X' + \frac{X_0}{2}\right) f^*\left(X' - \frac{X_0}{2}\right) dX'$

După cum rezultă din definiție, funcția optică de transfer este o mărime complexă ce poate fi scrisă sub forma trigonometrică sau exponențială

$$e(\nu) = e_c(\nu) + i \cdot e_s(\nu) \equiv T(\nu) \cdot \exp\ i\theta(\nu), \tag{17.60}$$

unde

$$\begin{aligned} e_c(\nu) &= \int E(x') \cos\ 2\pi\nu x'\ dx' \\ e_s(\nu) &= \int E(x') \sin\ 2\pi\nu x'\ dx' \\ T(\nu) &= [e_c^2(\nu) + e_s^2(\nu)]^{1/2} \\ \theta(\nu) &= \text{arctg}\ [e_s(\nu)/e_c(\nu)] \end{aligned} \tag{17.61}$$

reprezintă respectiv: partea reală și imaginară a *FTO*, modulul funcției de transfer sau *FTM* (funcția de transfer modulată) și argumentul funcției de transfer sau *FTF* (funcția de transfer de fază). Cum sistemele optice reprezintă niște filtre de frecvență spațială *trece-jos*, frecvența spațială zero este considerată ideală, *FTO* luînd următoarele valori

$$e_c(0) = 1\ ;\ e_s(0) = 0\ ;\ T(0) = 1\ ;\ \theta(0) = 0.$$

De obicei, funcția de transfer optic este normată față de frecvența spațială nulă

$$\tau(\nu) = e(\nu)/e(0). \tag{17.62}$$

După principiul aplicat, metodele de măsurare a *FTO* se pot clasifica în:

1) *Metode analitice*, care aplică relația (17.40);

2) *Metode interferometrice*, care au la bază relația de autocorelație (17.43).

După modul de selectare a componentei Fourier metodele analitice pot fi :

a) *Analiza Fourier optică*, care utilizează o mină sinusoidală ;

b) *Analiza Fourier opto-electronică*, care utilizează o mină nesinusoidală, armonicile superioare fiind eliminate cu un filtru electronic ;

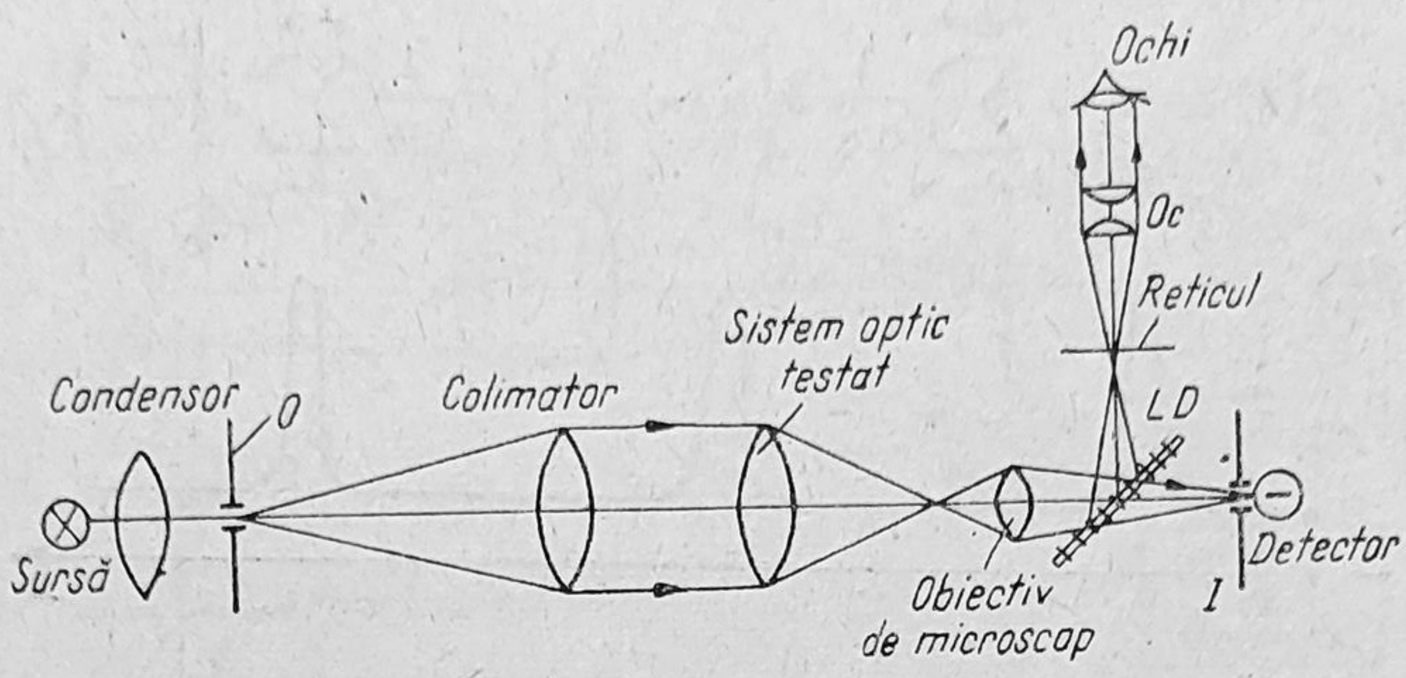


Fig. 17.26

c) *Analiza Fourier electronică*, la care imaginea unei fante este analizată electronic.

O altă clasificare a metodelor de măsurare analitice are în vedere modul de obținere direct sau indirect a *FTO*. În cazul metodelor de *analiză indirectă* imaginea este descompusă pentru a determina distribuția iluminării și apoi transformata Fourier a acesteia, care este împărțită la transformata Fourier a distribuției iluminării obiectului, pentru a determina *FTO* conform relației (17.40). În metodele de *analiză directă* se face o descompunere a imainii unei fante cu ajutorul unei mire periodice, sau invers : descompunerea imaginii unei mire periodice cu ajutorul unei fante, fluxul de lumină transmis dînd *FTO* în funcție de frecvența spațială a mirei.

Măsurarea FTO prin metode de analiză indirecte. Una dintre instalațiile care utilizează analiza indirectă este instalația realizată de Naish și Jones (fig. 17.26), la care obiectul *O* constă dintr-un punct luminos, a cărui imagine dată de sistemul optic testat este analizată prin deplasarea orificiului *I*. Pentru determinarea coordonatelor lui *O* față de orificiul *I* se utilizează lama divizoare *LD* și ocularul *OC* cu reticul gradat. Dezavantajul acestei metode este cantitatea insuficientă de lumină care provine de la obiect, efectele de zgomot datorate detectorului fiind destul de importante (raportul *semnal/zgomot* este mic). Urmează să se calculeze transformata Fourier a distribuției iluminării în planul imagine, care apoi se împarte la transformata Fourier a iluminării obiectului pentru a obține *FTO*.

Pentru a nu mai fi necesar calculul transformatei Fourier a distribuției iluminării în planul imagine, se analizează imaginea unei fante cu o mină formată din fante echidistante care se deplasează cu o viteză $v = \text{const.}$ în planul imagine, după o direcție perpendiculară pe direcția fantelor. Cum distanța între două maxime principale este mult mai mare decît lățimea unui maxim principal, fluxul luminii care trece prin sistem ia forma unui tren de impulsuri (fig. 17.27) și poate fi reprezentat ca o convoluție a distribuției iluminării imaginii unei fante cu o serie infinită de funcții Dirac echidistante

$$\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x') \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi + 2ak - x')\mathrm{d}x' \qquad (17.63)$$

unde ξ este deplasarea mirei față de imaginea fante, în lungul axei x, iar $k \in \mathbb{Z}$.

Aplicînd teorema lui Parseval relației (17.63) se obține fluxul luminos în funcție de frecvența spațială ν

$$\varphi(\nu) = i(\nu) \sum_{k=-\infty}^{\pm\infty} \frac{1}{2a} \delta\left(\nu - \frac{k}{2a}\right) = \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\left(\frac{k}{2a}\right), \qquad (17.64)$$

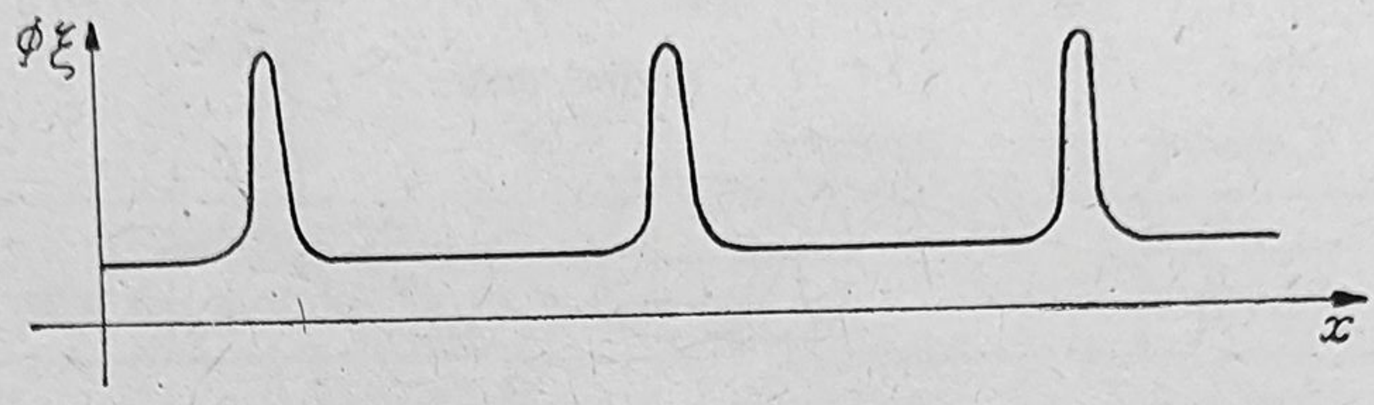


Fig. 17.27

$\varphi(\nu) \neq 0$ pentru $\nu = k/2a$, putîndu-se scrie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k/2a) = \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i(k/2a). \qquad (17.65)$$

Înlocuind i cu expresia dată de (17.40) și ținînd seama de transformata Fourier a funcției Dirac (obiectul este o fantă îngustă), astfel încît $o = 1$, relația (17.65) devine

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k/2a) = \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k/2a) \qquad (17.66)$$

unde $e(k/2a)$ reprezintă *FTO* la frecvența spațială $k/2a$.

Cum frecvența spațială ν este analizată cu o viteză de deplasare v, în detector se produce un semnal modulat cu frecvența temporală $f = v\nu$. Fotodetectorul va furniza un semnal de forma

$$I(f) = \mathcal{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(kf_1) \qquad (17.67)$$

unde $\mathcal{S}$ este sensibilitatea detectorului; f_1 este frecvența temporală corespunzătoare frecvenței spațiale fundamentale $1/2a$.

Dacă semnalul furnizat de fotodetector este transmis printr-un amplificator selectiv cu o bandă de trecere îngustă, acordat pentru a primi frecvența kf_1, atunci amplitudinea și faza semnalului detector corespund amplitudinii și fazei *FTO* la frecvența spațială $\nu = kf_1/v$. Așadar, pentru a *baleia* toate frecvențele spațiale se pot aplica două metode:

— viteza de deplasare a mirei rămîne constantă $c = \text{const.}$, fiind necesar ca banda analizorului de frecvențe să se modifice;

— viteza v este variabilă, utilizînd un amplificator selectiv cu bandă fixă.

Dintre instalațiile care aplică aceste metode de analiză opto-electronică reprezentative sînt următoarele:

Instalația lui Polster (fig. 17.28) aplică prima metodă folosind un analizor de frecvențe. Ca element original se remarcă oglinda rotitoare *Og*, care

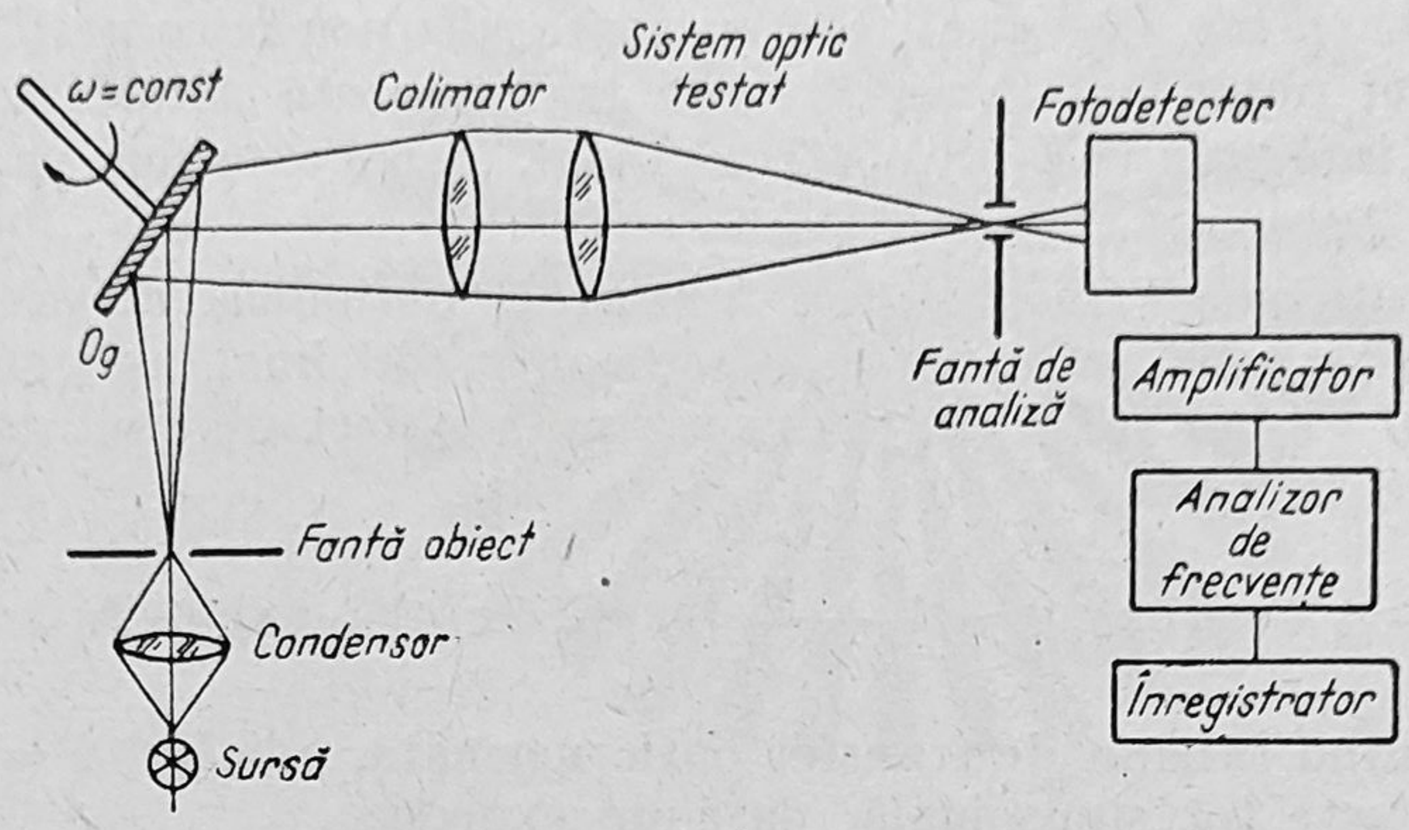


Fig. 17.28

deplasează imaginea fantei obiect pe un loc geometric eliptic față de fanta fixă plasată în planul inagine, această deplasare înlocuind mira cu fante echidistante (pasul rețelei este realizat de axa mare a elipsei, cu viteza de rotație a oglinzii rotitoare). Instalația poate fi folosită cu lumină policromatică, cu condiția corectării colimatorului la aberațiile cromatice.

Instalația lui Birch (fig. 17.29) aplică cea de-a doua metodă, analizînd imaginea unei fante cu un tambur cu 24 fante identice; semnalul dat de fotodetector este trecut printr-un amplificator selectiv cu bandă îngustă

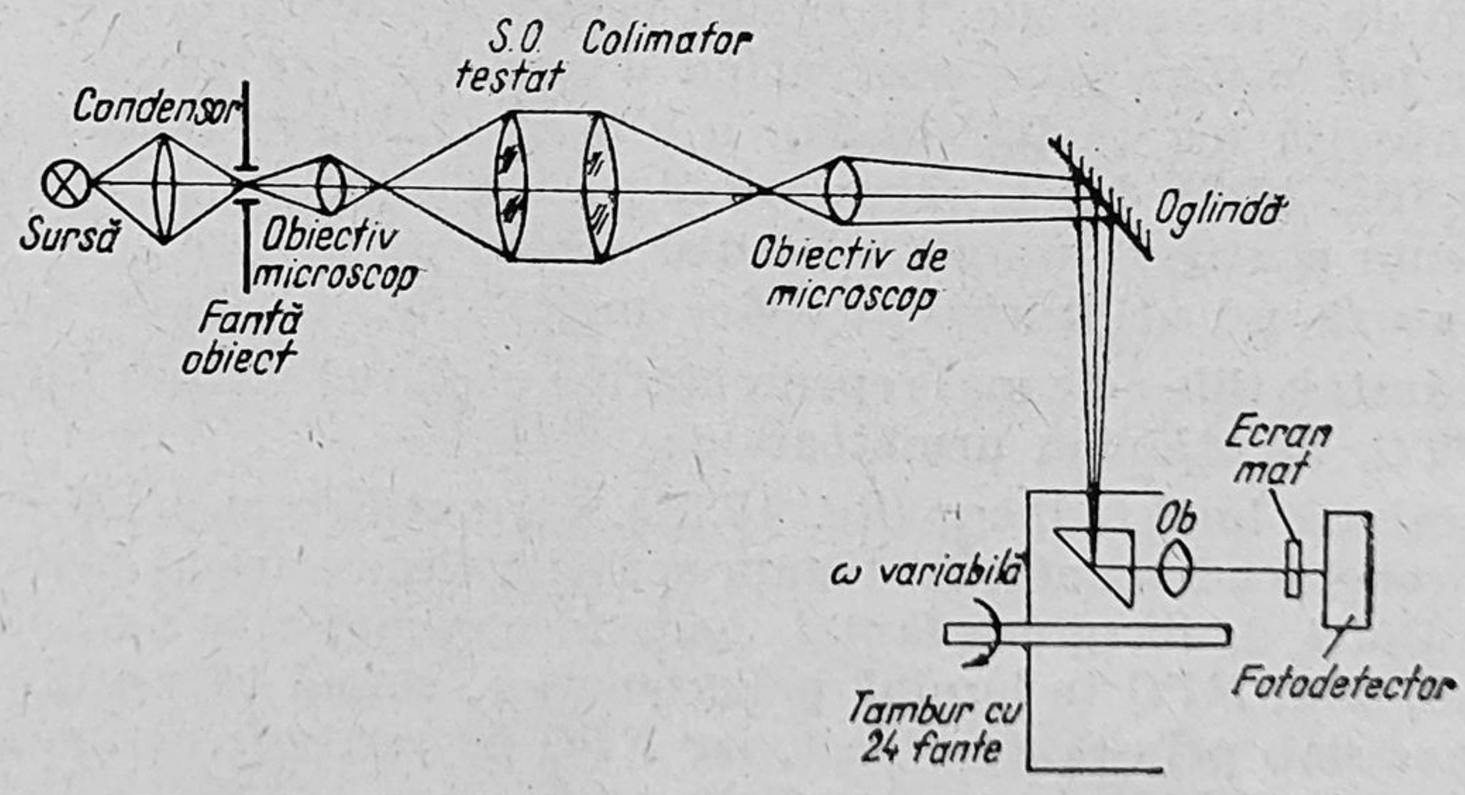


Fig. 17.29

acordat pentru $f_1 = 1\,000$ Hz. Viteza de rotație a tamburului poate fi variată astfel încît să satisfacă relația $\nu = kf_1/v$ pentru diferite valori ale lui k.

Dezavantajul metodelor prezentate constă în imposibilitatea normării *FTO*, deoarece nu se poate măsura *FTO* la frecvența spațială zero: în cazul

primei metode (vizeză constantă) ar trebui ca fotodetectorul și analizorul de frecvențe să aibă caracteristici strict liniare, iar în cazul celei de-a doua metode (viteză variabilă) ar fi necesară o viteză infinită, ambele situații fiind imposibil de realizat în practică.

Măsurarea FTO prin metode de analiză directe. În cazul acestor metode imaginea unei fante este analizată cu ajutorul unor mire periodice (rolurile fantei și mirei putînd fi inversate), de transparență sinusoidală ; se realizează astfel integrala $\int E(x')\cdot\cos(2\pi x'/p)\mathrm{d}x'$, care exprimă partea reală a *FTO*.

Dacă se utilizează un obiect de luminanță periodică, de exemplu o mină sinusoidală, este suficient să se măsoare contrastul imaginii pentru a determina modulul $|e|$ al *FTO*. În acest caz mira obiect de contrast γ_0 este reprezentată de expresia

$$O(x) = 1 + \gamma_0 \cos\ 2\pi x/p = 1 + \frac{\gamma_0}{2}[\exp(2\pi i x/p) + \exp(-2\pi i x/p)]. \quad (17.68)$$

Presupunînd funcția de transfer optic normată, adică $e(0) = 1$, imaginea acestei mire este tot sinusoidală, dată de expresia

$$I(x') = 1 + \frac{\gamma_0}{2}[\exp(2\pi i x/p)e(1/p) + \exp(-2\pi i x/p)e(-1/p)] =$$

$$= 1 + \gamma_0|\ e\ |\ \cos(2\pi x'/p + \varphi). \quad (17.69)$$

Tehnica ideală de măsurare va consta în determinarea contrastului imaginii $\gamma_0|\ e\ |$) ca și a defazajului φ, care se traduce printr-o deplasare laterală a imaginii. Acest defazaj nu apare decît în prezența aberațiilor asimetrice (coma), deoarece dacă pata imagine este simetrică (aberațiile de sfericitate sau astigmatism), $e(1/p)$ este reală.

S-au realizat mai multe tipuri de mire sinusoidale : de densitate optică variabilă sau de arie variabilă. Problema variației frecvenței spațiale este mai delicată : se pot utiliza mire prezentînd o variație continuă a frecvenței în funcție de abscisă (ca în fig. 17.30), o altă posibilitate este utilizarea unei mire radiale (fig. 17.31, b), la care variind poziția centrului de rotație se poate varia frecvența spațială ; un alt procedeu comod de variere a frecvenței spațiale se bazează pe utilizarea franjelor moiré (fig. 17.32).

Dintre instalațiile cele mai reprezentative utilizînd metode directe de măsurare a *FTO*, menționăm următoarele :

— Instalația lui Lindberg (fig. 17.31), care utilizează o mină radială cu mișcare de rotație constantă, frecvența spațială fiind variată prin deplasarea axei discului față de imaginea fantei. Această metodă, care s-a aplicat la măsurarea modulului *FTO* în lumină policromatică, suferă totuși din cauza fluxului luminos slab prin fanta obiect, iar *FTO* nu poate fi normată, deoarece nu poate fi obținută frecvența spațială zero.

— Instalația lui Baker (fig. 17.33). Aceasta utilizează tot o mină disc a cărei imagine pe fanta obiect este dată de obiectivul simetric *OB*. În planul imagine al sistemului optic testat se află o fantă perpendiculară pe fanta obiect, rezultatul suprapunerii celor două fante și a mirei fiind arătat în figura 17.33, b. Mira disc este rotită cu viteză unghiulară constantă astfel încît apertura efectivă (intersecția celor două fante) este baleiată cu o frecvență

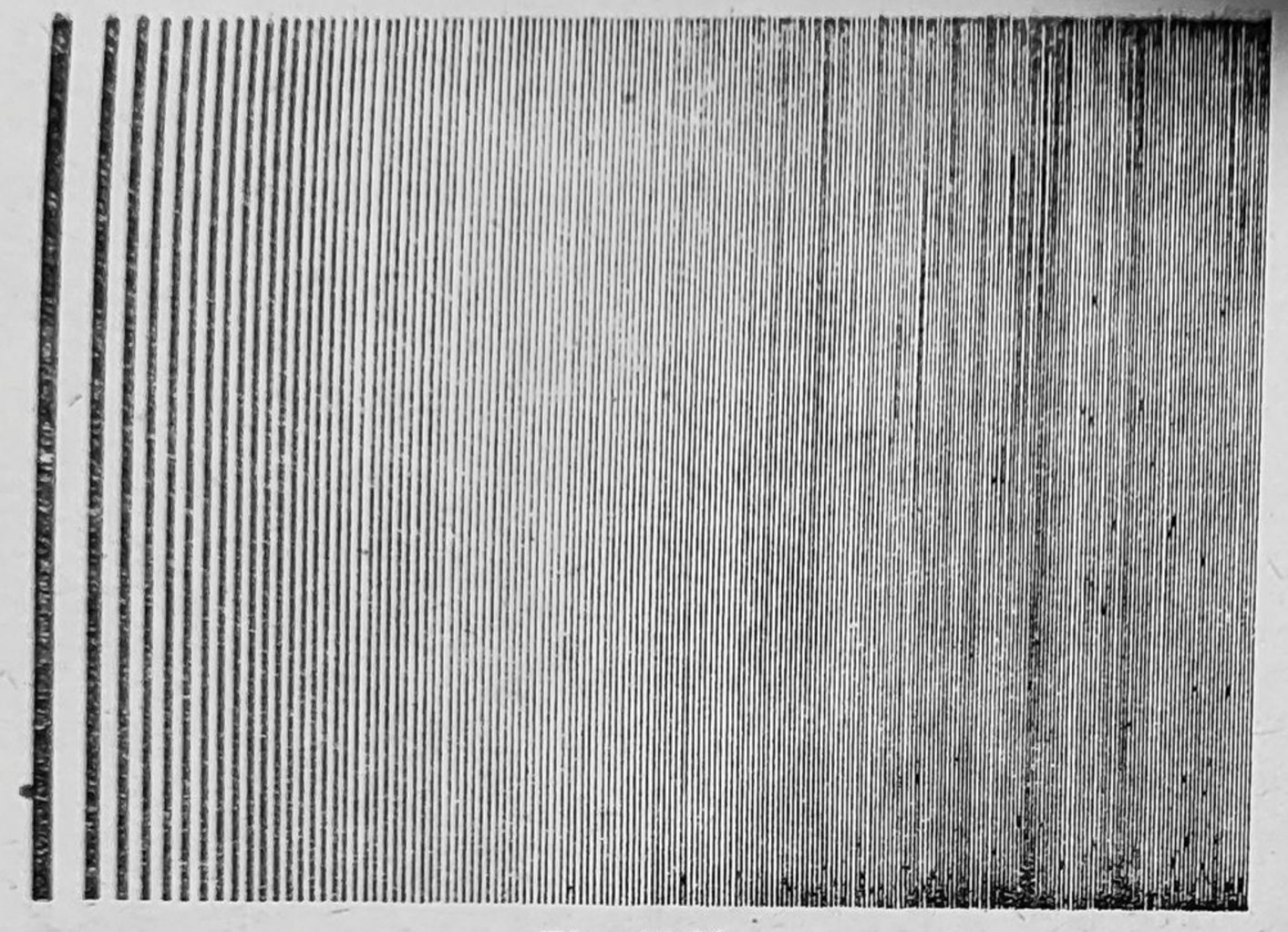


Fig. 17.30

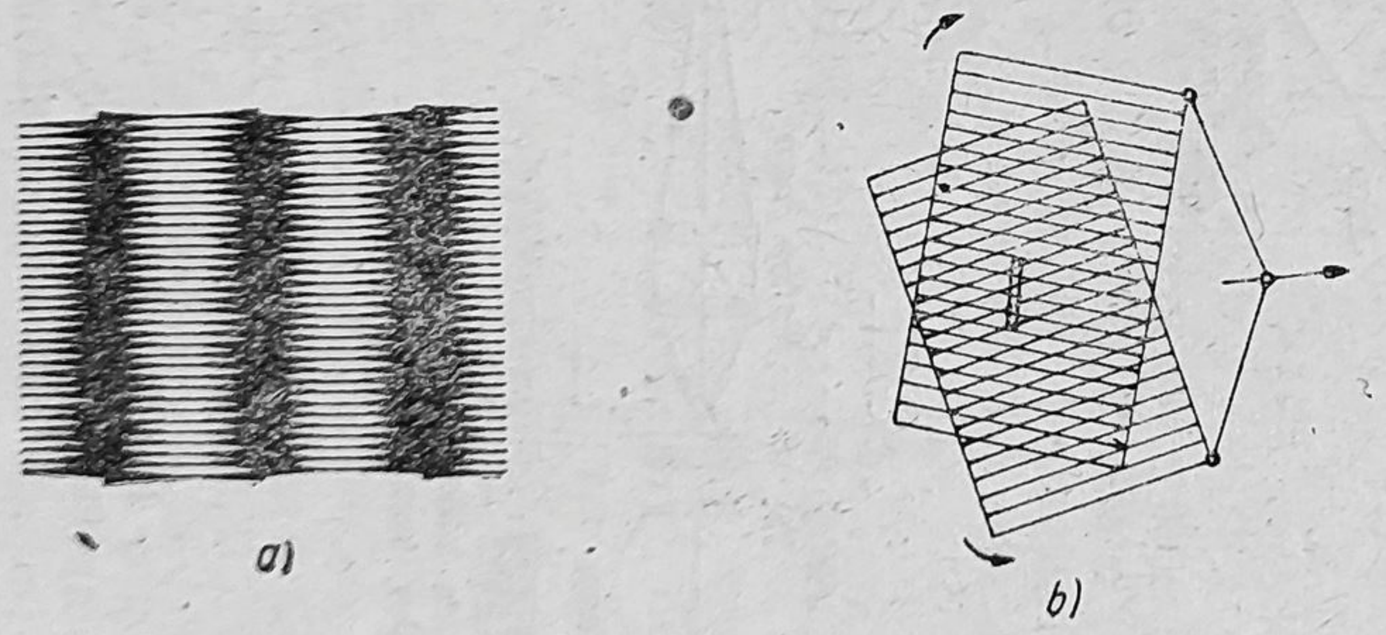
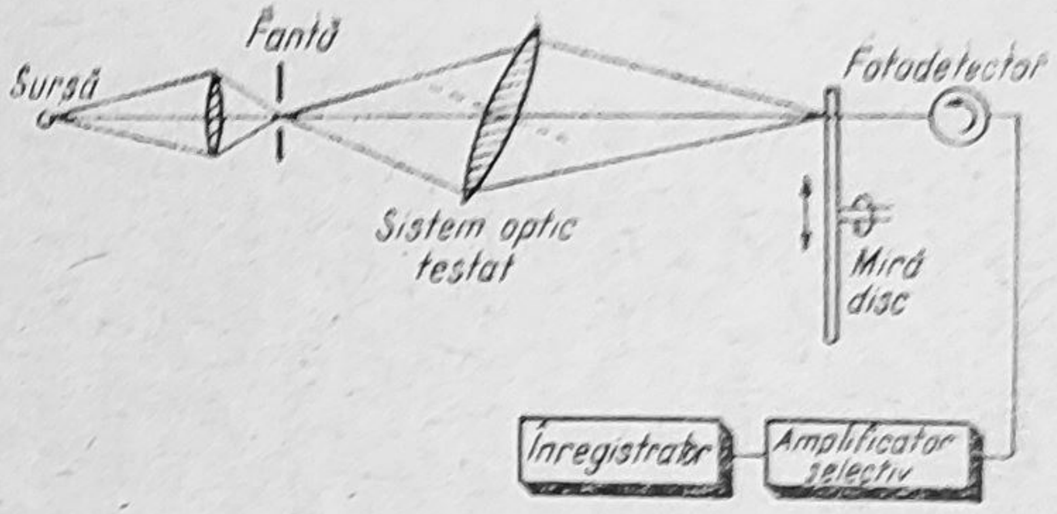
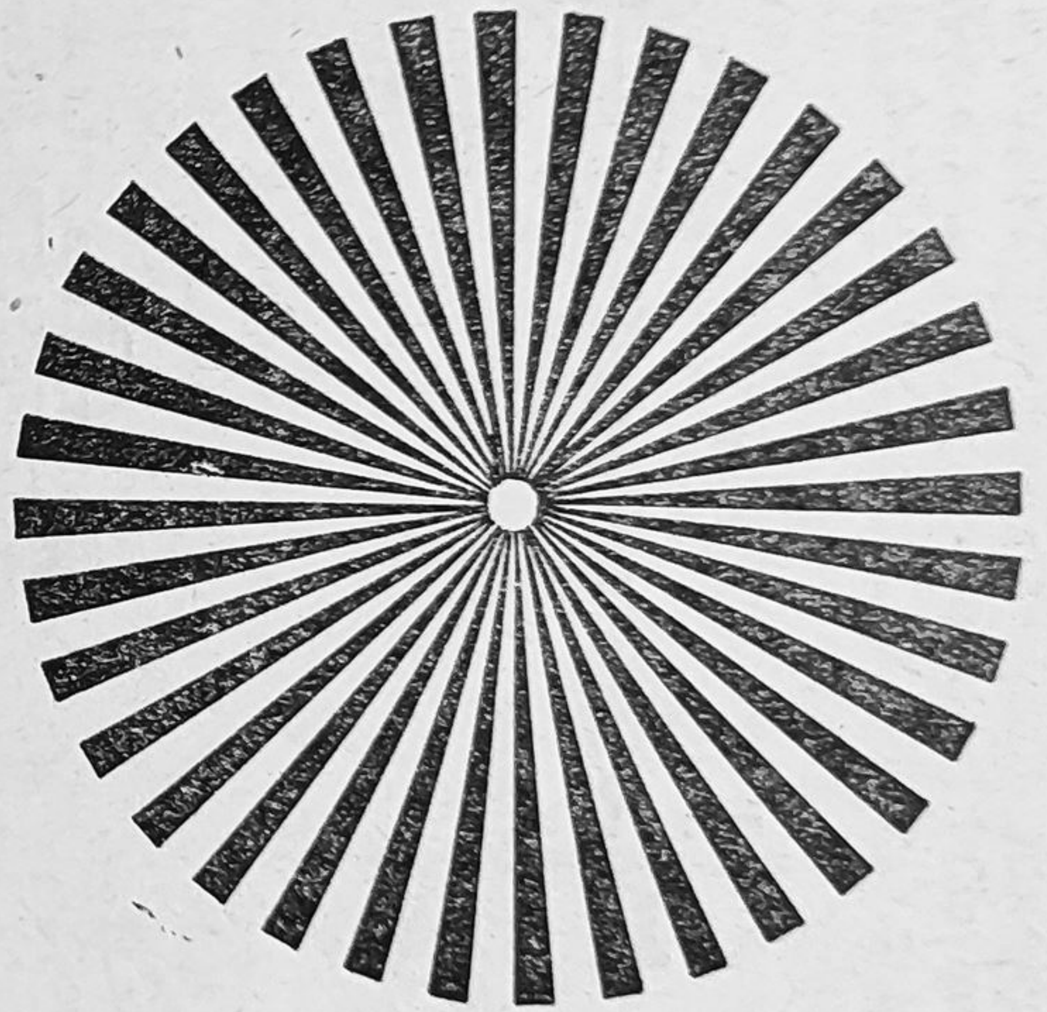


Fig. 17.32



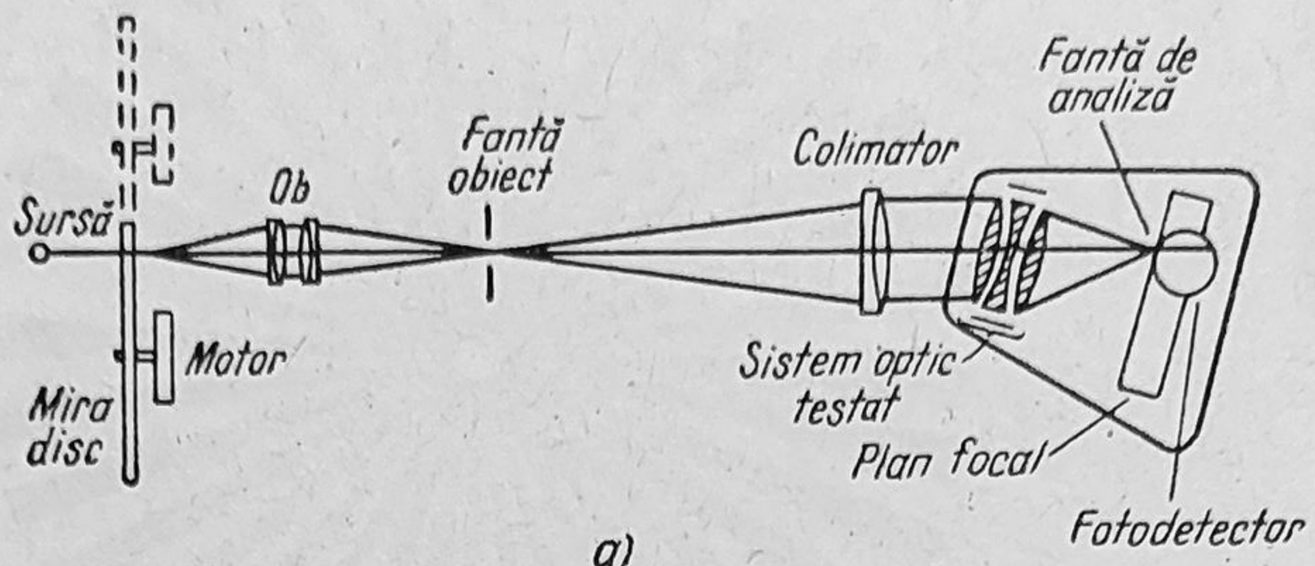
a)



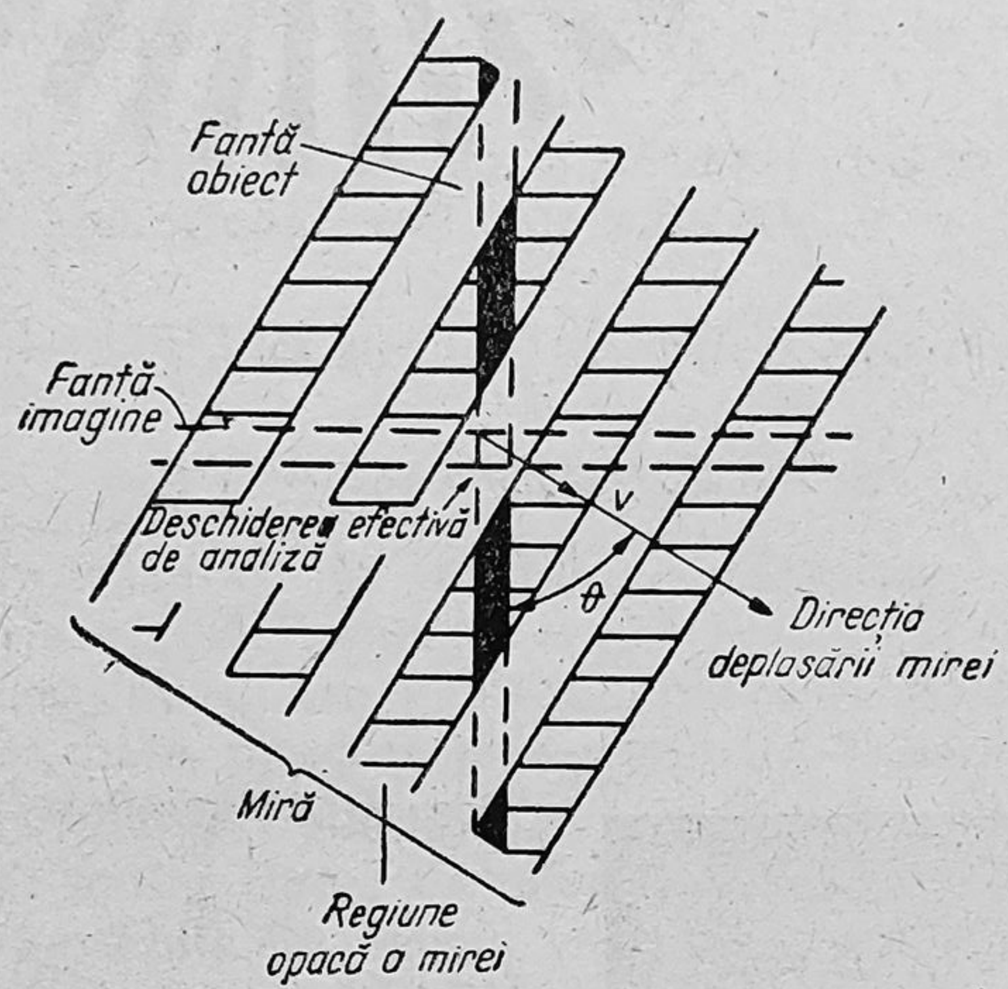
b)

Fig. 17.31

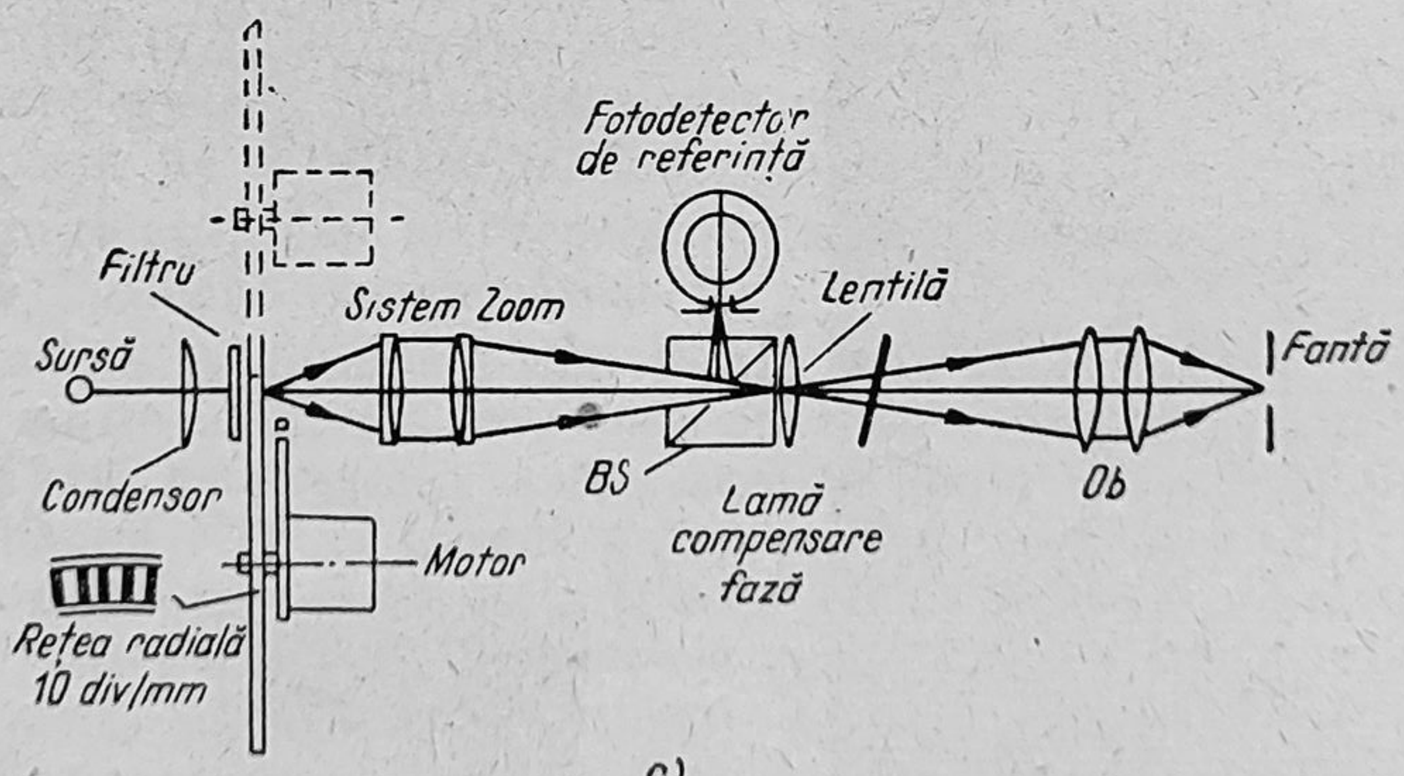
temporară constantă. Frecvența spațială depinde de unghiul θ dintre direcția de mișcare a mirei și fanta obiect ; acest unghi poate fi continuu variat prin rotirea centrului discului în jurul axei optice a sistemului. Pentru a putea



a)



b)



c)

Fig. 17.33

măsura faza și a lua în considerare fluctuațiile sursei, Baker a perfecționat instalația, completînd-o cu un fotodetector de referință ; partea care diferă de instalația inițială este reprezentată schematic în figura 17.33, c, și conține

un sistem optic cu focală variabilă care formează imaginea mirei, reflectată de un cub divizor pe un orificiu aflat în faţa fotodetectorului de referinţă. Fasciculul transmis prin cubul divizor traversează o lamă compensatoare a schimbării de fază, imaginea mirei pe fanta obiect fiind obţinută cu obiectivul *OB*. Instalaţia necesită o reglare atentă, care să asigure formarea imaginii aceleiaşi porţiuni în orificiul fotodetectorului ca şi în deschiderea efectivă de analiză (suprapunerea imaginii fantei obiect cu fanta din planul imagine); cu această instalaţie se măsoară pînă la frecvenţa spaţială zero, astfel încît *FTO* poate fi normată, precizia de determinare a modulului şi fazei fiind de ordinul 1%.

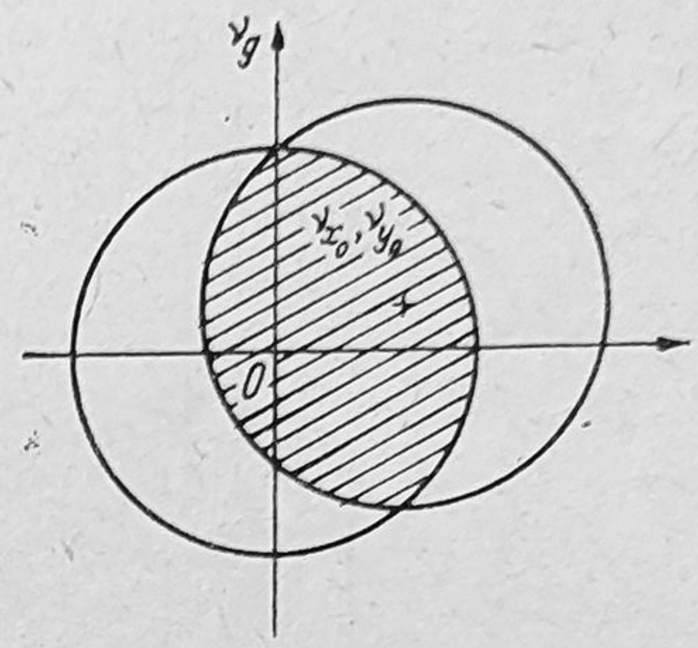


Fig. 17.34

Metode interferometrice de măsurare a FTO. Aceste metode au la bază relaţia de autocorelare a funcţiei pupilei de ieşire (relaţia 17.43). H. H. Hopkins a propus să se utilizeze un interferometru de tip Michelson, astfel încît să se realizeze interferenţa fasciculelor trecute prin sistemul optic testat, afectate de:

— un decalaj lateral proporţional cu frecvenţa spaţială;

— un decalaj de fază δ liniar în funcţie de timp.

Fie pupila de ieşire a unui sistem optic divizată de un interferometru ca în figura 17.34, unde ν_x, ν_y sînt coordonatele transformate de decalare. Făcînd schimbările de variabile $\nu_x = X'/\lambda$, $\nu_y = Y'/\lambda$, relaţia de autocorelaţie (17.43) se poate scrie

$$e_\lambda(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\Sigma'}(\nu_x + \nu_{x0},\ \nu_y + \nu_{y0}) f^*_{\Sigma'}(\nu_x,\ \nu_y)\, d\nu_x\, d\nu_y. \qquad (17.70)$$

De notat, că suprafaţa de integrare pentru ecuaţia (17.70) este suprafaţa comună pupilei de ieşire centrate în $\nu_x = 0$, $\nu_y = 0$ şi a celei centrate în ν_{x0}, ν_{y0} (fig. 17.34), din care cauză chiar pentru o suprafaţă echifază fără aberaţii, modulul *FTO* scade cu creşterea frecvenţei spaţiale (deoarece aria de integrare scade). Rata descreşterii depinde de forma pupilei. În urma interferării celor două suprafeţe echifaze decalate, intensitatea luminoasă în figura de interferenţă este:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} | f_{\Sigma'}(\nu_x + \nu_{x0},\ \nu_y + \nu_{y0}) + \exp(-i\delta) f^*_{\Sigma'}(\nu_x,\ \nu_y) |^2\, d\nu_x\, d\nu_y =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} | f_{\Sigma'}(\nu_x + \nu_{x0},\ \nu_y + \nu_{y0}) |^2\, d\nu_x\, d\nu_y + \int_{-\infty}^{+\infty} | f^*_{\Sigma'}(\nu_x,\ \nu_y) |^2\, d\nu_x\, d_y\nu +$$

$$+ 2\mathcal{R}e \left\{ \exp(-i\delta) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\Sigma'}(\nu_x + \nu_{x0},\ \nu_y + \nu_{y0}) \cdot f^*_{\Sigma'}(\nu_x,\ \nu_y)\, d\nu_x\, d\nu_y \right\}. \qquad (17.71)$$

Primele două integrale reprezintă intensităţile celor două fascicule şi sînt constante pentru o sursă de intensitate constantă. Comparînd cel de-al treilea termen al ecuaţiei (17.71) cu expresia *FTO* (17.70) se observă că acesta este proporţional cu partea reală a funcţiei de transfer optic. Utilizînd notaţiile (71.60) pentru *FTO*, al treilea termen al intensităţii poate fi scris

$$2\mathcal{R}e \{ \exp(-i\delta) \tau_\lambda(\nu_{x0},\ \nu_{y0})\ \exp[i\theta_\lambda(\nu_{x0},\ \nu_{y0})] \} =$$

$$= 2\tau_\lambda(\nu_{x0},\ \nu_{y0})\ \cos[\theta_\lambda(\nu_{x0},\ \nu_{y0}) - \delta]. \qquad (17\ 72)$$

Dacă drumul optic într-unul din brațele interferometrului variază cu un număr constant de lungimi de undă pe secundă: $n\lambda/s$, diferența de fază δ va varia cu $2\pi n$ radiani/s, iar termenul cosinus va produce o variație a intensității cu o frecvență temporală de n Hz. În acest caz, dacă filtrul de bandă îngustă este acordat pentru n Hz (pentru a aduce la maximum raportul *semnal/zgomot*), atunci amplitudinea semnalului și unghiul de fază relative la diferența de drum zero ($\delta = 0$) vor fi proporționale cu modulul și respectiv faza *FTO*. Un exemplu de instalație interferometrică de măsurare a *FTO* îl constituie interferometrul lui Kelsall (fig. 17.35); acesta utilizează în locul oglinzilor plane prisme colț de cub, care ușurează reglarea, și două lame plan-paralele care se rotesc încet pentru a asigura divizarea pupilei de ieșire, în timp ce lama prismatică oscilează liniar pentru a produce varierea drumului optic.

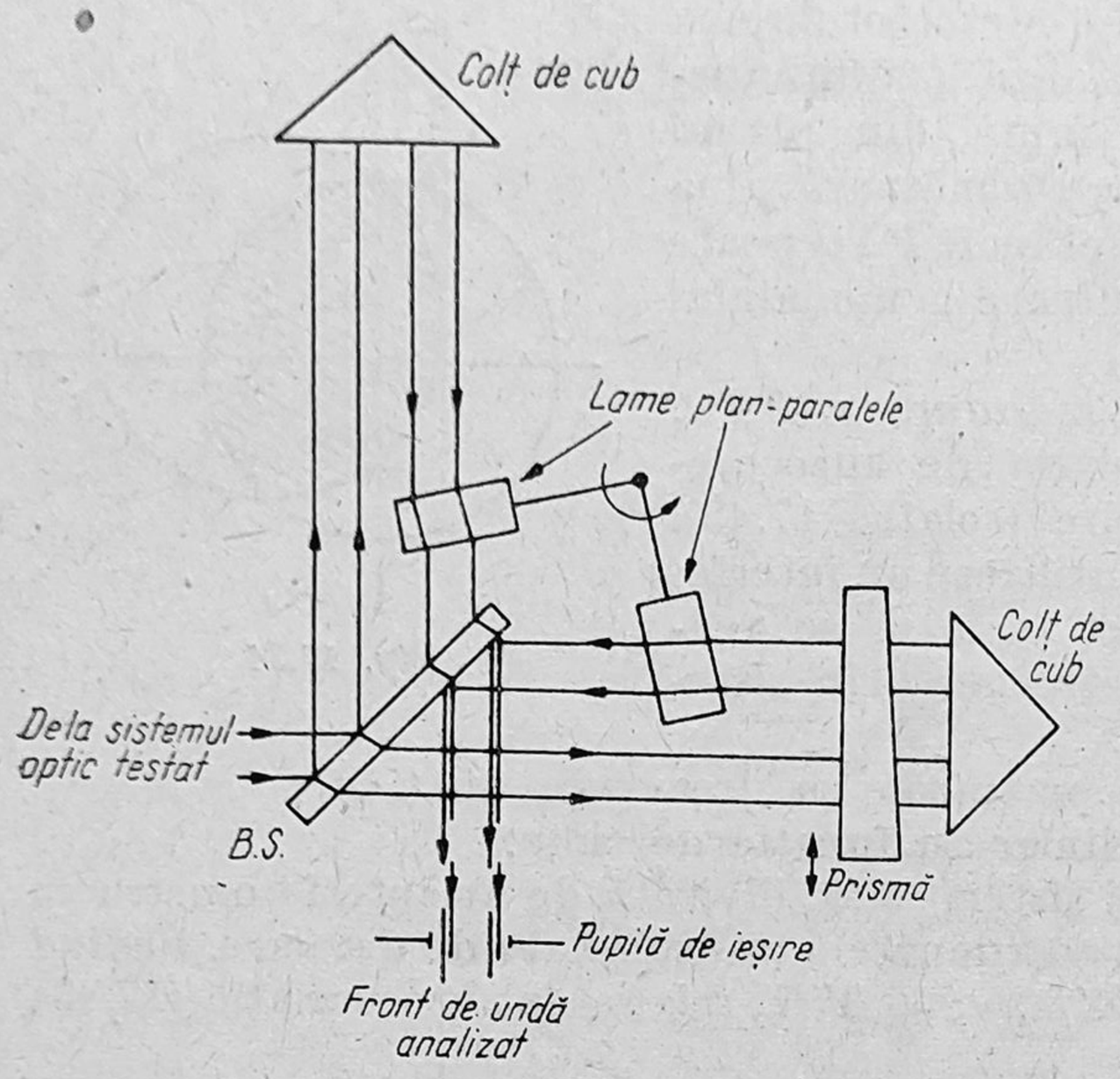


Fig. 17.35

Concluzie privind măsurarea FTO. În principiu, toate metodele de analiză descrise pot fi utilizate la măsurarea *FTO* policromatică, cu asigurarea corectării acromatice a sistemelor optice auxiliare. În schimb, metodele interferometrice, deși sînt mai precise în măsurarea *FTO* monocromatică, nu pot fi aplicate la măsurarea *FTO* policromatică. În toate cazurile, sînt necesare surse de lumină și fotodetectori cu caracteristici spectrale corespunzătoare, ca și aparatură electronică bine aleasă pentru a asigura precizia cerută metodei aplicate.

Pentru a evalua performanțele unui sistem optic, se măsoară *FTO* pentru fiecare combinație de diferite valori ale parametrilor: defocalizare (defect de punere la punct); unghi azimutal; deschidere relativă; lungime de undă a radiației. În unele cazuri numărul măsurătorilor poate ajunge la cîteva sute, necesitînd un timp destul de lung, ca de exemplu, în cazul prezentat în tabelul 17.4. Pentru a înlătura acest inconvenient s-au propus mai multe criterii care să înlocuiască printr-o singură valoare reprezentativă curba *FTO*:

1) limita superioară a frecvenței spațiale de la care *FTO* coboară sub o anumită valoare impusă;

2) valoarea *FTO* la anumite frecvențe spațiale;

3) valoarea lui *FTO* integrată pe domeniul de frecvențe spațiale cerut;

4) valoarea integralei pătratului *FTO* pe domeniul de frecvențe spațiale cerut.

Tabelul 17.4

Parametru	Valori ale parametrilor	Număr de combinații
Defocalizare	0 ; ±0,05 ; ±0,10 ; ±0,15 mm	7
Cîmp unghiular	0°, 5°, 10°, 15°, 20°	5
Unghi azimutal	0°, 90°	2
Deschiderea relativă	1 : 2 ; 1 : 2,8 ; 1 : 4 ; 1 : 5,6 ; 1 : 8	5
Radiație	e ; albă	2
Număr total de combinații (curbe FTO)		700

Aceste valori pot fi măsurate cu instalațiile descrise anterior, dar aceste instalații sînt mai potrivite măsurării *FTO* a sistemelor optice în condiții de laborator, unde problema timpului limitat nu se pune. Pentru ca *FTO* să devină un criteriu calitativ aplicat în controlul de serie al sistemelor optice, operație integrată în procesul tehnologic (timpul de control nu trebuie să depășească 30 — 40 s/aparat testat), este necesar să se construiască instalații de control industriale avînd la bază unul din criteriile simplificatoare, ales corespunzător sistemului optic verificat. Această problemă face obiectul preocupărilor firmelor producătoare de aparate optice, principiul de funcționare al instalațiilor fiind unul dintre cele prezentate pentru instalațiile utilizate în cercetările de laborator.

18. HOLOGRAFIE

Holografia — tehnica obținerii imaginii unui obiect pornind de la o figură de difracție produsă de acel obiect — a fost fundamentată teoretic de către Denis Gabor în 1949. Procesul obținerii imaginii are loc, în general, în două etape: a) se fotografiază figura de difracție produsă de obiect, adăugîndu-i un fond coerent ; această fotografie constituie holograma, care nu se aseamănă cu obiectul, dar conține informațiile necesare (amplitudine și fază) pentru reconstituirea obiectului ; b) se iluminează holograma în lumină monocromatică coerentă, variațiile de densitate ale hologramei producînd fenomenul de difracție, care reconstituie imaginea obiectului. Metoda inițială era limitată datorită surselor luminoase cunoscute în acel moment ; datorită lipsei de coerență și spectrelor largi, imaginile date de hologramă se suprapuneau, iar datorită intensității reduse a surselor utilizate, timpii de expunere erau de ordinul unei ore, ceea ce impunea condiții severe montajelor holografice. Holografia, în forma ei practică, aplicativă, a cunoscut o dezvoltare rapidă după apariția primilor laseri. Introducînd pentru prima dată sursele laser în montajele holografice, Leith și Upatnieks (1962) au rezolvat cele două probleme care limitau aplicabilitatea holografiei : fasciculul laser care formează fondul coerent putînd fi suficient de înclinat față de fasciculul difrac-

tat de obiect, se elimină efectul de suprapunere a imaginilor ; intensitatea și lungimea de coerență a laserilor facilitează realizarea montajelor holografice.

În ultimii zece ani, cercetările în domeniul holografiei au fost deosebit de intense, cu rezultate remarcabile, propunîndu-se mii de utilizări în domeniile interferometriei, prelucrării și stocării optice a informației, sau formarea și îmbunătățirea imaginilor. Direcția aplicativă cea mai dezvoltată în momentul actual este interferometria holografică, în special controlul nedistructiv, precizia asigurată fiind de ordinul 0,5 μm pe corpuri tridimensionale de forme și prelucrări arbitrare. Aplicațiile cu cele mai mari perspective ale holografiei se situează în domeniul prelucrării optice a informației (*POI*), în care hologramele Fourier sînt utilizate la prelucrarea imaginilor, recunoașterea formelor, prelucrarea unor date biomedicale ; de asemenea memoriile holografice, care deschid noi perspective în stocarea informației. Alte aplicații cu rezultate recente și de perspectivă ale holografiei sînt în microscopie, cinematografie, tehnica tipografică. Prognozele asupra evoluției domeniului pe plan mondial în următorii zece ani prevăd o creștere importantă a activităților de cercetare. La noi în țară primele cercetări în holografie au fost efectuate la Institutul de fizică și tehnologiea aparatelor pentru radiații din București și la Institutul Politehnic din București. Lucrarea *Introducere în holografie*, Ed. Acad. R.S.R., 1972, de V. Vlad, constituie o bună bază de plecare în aprofundarea acestui domeniu nou al opticii. În prezent, cercetări în domeniul holografiei se întreprind în mai multe institute de cercetări și de învățămînt superior din țara noastră, cu rezultate remarcabile în controlul nedistructiv, în tehica calculului, în medicină etc.

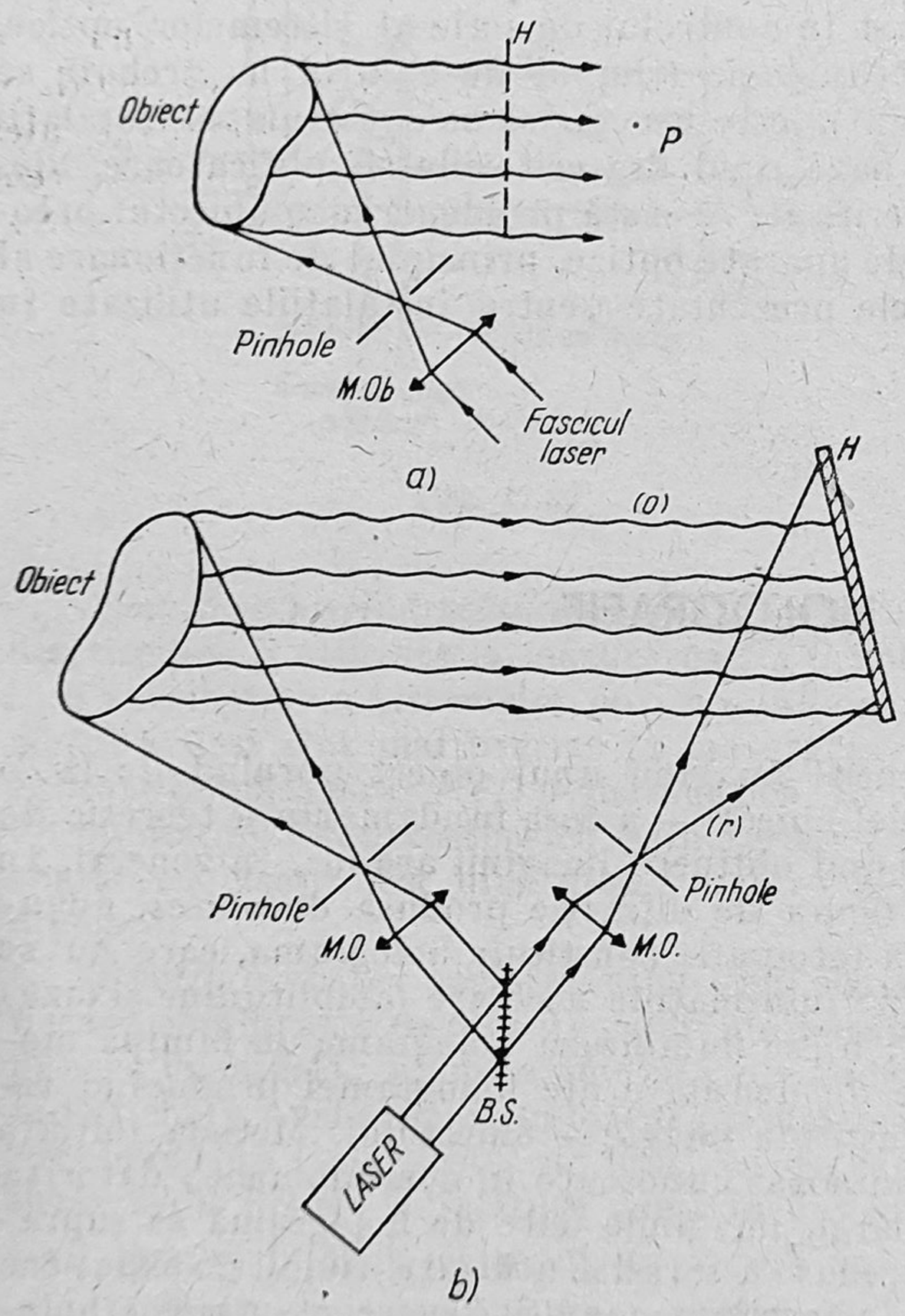


Fig. 18.1

18.1. Principiul înregistrării și reconstrucției holografice

Ideea care conduce la holografie se bazează pe principiul Huygens-Fresnel și pe proprietățile interferenței luminii. Un obiect coarecare pe care se difractă unda laser (fig. 18.1, a) dă în planul virtual $H(x, y)$ o distribuție a amplitudinii complexe $A(x, y, t)$. Dacă se îndepărtează obiectul, dar în planul H se reconstituie o sursă sinte-

tică la care starea de oscilație este $A(x, y, t)$, conform principiului Huygens-Fresnel, efectul într-un punct P este același ca și în prima situație. Holograma reprezintă o înregistrare fotografică și care, iluminată în mod convenabil, restituie unda $A(x, y, t)$. După cum se știe, nu este suficient să se dispună o emulsie fotosensibilă în planul H pentru a obține o asemenea înregistrare, deoarece înnegrirea produsă pe placă va fi funcție de energia primită, proporțională cu pătratul mediei în timp a amplitudinii, informația privind faza fiind astfel pierdută.

a) *Înregistrarea holografică.* Pentru a conserva în același timp informațiile privind faza și amplitudinea, unda obiect $A_0(x, y, t) = a_0(x, y) \exp\{-i[\omega t - \varphi_0(x, y)]\}$ se transformă într-o undă staționară prin adăugarea unui fond coerent, obținîndu-se astfel o rețea de franje de interferență a cărei înregistrare constituie holograma. Dispozitivul experimental este reprezentat schematic în figura 18.1, b. Fondul coerent este numit undă purtătoare sau undă de referință (r), fiind în general un fascicul paralel, convergent sau divergent, producînd în planul H amplitudinea complexă

$$A_r(x, y, t) = a_r(x, y) \exp\{-i[\omega t - \varphi_r(x, y)]\}.$$

Placa fotografică așezată în H înregistrează iluminarea totală

$$E = |A_0 + A_r|^2 = |A_0|^2 + |A_r|^2 + A_0 A_r^* + A_0^* A_r. \qquad (18.1)$$

Transparența în amplitudine a plăcii impresionate este proporțională cu $E^{-\gamma/2}$, unde γ reprezintă panta curbei de înnegrire a emulsiei fotografice sau factorul de contrast. Pentru a realiza liniaritatea înregistrării, se face astfel încît $|A_r| \gg |A_0|$. Dezvoltînd în serie de puteri $\tau_a = E^{-\gamma/2}$, ținînd seama de relația (18.1), se obține

$$\tau_a = |A_r|^{-\gamma}\left(1 - \frac{\gamma}{2}\left|\frac{A_0}{A_r}\right|^2 - \frac{\gamma}{2}\frac{A_0 A_r^*}{|A_r|^2} - \frac{\gamma}{2}\frac{A_0^* A_r}{|A_r|^2} + \ldots\right). \qquad (18.2)$$

Respectarea condiției $|A_r| \gg |A_0|$ permite neglijarea factorului $(\gamma/2)|A_0/A_r|^2$. Lăsînd la o parte constanta $|A_r|^{-\gamma}$, care reprezintă o absorbție uniformă a hologramei și normînd iluminarea uniformă $|A_r|^2 = a_r^2 = 1$ produsă de unda de referință pe holograma H, relația (18.2) poate fi scrisă

$$\tau_a = 1 - \frac{\gamma}{2}(A_0 A_r^* + A_0^* A_r) \qquad (18.2')$$

care, ținînd seama de expresiile amplitudinilor complexe A_0 și A_r în care se face abstracție de factorul de timp $\exp(-i\omega t)$, iar $a_r = 1$ conform normării iluminării produse de unda de referință, devine

$$\tau_a = 1 - \gamma a_0(x, y)\cos[\varphi_0(x, y) - \varphi_r]. \qquad (18.3)$$

Sub această formă se observă că τ_a este real și pozitiv, unda complexă obiect apărînd în procesul de reconstrucție sau restituire.

b) *Reconstrucția holografică* (fig. 18.2). Se iluminează holograma (18.2) printr-o undă de reconstrucție identică undei de referință A_r care a servit la înregistrare, identitate care nu este indispensabilă, dar ușurează demonstrația matematică fără a afecta generalitatea concluziilor. Amplitudinea transmisă de hologramă va fi

$$A_i = \tau_i A_r = A_r - \frac{\gamma}{2}(A_0 A_r^* A_r + A_0^* A_r A_r) = A_r - \frac{\gamma}{2}(A_0 + A_0^* A_r^2). \quad (18.4)$$

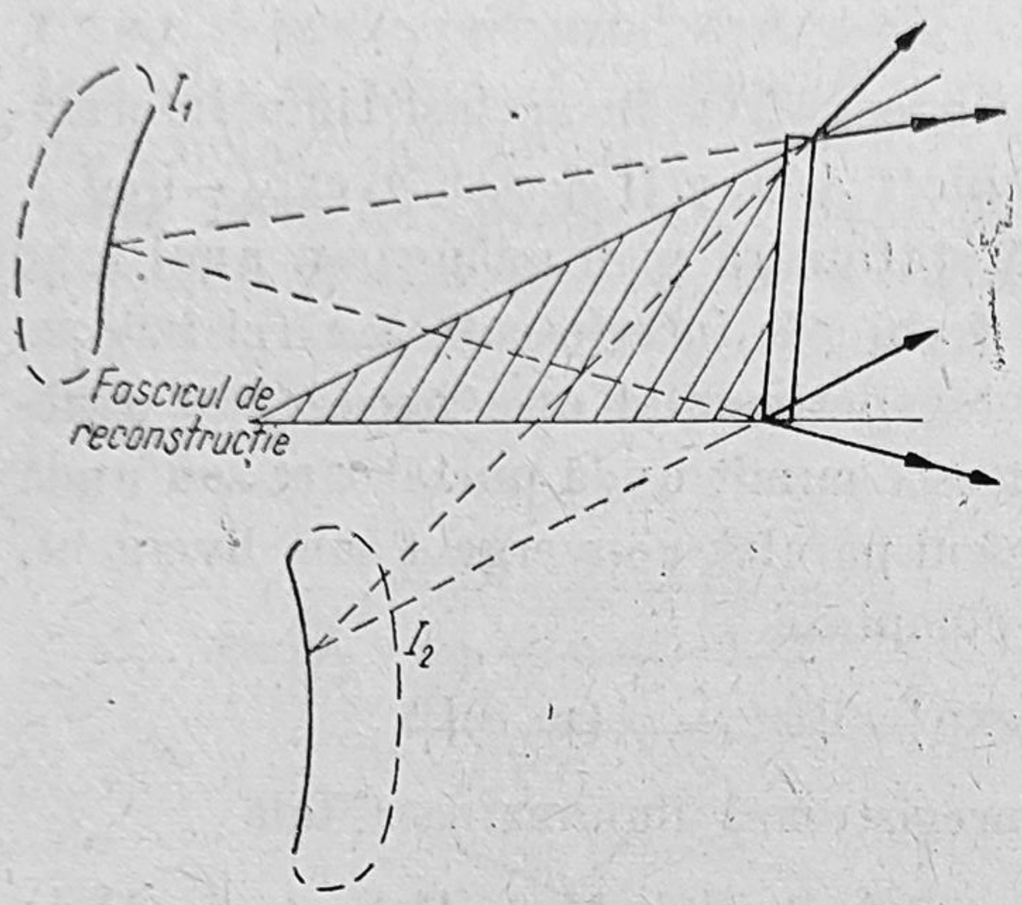


Fig. 18.2

Așadar, holograma restituie trei unde: primul termen din relația (18.4) corespunde undei de referință transmise direct (în realitate această undă este perturbată de termenul $(\gamma/2) \cdot |A_0/A_r|^2$ neglijat în cazul în care $|A_r| \gg {}_0|A_0|$); al doilea termen reprezintă, cu un factor de proporționalitate $-\gamma/2$ amplitudinea complexă A_0 difractată pe obiect în planul H la înregistrarea holografică. Această undă formează imaginea I_1 tridimensională cu toate proprietățile obiectului: relief, paralaxă și profunzime de cîmp. Dacă, de exemplu, obiectul este reprezentat de o suprafață de undă dată de un sistem coerent oarecare, la reconstrucție se va obține suprafața de undă respectivă; al treilea termen reprezintă a doua imagine I_2 denumită conjugată, spre deosebire de imaginea I_1 numită directă sau primară.

Proprietățile fundamentale ale hologramei. a) Factorul de contrast γ al emulsiei nu intervine în expresia (18.4) decît sub forma unui factor constant. Semnul lui γ (+ pentru emulsii negative, — pentru emulsii pozitive) fixează faza undei difractate cu π, aproximativ: o copie a unei holograme care inversează semnul lui γ are aceleași proprietăți ca și holograma originală.

b) Spre deosebire de fotografia curentă, care constituie o corespondență punct cu punct, o hologramă constituie o corespondență punct cu planul întreg al hologramei. Astfel, o porțiune oarecare a hologramei este suficientă pentru a reconstitui imaginea întregului obiect difuzant. Însă, această proprietate nu rămîne valabilă în cazul obiectelor nedifuzante. În particular, în holografia Fourier o porțiune determinată a hologramei nu permite decît reconstituirea unor anumite frecvențe spațiale ale obiectului.

c) Separarea unghiulară a celor trei unde transmise de hologramă la reconstituire se datorează înclinării fasciculului de referință. Dar separarea poate avea loc în anumite condiții, chiar dacă unda este normală pe placa holografică.

Clasificarea hologramelor. După tipul montajului și după modul de prelucrare a emulsiilor fotosensibile hologramele pot fi împărțite în: holograme Fresnel, holograme Fraunhofer-Fourier, holograme de fază, holograme în volum.

Montajele pentru obținerea hologramelor Fresnel se caracterizează prin poziția obiectului la distanță finită față de planul de înregistrare, figura 18.1, b reprezentînd un montaj tipic.

Hologramele Fraunhofer-Fourier se obțin atunci cînd distanța de la obiect în planul hologramei este mult mai mare decît diemensiunile obiectului. Astfel, dacă obiectul este situat în planul focal obiect, iar holograma în planul focal imagine al unei lentile convergente (fig. 18.3), se constată că distribuția amplitudinii complexe în planul hologramei reprezintă transformata Fourier a distribuției amplitudinii din planul obiect. Aceste holograme sînt de tip Fourier, iar lentila constituie un operator Fourier spațial.

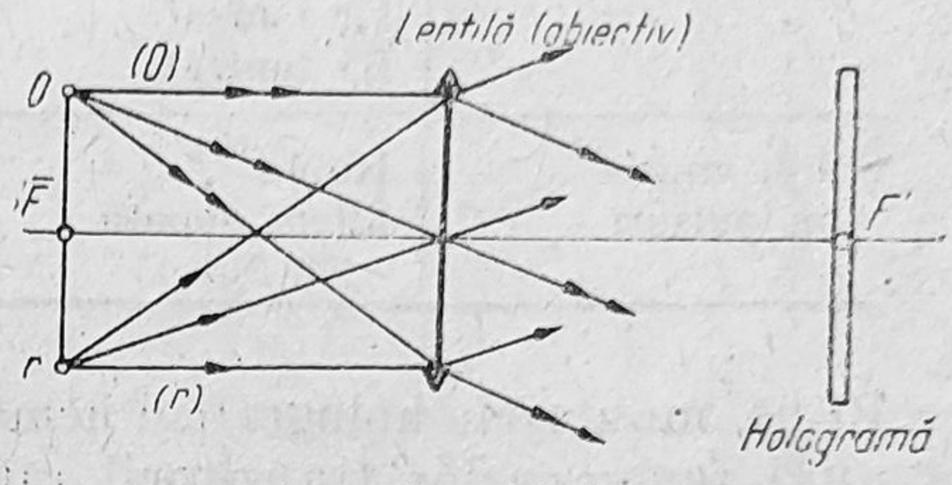


Fig. 18.3

Hologramele de fază se obțin folosind variații ale grosimii sau ale indicelui de refracție ale mediului de înregistrare. Cea mai utilizată metodă este albirea emulsiilor fotografice, variațiile de grosime ale emulsiei apărînd datorită comportării diferite ale regiunilor expuse diferit, la acțiunea unor agenți chimici.

Hologramele în volum (Bragg) se obțin atunci cînd grosimea peliculei fotosensibile este de același ordin de mărime sau mai mare decît interfranja hologramei, adică

$$h \geqslant d \simeq \lambda/\sin \varphi \qquad (18.5)$$

unde h este grosimea peliculei fotosensibile, λ lungimea de undă a radiației utilizate, φ defazajul dintre undele obiect și de referință. Cum grosimea peliculelor fotosensibile utilizate curent este $h \simeq 20$ μm, condiția (18.5) se îndeplinește pentru majoritatea cazurilor. Holograme *subțiri* se obțin practic pentru unghiuri foarte mici ; de exemplu, pentru sursa laser He—Ne : $\sin \varphi < \lambda/h \simeq 0{,}6/20 = 0{,}03$ sau $\varphi < 2°$. Hologramele în volum conțin franje în grosimea materialului fotosensibil, direcția și localizarea lor depinzînd de direcțiile relative și de forma undelor obiect și de referință. Montajele pentru obținerea holoaramelor în volum nu diferă în principiu de cele pentru hologramele subțiri.

18.2. Componentele montajelor holografice

Principalele componente ale unui montaj holografic sînt : sursa laser, componentele mecanice (masa de holografie și suporții pentru componentele optice), componentele optice (lentile, sisteme afocale, microobiective, filtre spațiale-pinhole, lame divizoare de fascicul-beam splitter, oglinzi, prisme colț de cub etc.), materialul fotosensibil.

1) Sursele laser cele mai utilizate în holografie și parametrii lor sînt indicate în tabelul 18.1. Laserii solizi funcționează în pulsuri foarte scurte

Tabelul 18.1

Tip	Laser	nm	*P*	*m*
Gaz, emisie continuă	He—Ne	632,8	5—100 mW	50—20
	Ar ionizat	488	1 W	10
	Ar ionizat	514,5	1 W	10
	Kr ionizat	520,8	50 mW	10
	Kr ionizat	568,2	50 mW	10
	Kr ionizat	647,1	150 mW	10
Solid, emisie în pulsuri	Rubin	694,3	100 MW	1
	Sticlă dopată cu Nd	530	50 MW	2

≈10 ns, montajele holografice nemaifiind sensibile la vibrații. Se utilizează la studiul fenomenelor tranzitorii rapide. Dezavantajele sînt prețul ridicat și coerența, în general, slabă.

Un laser poate funcționa pe mai multe moduri axiale și transversale, ceea ce determină coerența lui temporală, respectiv spațială. În holografie este necesară o lumină puternic coerentă, care se obține prin funcționarea monomod a laserului (*TE Moon*) și prin stabilizarea frecvenței; aceasta însă duce la micșorarea puterii laserului. Coerența temporală este evaluată prin parametrul lungime de coerență l_c, care limitează diferența de drum optic între fasciculele obiect și de referință care produc hologramа. Teoretic, lungimea de coerență este definită de relația : $l_c = \lambda^2/\Delta\lambda$, unde $\Delta\lambda$ reprezintă lățimea liniei laser. Experimental lungimea de coerență se determină cu montajele prezentate schematic în figura 18.4 : a) interferometrul Michelson utilizat pentru măsurarea lungimii de coerență a surselor laser cu emisie continuă. Pentru o diferență de drum optic zero contrastul franjelor obținute pe ecran este maxim ; se modifică diferența de drum optic între cele două brațe ale interferometrului pînă cînd contrastul franjelor se anulează, aceasta avînd loc pentru o diferență de drum optic *d*. Pentru a obține un contrast bun se estimează lungimea de corernță : $l_c \simeq d/4$.

b) Etalonul Fabry-Pérot, care produce un număr mare de fascicule cu diferențe de drum optic multiplu de $2L$, scăderea intensității punctelor imagine la reconstrucția hologramei indicînd lungimea de coerență a laserului. Acest montaj se utilizează la măsurarea lungimii de coerență a unui laser în impulsuri.

Coerența spațială se testează cu montajele reprezentate schematic în figura 18.5 :

a) Pentru sursele laser cu emisie continuă se observă configurația transversală a fasciculului laser expandat cu un obiectiv de microscop (10:1) și filtrat spațial cu o micșodiafragmă (pinhole) cu ∅ 15 μm, plasată în focarul microobiectivului. Distribuția transversală trebuie să fie uniformă, netedă.

b) Montaj pentru evaluarea coerenței spațiale a unui laser în impulsuri : se înregistrează hologramа unui transparent care conține o mină pe o suprafață difuză. La reconstrucție se obține o imagine reală pe un ecran alb mat, plimbînd un fascicul laser continuu necolimat pe suprafața hologramei. Dacă imaginea reală proiectată nu își schimbă luminanța la baleierea întregii suprafețe a hologramei, atunci coerența spațială a laserului în impulsuri este satisfăcătoare.

Fig. 18.4

Fig. 18.5

2) Componentele mecanice trebuie să asigure stabilitatea montajelor holografice, mai ales în cazul utilizării unui laser cu emisie continuă, pentru un timp de expunere de ordinul 0,1—5 secunde. Masa de holografie trebuie să amortizeze vibrațiile planșeului. De asemenea, laboratorul de holografie trebuie amplasat într-o zonă lipsită de surse de vibrații, iar temperatura să fie constantă. Testarea stabilității mecanice a montajelor holografice utilizînd sursa laser cu emisie continuă se face cu interferometrul Michelson reprezentat în figura 18.4, a. Se urmărește pe ecran variația franjelor în timpul aproximativ al unei expuneri; se admite o variație maximă de 0,1 franjă.

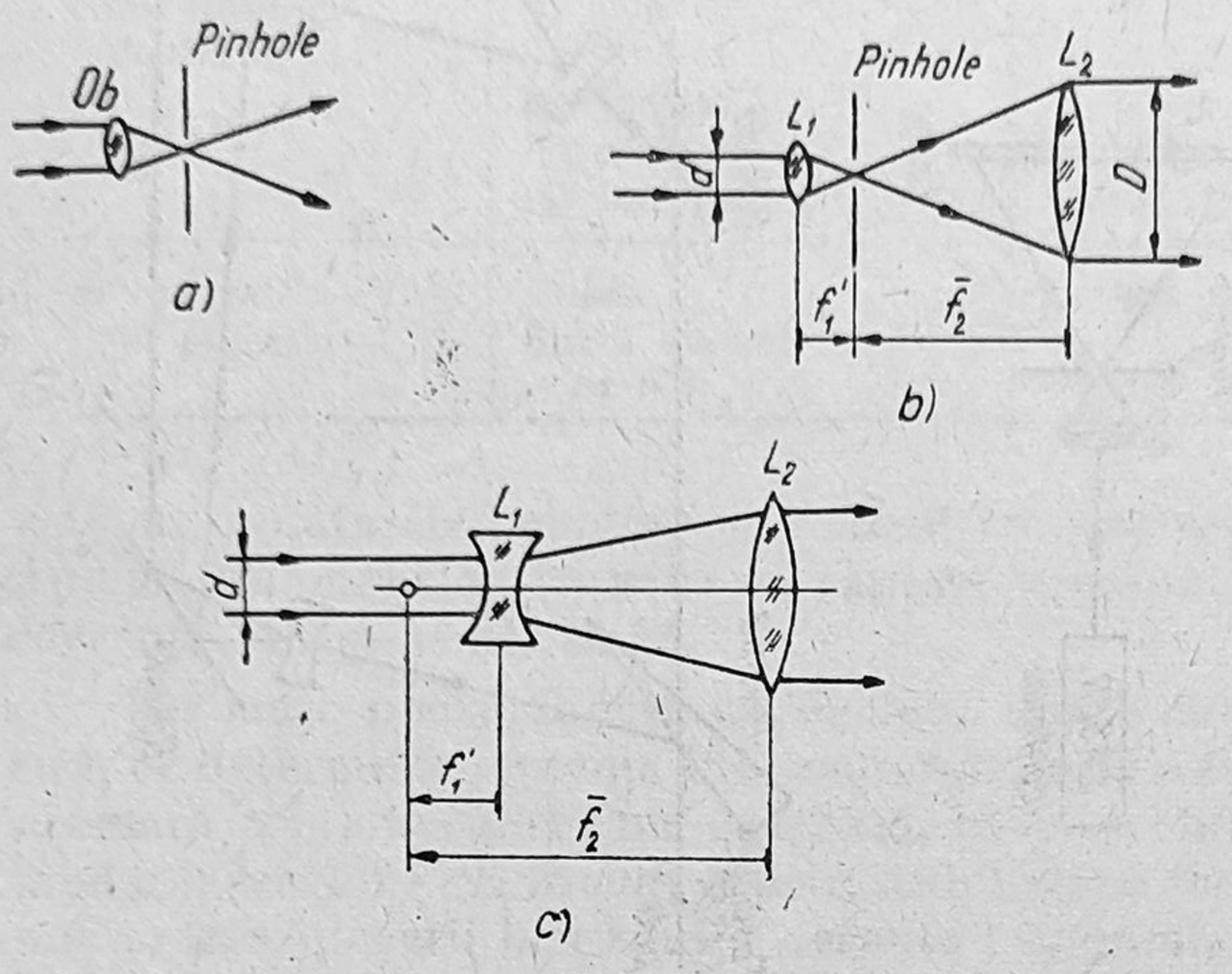


Fig. 18.6

3) Componentele optice utilizate în holografie trebuie să asigure o propagare corectă a fasciculelor laser. În cazul focalizării într-un punct al fasciculului laser, pentru a evita perturbațiile care le-ar produce maximele laterale ale figurii de difracție se utilizează microdiafragme (pinhole) cu diametrul de ordinul 10—25 μm, plasate în focarul respectiv, pentru a filtra spațial din figura de difracție numai maximul central. Un obiectiv de microscop (microobiectiv) împreună cu un filtru spațial formează un expandor de fascicul laser (fig. 18.6, a).

Pentru micșorarea divergenței fasciculului laser se utilizează sisteme optice afocale (fig. 18.6, b, c) care sînt asemănătoare unor lunete așezate invers. Dacă divergența fasciculului inițial este σ, atunci grosismentul sistemului Γ asigură o divergență σ', care rezultă din relația

$$\Gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{d}{D} < 1$$

unde d este diametrul fasciculului incident (pupila de intrare), iar D diametrul fasciculului emergent (pupila de ieșire). De remarcat faptul că în cazul primei lentile L_1 divergente nu mai este necesară filtrarea spațială a figurii de difracție deoarece focarele $F_1' \equiv F_2$ sînt virtuale, situate în fața sistemului optic (fig. 18.6, c).

Lamele divizoare de fascicul ca și oglinzile se obțin prin depuneri controlate de materiale metalice sau dielectrice pe lame plan-paralele care îndeplinesc condiții riguroase de planeitate și paralelism (sub 1 franjă).

4) Materialele fotosensibile utilizate în holografie trebuie să îndeplinească anumite condiții severe: foarte înaltă rezoluție, sensibilitate energetică mare, liniaritate, planeitate optică. Materialelele fotosensibile utilizate

în prezent sînt indicate în tabelul 18.2, cercetările privind aceste materiale continuînd deosebit de asiduu și de diversificat, deoarece progresele în holografie depind de evoluția calitativă a acestora.

Tabelul 18.2

Materialul fotosensibil	Rezoluția [mm^{-1}]	Sensibilitate energetică [erg/cm^2]	Tipul înregistrării : absorbantă (A) sau de fază (F).
Emulsii fotografice	2 000	$20-10^7$	A, F
Materiale fotocrome	2 000	10^5-10^7	A
Fotopolimeri	3 000	10^4-10^6	F
Materiale termoplaste	1 000	$10-100$	A, F
Gelatină dicromată	2 000	10^5	F
Cristale lichide	100	10^7-10^8	A
Cristale electro-optice	3 000	10^9	F
Absorbanți neliniari	3 000	10^3-10^6	A, F
Detectori fotoelectrici	100	10^2	A

Emulsiile fogografice utilizate în holografie sînt pancromatice (adică sensibile în tot domeniul vizibil) sau sensibilizate în roșu, au rezoluție și contrast foarte mare (granulație foarte fină $\approx 0{,}05\ \mu m$), dar sînt foarte puțin sensibile (lente). Plăcile holografice cele mai utilizate sînt Kodak 649 F și Agfa-Gevaert 10 E 75, care ating rezoluții de $2\,500-3\,000\ mm^{-1}$. Sensibilitatea spectrală a acestor plăci este dată prin variația expunerii energetice în funcție de λ (fig. 18.7, a). În ceea ce privește sensibilitatea energetică, în holografie se utilizează caracteristica transmitanță în amplitudine $\tau_a = \tau_i^{1/2}$, funcție de expunerea H, caracteristică ridicată pentru o anumită lungime de undă utilizată la înregistrare (fig. 18.7, b, c), de revelatorul folosit, de timpul și de temperatura de developare. Punctele de funcționare optime pentru plăcile Kodak 649 F și Agfa-Gevaert 10 E 75 sînt la aproximativ 70 $\mu J/cm^2$, respectiv 2,5 $\mu J/cm^2$, pentru utilizarea radiației unui laser *He—Ne* ($\lambda = 632{,}8$ nm).

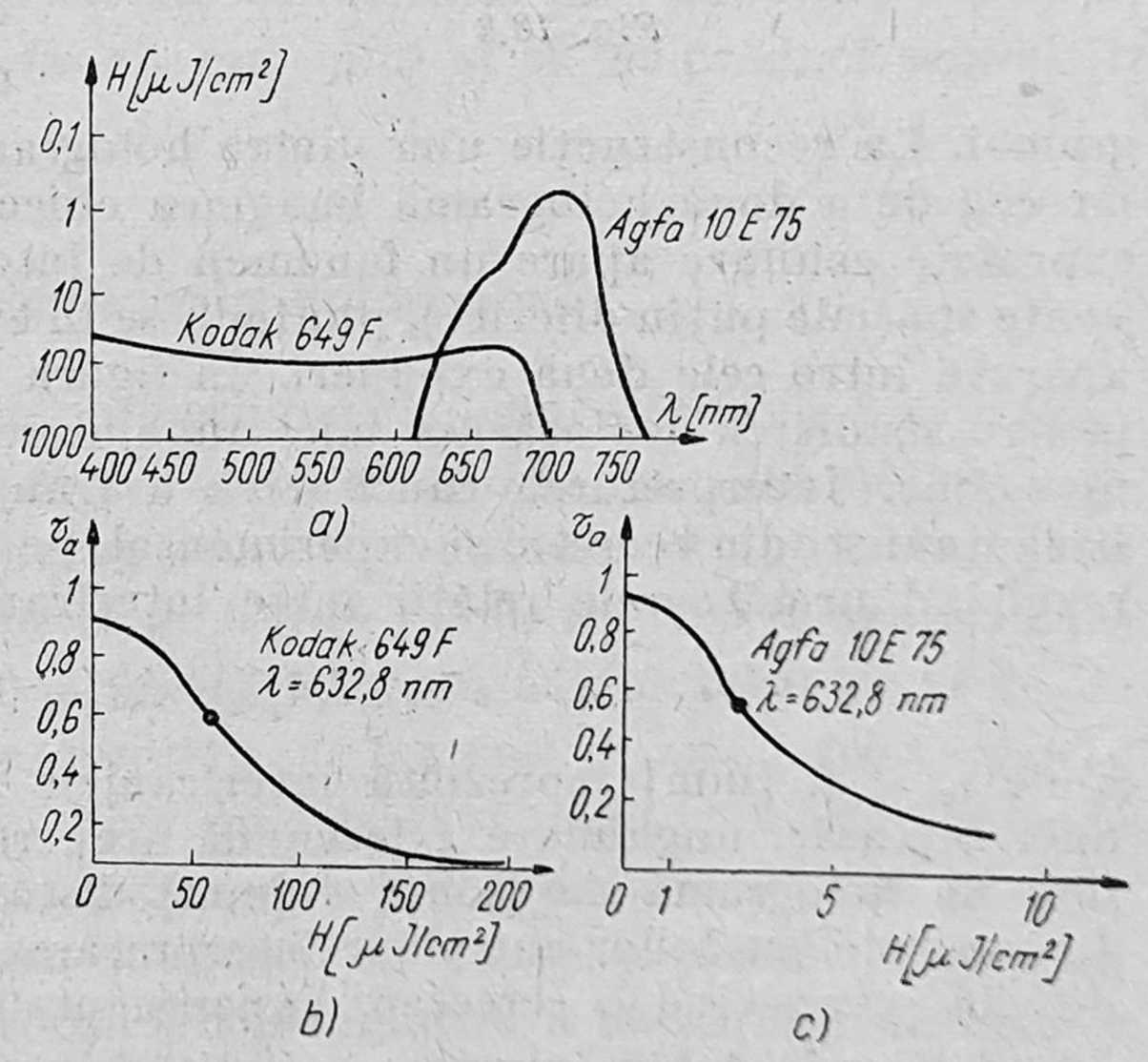


Fig. 18.7

18.3. **Aplicații ale holografiei în optica tehnică**

Dintre aplicațiile foarte variate ale holografiei ne vom ocupa numai de cele mai utilizate în optica tehnică : interferometria holografică, microscopia holografică și măsurarea *FTO* prin metode holografice.

18.3.1. **Interferometria holografică**

Interferometria holografică (*I.H.*) prezintă următoarele avantaje esențiale față de metodele interferometrice clasice : permite măsurători tridimensionale, nu necesită modele transparente (ca în elasticimetrie), permițînd determinarea microdeformațiilor complexe a oricărui tip de obiect, asigură înregistrarea și vizualizarea static (cu un laser continuu) sau dinamic (cu un laser în impulsuri) a variațiilor unui obiect între două momente ale unui proces evolutiv. Metodele interferometriei holografice pot fi clasificate, după modul de înregistrare și reconstrucție, în următoarele :

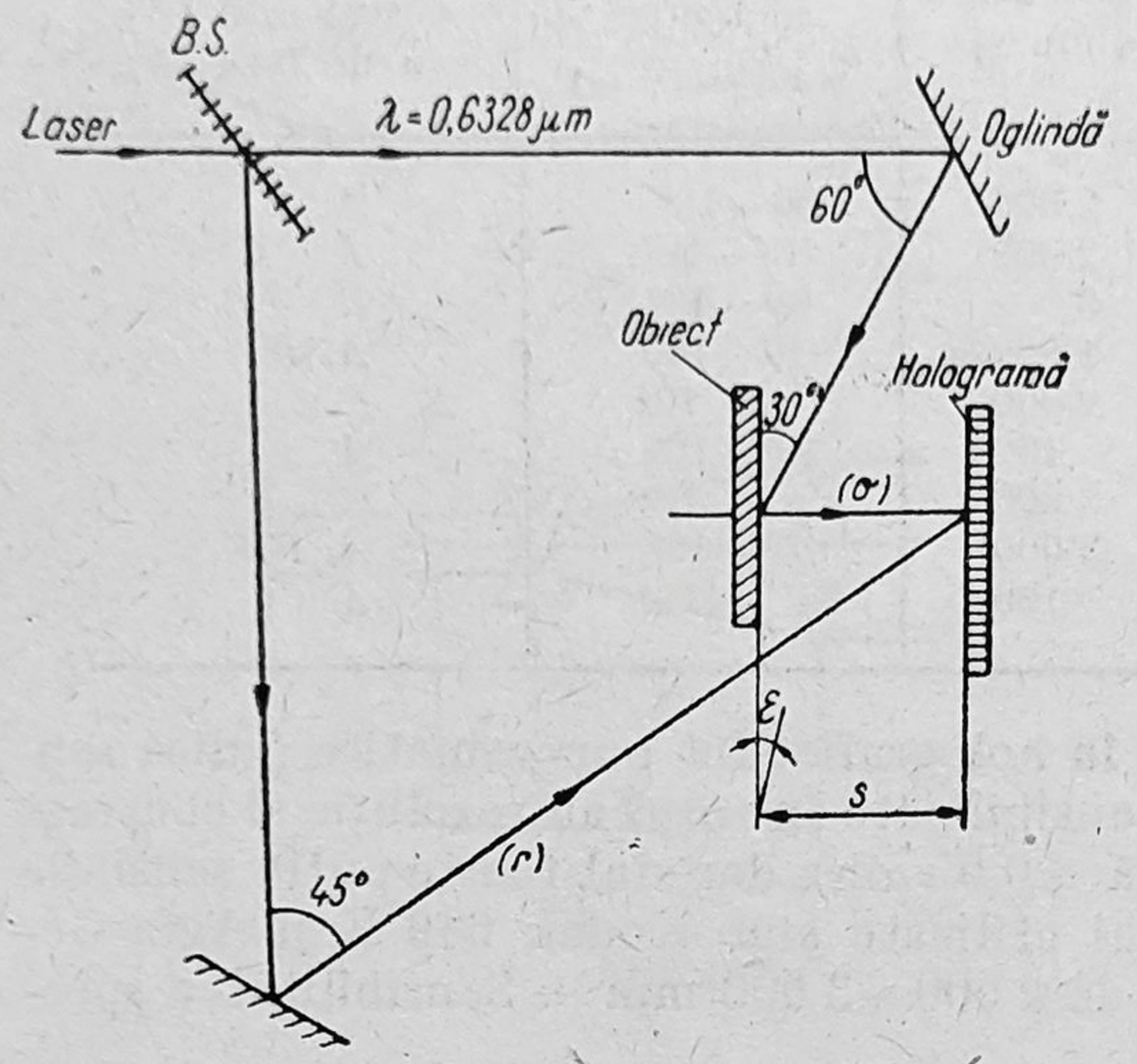


Fig. 18.8

a) *I.H. prin dublă expunere* constituie înregistrarea variațiilor unui obiect între două expuneri pe aceeași placă fotografică (într-un montaj nemodificat); după developare nu mai este necesară repoziționarea exactă a hologramei. La reconstrucție una dintre holograme constituie imaginea primară, iar cea de a doua hologramă imaginea obiectului deformat ; între cele două suprafețe echifaze apare un fenomen de interferență (bătăi între două frecvențe spațiale puțin diferite), punîndu-se în evidență diferențele de drum optic apărute între cele două expuneri. În figura 18.8 este reprezentat un montaj pentru studierea deplasărilor mici unghiulare și de translație, specifice mecanicii fine. Interpretarea cantitativă a franjelor de interferență se face pe baza unui studiu teoretic și experimental, pentru unghiurile indicate pe figură rezultînd următoarele relații între interfranje și deplasările obiectului

$$\varepsilon = 87{,}4/i_\varepsilon \; ; \; \Delta s = 0{,}6328 s/i_s$$

unde i_ε și i_s [mm] reprezintă interfranjele figurii de interferență în cazul unei deplasări unghiulare ε [secundă arc], respectiv în cazul unei deplasări față de hologramă Δs [μm] ; s [mm] distanța de la obiect la hologramă. În cazul deformărilor complexe interpretarea cantitativă a franjelor este mai dificilă, necesitînd o cercetare experimentală aprofundată.

I.H. prin dublă expunere se aplică la punerea în evidență a fenomenelor termice, microdeformațiilor și microdeplasărilor. De asemenea, utilizînd ca sursă un laser în impulsuri, *I.H.* prin dublă expunere se utilizează pentru studierea unor fenomene tranzitorii rapide, unde de șoc, curgeri de fluide etc.

b) *I.H. în timp real* constă în suprapunerea imaginii obiectului etalon reconstituit în urma developării și repoziționării exacte în montaj a hologramei acestuia, cu obiectul care evoluează în timp. Deci, holograma obiectului etalon, iluminată de fasciculul laser, materializează unda etalon care interferă

cu unda obiect, și acesta fiind iluminat de laser, franjele de interferență, modificîndu-se în timp, traduc variațiile obiectului. Pentru a analiza franjele de interferență, acestea pot fi observate direct sau fotografiate și chiar filmate.

Montajele utilizate nu diferă în principiu de cel prezentat în figura 18.8, dar rama (suportul) hologramei trebuie să asigure repoziționarea riguroasă a acesteia după developare. În acest sens, au fost realizate suporturi speciale care permit developarea (prelucrarea) plăcilor fără a fi scoase din montaj.

c) *I.H. mediată în timp* constă în înregistrarea evoluției undei obiect în timpul expunerii. Această metodă se aplică pentru studiul vibrațiilor sau deplasărilor care produc o diferență de fază a undei obiect mai mică decît π; peste această valoare are loc dispariția franjelor.

d) *I.H. pentru generarea conturelor* se aplică în două variante: înregistrarea, cu o singură expunere, utilizînd două lungimi de undă puțin diferite, variația obiectului corespunzătoare la două franje succesive fiind: $\Delta s = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 - \lambda_2)$; înregistrarea prin dublă expunere a hologramei obiectului, mediul în care se află obiectul modificîndu-și indicele de refracție. Variația obiectului corespunzătoare la două franje succesive este

$$\Delta s = \frac{\lambda_0}{[1 + (1/\cos\ \theta)](n_2 - n_1)}$$

unde λ_0 este lungimea de undă a radiației laser utilizate, iar θ este unghiul dintre normala la hologramă și fasciculul de referință (sau de citire). Variația indicelui de refracție trebuie să fie cît mai mică și să nu producă schimbări fizice ale obiectului.

18.3.2. **Microscopia holografică**

Holografia oferă posibilitatea obținerii unei imagini mărite de $\beta = y'/y = \lambda'/\lambda$ ori, dacă la reconstrucție se utilizează o radiație coerentă cu lungimea de undă $\lambda' \gg \lambda$. Astfel, dacă la înregistrare $\lambda = 0{,}5$ nm, iar la reconstrucție $\lambda' = 500$ nm mărirea obținută direct ar fi $\beta = 1\,000:1$; dacă la analiza imaginii s-ar utiliza un microscop convențional grosismentul total ar trece de $10^6\times$. Însă, nu există fascicule coerente cu lungimi de undă foarte mici; de asemenea, la o astfel de mărire apar dificultăți tehnice deosebite legate de corectarea aberațiilor. În prezent, microscopia holografică se rezumă la două aspecte: posibilitatea înregistrării și redării în volum a obiectelor mici și, pe de altă parte, posibilitatea corectării holografice a aberațiilor sistemelor optice folosite în microscopia clasică.

Înregistrarea holografică în volum a obiectului observat microscopic poate fi realizată fie înainte, fie după mărirea imaginii într-un microscop convențional. Mai avantajoasă este a doua metodă, atît din punct de vedere al montajului, cît și din cel calitativ: în figura 18.9 sînt prezentate două montaje de microscopie holografică prin reflexie (*a*) și prin transmisie (*b*). La reconstrucție, imaginea obiectului poate fi explorată în profunzime, de

ordinul zecilor de μm, într-un timp ce nu mai este afectat de evoluția fenomenului studiat. Laserii utilizați în microscopia holografică pot fi cu emisie continuă (He—Ne, cu putere $\simeq 40$ mW) sau în impulsuri (laser cu cristal de rubin), după cum sînt observate procese statice sau dinamice.

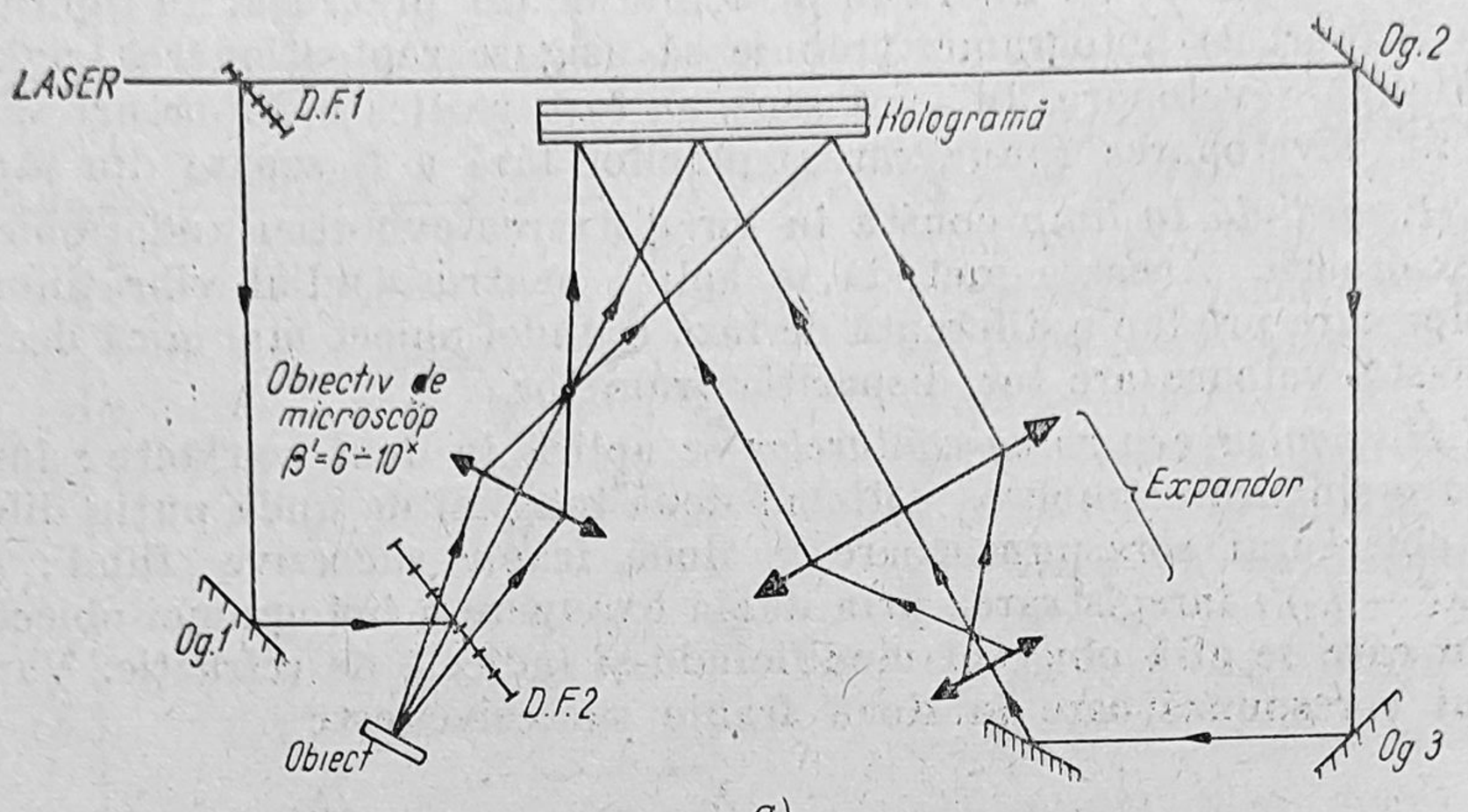


Fig. 18.9

18.3.3. Metode holografice de măsurare a FTO

Ținînd seama de principiul care stă la baza măsurării funcție de transfer optice (*FTO*), metodele holografice se pot clasifica în metode de autocorelație și metode de analiză, după cum se aplică relația de autocorelație (17.43) sau, respectiv, relația (17.40).

a) *Metodele de autocorelație* constau din două etape:

— înregistrarea pe două holograme identice (montajul este reprezentat în figura 18.10) a funcției pupilare a sistemului optic testat. Plăcile holografice sînt așezate cu fețele cu gelatina în contact, frontul undei obiect avînd centrul în focarul $\bar{F}$ al sistemului optic testat, iar unda plană de referință înclinată cu unghiul θ față de normala hologramei;

— la reconstrucție (după developare) cele două holograme sînt suprapuse și deplasate una față de cealaltă fiind iluminate de unda plană de referință (r). În acest caz, amplitudinea luminoasă ce rezultă din hologramă în direcția θ, sau în direcție normală, este proporțională cu autocorelarea funcției pupilare, conform relației de autocorelație. Detectînd fotoelectric această amplitudine luminoasă, atît modulul cît și faza *FTO* pot fi obținute normînd amplitudinea și faza oscilogramei.

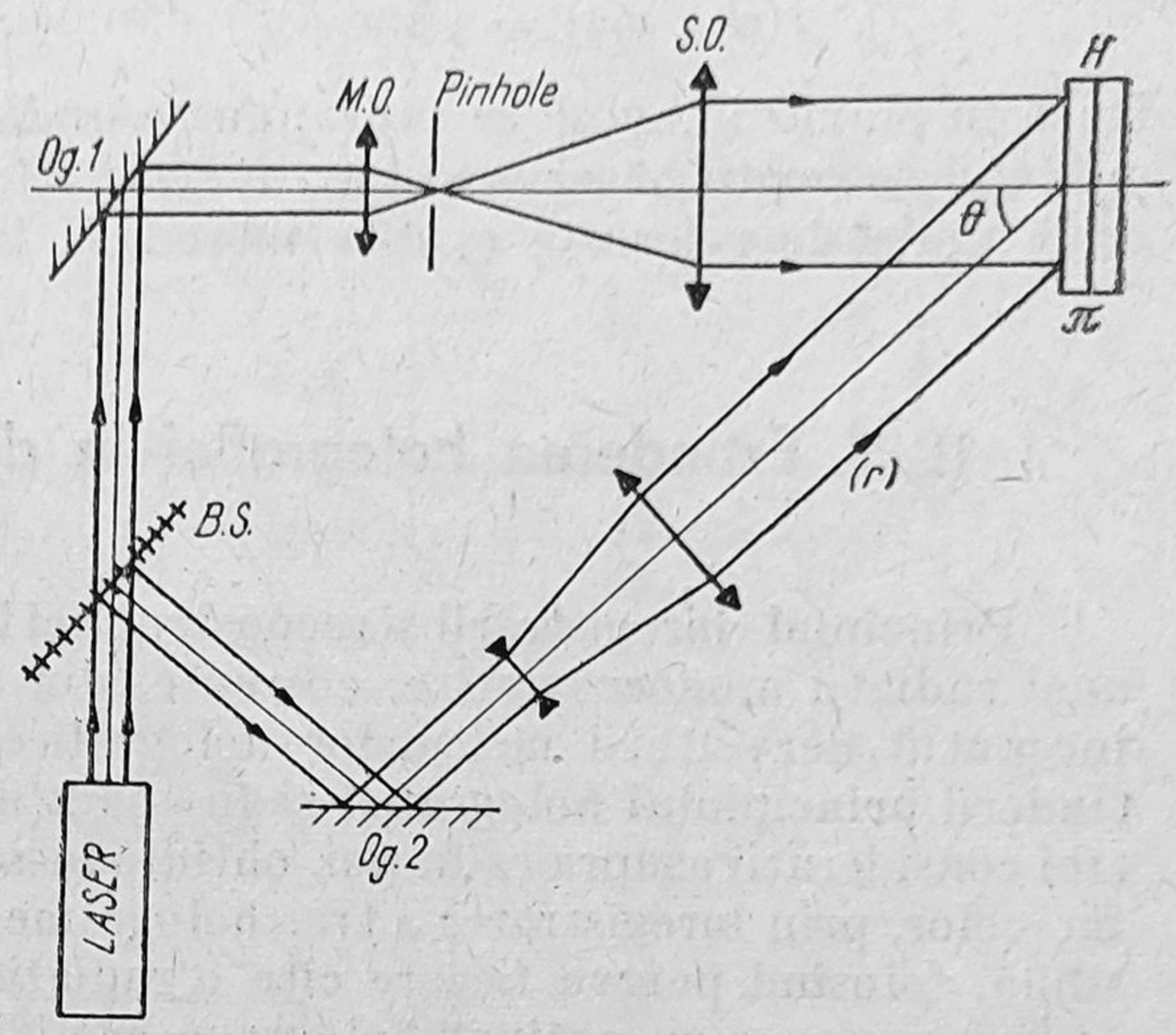


Fig. 18.10

De remarcat simplitatea mijloacelor de măsurat și faptul că nu este necesară modularea sinusoidală a fluxului luminos, deoarece acesta are frecvența purtătoare dată de viteza relativă constantă între cele două holograme. Dificultatea metodei rezidă în asigurarea distanței și a vitezei relative constante între cele două holograme.

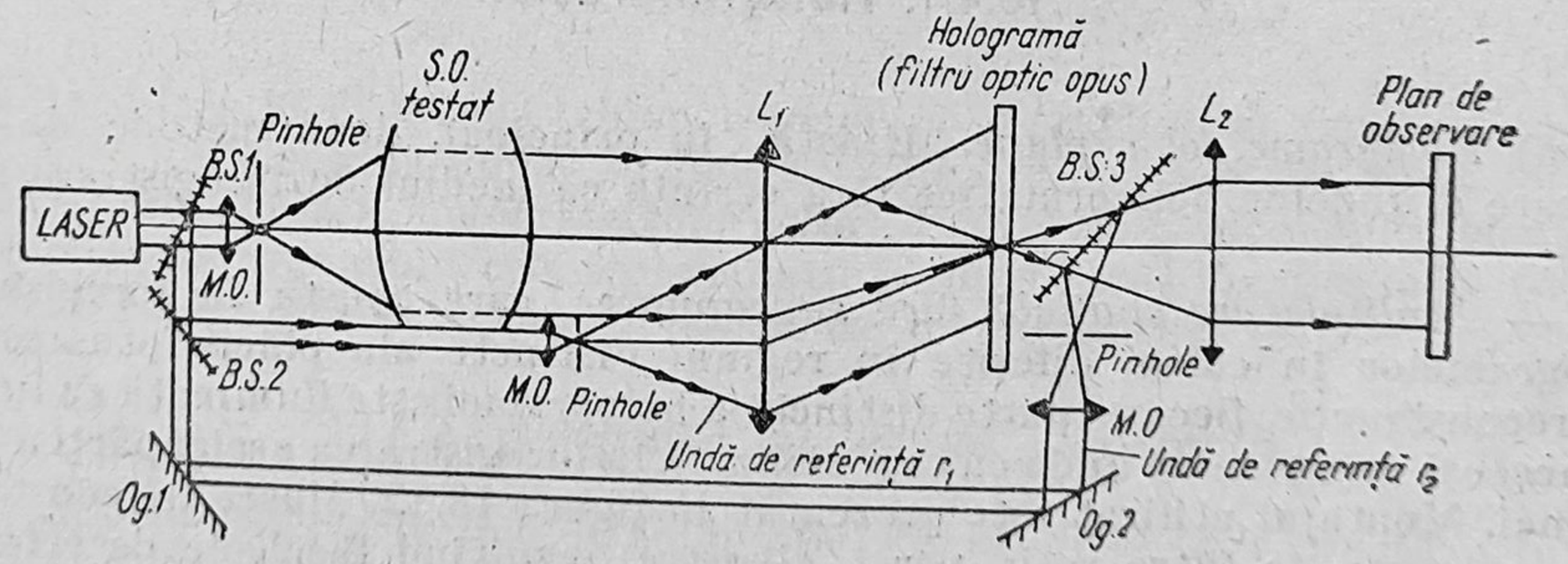


Fig. 18.11

b) *Măsurarea FTO prin metoda de analiză holografică.* Expresia complex conjugată a transformatei Fourier f a unui semnal bidimensional F poate fi înregistrată pe o hologramă care se numește filtru optic opus sau conjugat; iluminînd acest filtru cu spectrul Fourier f al semnalului F, în spatele filtrului se obține funcția $|f|^2$. Dacă semnalul F este funcția pupilară a sistemului de

testat, atunci $|F|$ și $|F|^2$ corespund amplitudinii distribuției punctuale $E(x, y)$ și respectiv iluminării $I(x, y)$. Efectuînd încă o transformată Fourier cu o a doua lentilă din montaj, așa cum este reprezentat în figura 18.11 distribuția amplitudinii imaginii rezultante este transformata Fourier a lui F, adică $e(\omega_x, \omega_y)$ din relația

$$e(\omega_x, \omega_y) = \int E(x', y') \exp i(\omega_x x' + \omega_y y') \, dx' \, dy'.$$

Dacă în planul imaginii se suprapune o undă de referință r_2, atunci o dată cu modulul se poate observa și faza FTO. Prelucrarea datelor este mult ușurată dacă unda de referință r_2 este introdusă în lungul axei optice.

18.4. Extinderea holografiei în domenii neconvenționale

Principiul înregistrării și reconstrucției holografice se bazează pe utilizarea unei radiații monocromatice, coerente, din domeniul vizibil. Dar chiar de la începutul dezvoltării metodelor holografice s-a întrevăzut posibilitatea extinderii principiului holografiei și în condițiile nerespectării unora dintre cele trei considerații asupra radiației, obținîndu-se rezultate remarcabile în holografia color, prin înregistrarea a trei holograme distincte pe aceeași placă fotosensibilă, folosind pentru fiecare cîte o radiație diferită (roșie, verde, albastră). De asemenea, s-au obținut holograme utilizînd lumină necoerentă; principiul holografiei a fost aplicat cu rezultate bune în domeniul optic extins: holografia cu radiații X, în ultraviolet, dar mai ales în infraroșu. Un alt domeniu al undelor electromagnetice în care se aplică principiul holografiei este domeniul microundelor. Principiul înregistrării și reconstrucției holografice este extins și la unde acustice dînd naștere unui capitol nou al fizicii aplicate: holografia acustică.

18.4.1. Holografia color

a) *Holograme color plane.* Există, în principal, două metode de înregistrare a undelor policormatice fără cerința ca mediul de înregistrare să fie gros:

— *Multiplexare spațială fără suprapunere*, care constă în înregistrarea hologramelor în culori diferite în regiuni distincte ale plăcii fotosensibile. La reconstrucție fiecare parte distinctă a hologramei este iluminată cu lumină de aceeași lungime de undă ca cea utilizată la înregistrarea acelei părți a hologramei. Montajul utilizat este prezentat în figura 18.12. Masca M constă din benzi înguste de filtre roșii, verzi, albastre, rezultînd fascicule de referință monocromatice, care interferă cu lumina de aceeași culoare venind de la obiect, obținîndu-se un mozaic de holograme monocromatice nesuprapuse. Iluminarea hologramei prin aceeași mască va reconstrui suprafața undei obiect fără imagini mutuale. Montajul prezentat are dezavantajul unui raport *semnal/zgomot* prea mic, datorat undelor obiect de lungimi de undă diferite de cea pentru care are loc interferența.

— *Codarea fasciculului de referință* care constă în trecerea fasciculului de referință printr-o placă difuzoare care dispersează diferit fiecare componentă a radiației tricromatice. La reconstrucție holograma trebuie repoziționată precis și iluminată cu un fascicul de referință codificat identic ca la înregistrare.

b) *Holograme color în volum.* Separarea imaginii dorite de imaginile mutuale se face mult mai ușor folosind hologramele color în volum, deoarece imaginile date de acestea sînt foarte sensibile față de orientarea hologramei și de lungimea de undă, conform relației lui Bragg care definește difracția tridimensională : $2d \sin i = \lambda$, unde d este distanța între pla-

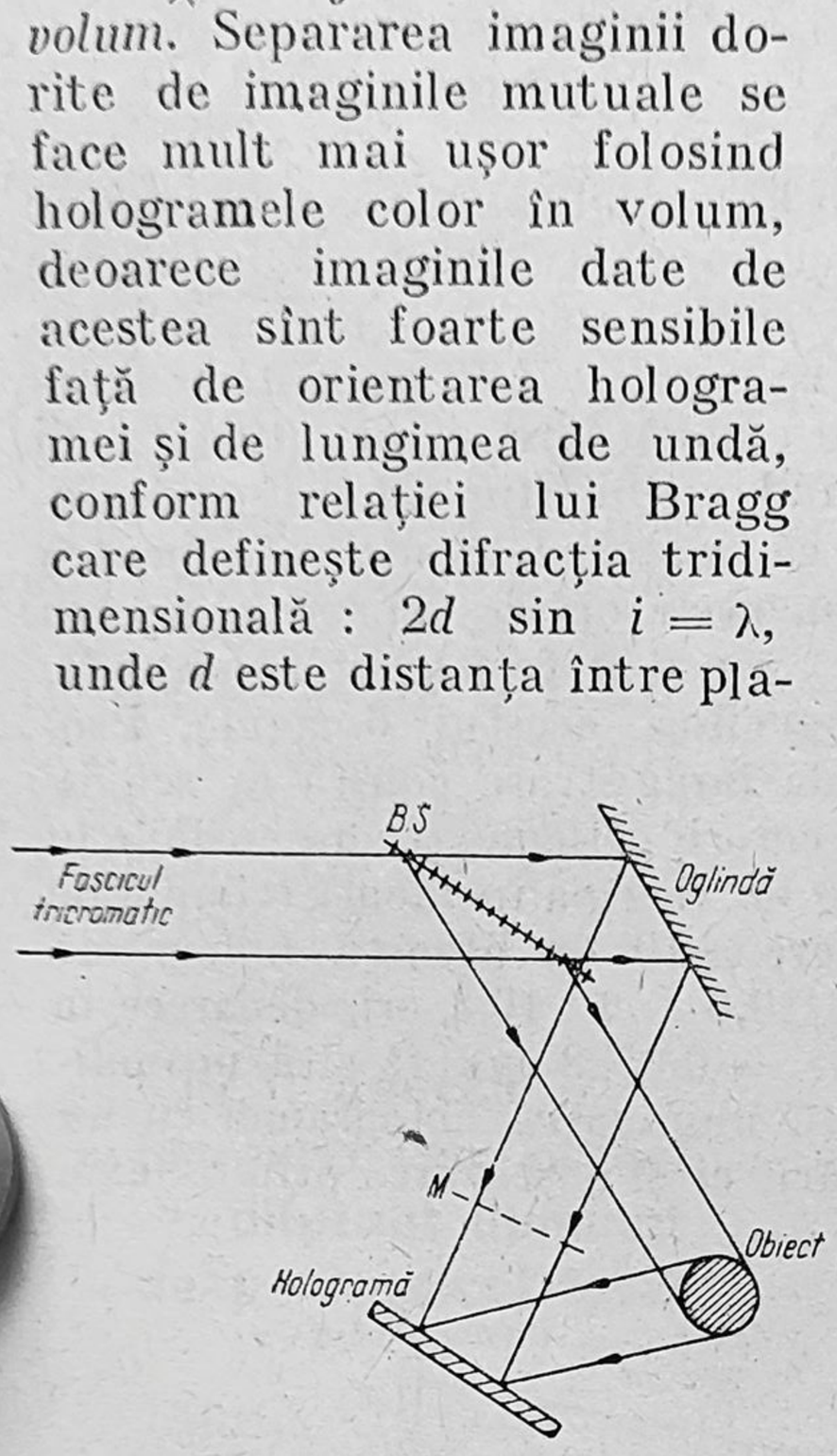


Fig. 18.12

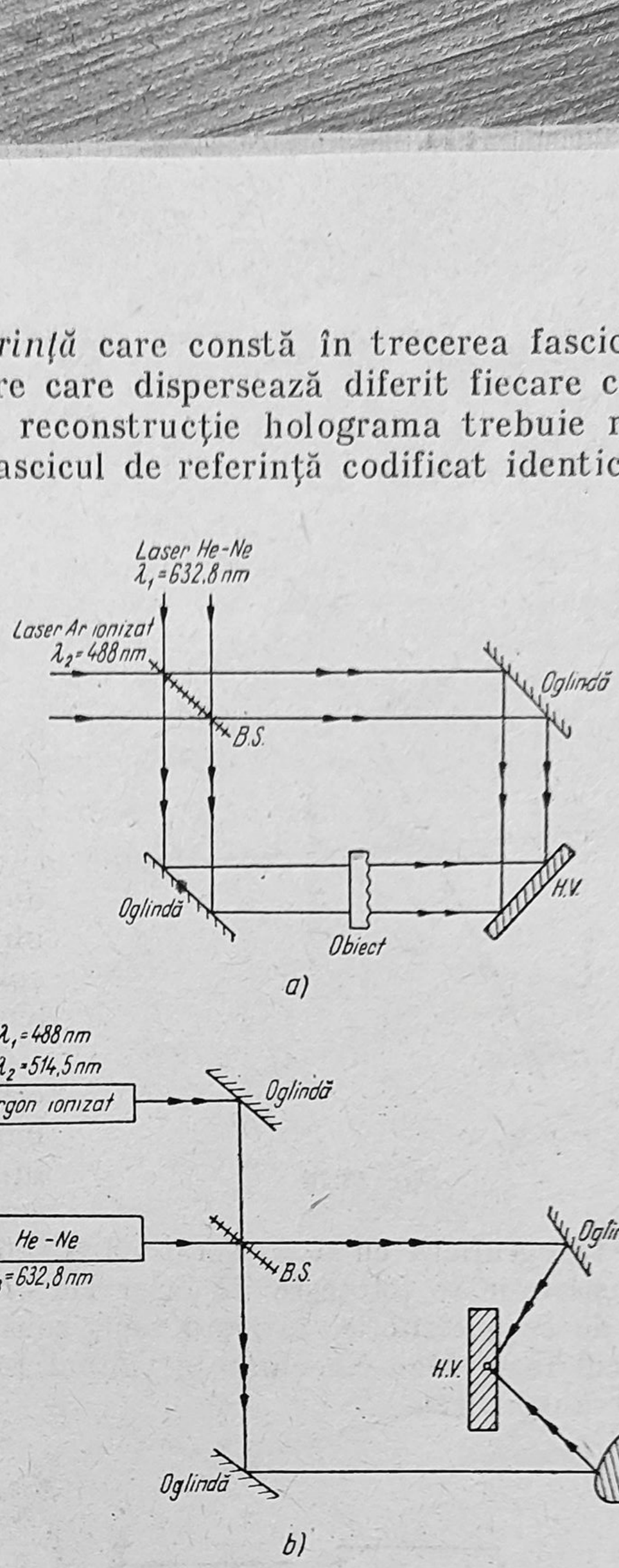


Fig. 18.13

nele de difracție ale rețelei tridimensionale, i — unghiul de incidență a radiației, λ — lungimea de undă. În figura 18.13 sînt prezentate două montaje pentru înregistrarea hologramelor color în volum : bicolor, respectiv tricromatic. Reprezentînd cele trei radiații laser utilizate pe diagrama culorilor se determină culorile ce pot fi reproduse de holograma color.

18.4.2. **Holografie cu lumină necoerentă**

Deși la baza principiului holografic stă condiția de coerență a luminii, s-au obținut holograme cu lumină necoerentă folosind o metodă de divizare a fasciculelor ce provin de la fiecare punct al obiectului în două fascicule ce interferă dînd o figură de franje, decodificarea acesteia avînd ca rezultat, la reconstrucție, o imagine unică. Dintre montajele holografice ce utilizează lumina necoerentă mai reprezentativ este cel din figura 18.14, constînd dintr-un interferometru triunghiular ce conține pe două laturi obiectivele O_1

și O_2 de distanțe focale $f_1' \neq f_2'$ și avînd focarele confundate pe cea de a treia latură. Radiația se poate propaga pînă la placa holografică în sens trigonometric, mărirea între planele $\bar{F}_1$ și F_2' (conjugate față de sistemul telescopic $O_1 + O_2$) fiind $\beta_1 = f_2'/f_1'$ sau în sens invers trigonometric $\beta_2 = f_1'/f_2'$.

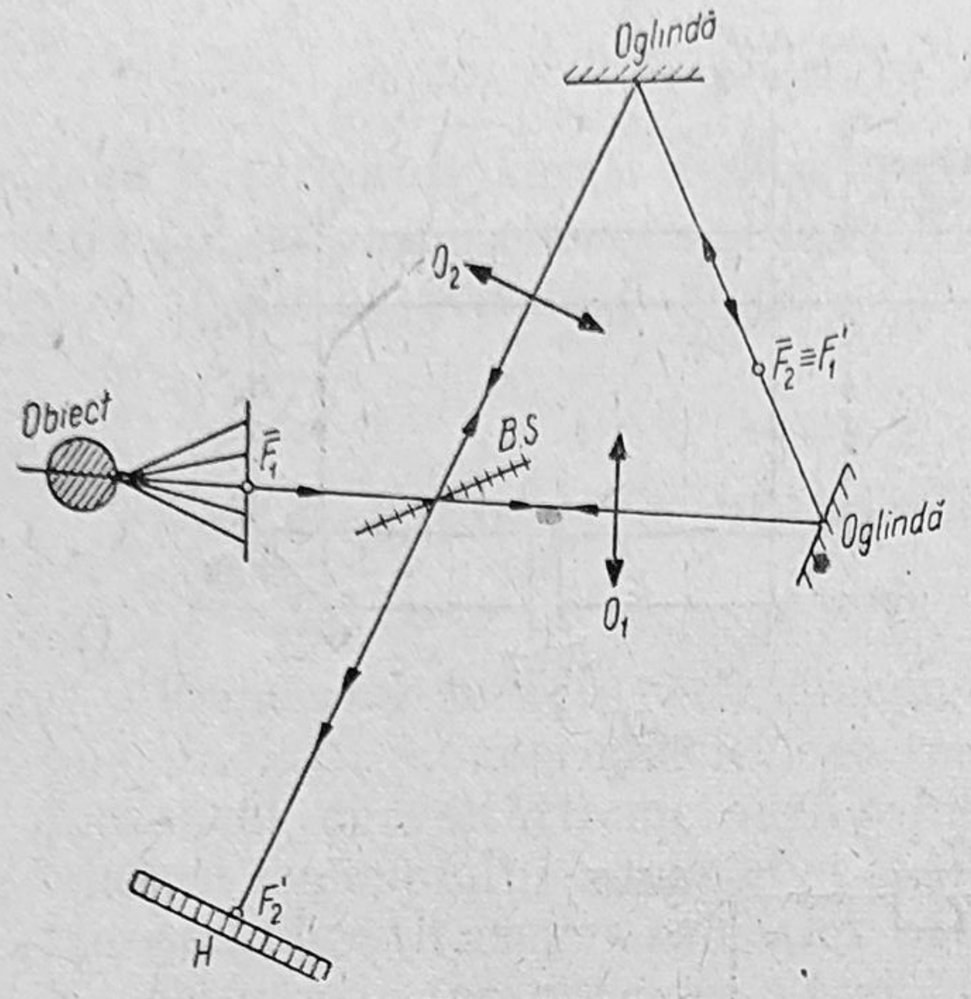


Fig. 18.14

18.4.3. **Holografia în domeniul infraroșu**

În domeniul infraroșu s-au realizat laseri cu parametri foarte buni, dintre care laserul cu CO_2, $\lambda = 10{,}6\ \mu m$. Montajele holografice *I.R.* prezintă o structură asemănătoare celor utilizate în domeniul vizibil (fig. 18.15), cu deosebirea că materialele utilizate pentru componentele optice (în special pentru lentile), ca și materialele fotosensibile, sînt specifice acestui domeniu. Procesul de înregistrare constă în schimbarea culorii peliculei termosensibile în funcție de energia incidentă (timpul de expunere $\simeq 10$ s), această hologramă fiind fotografiată cu o micșorare $\beta = 0{,}6328/10{,}6 = 1 : 16{,}8$ ori, deoarece la reconstrucție se folosește un laser He—Ne ($\lambda = 0{,}6328$ m). O altă posibilitate de reconstrucție, în timp real, constă în iluminarea hologramei cu un fascicul laser He—Ne chiar în timpul formării ei și observarea prin reflexie sau transmisie.

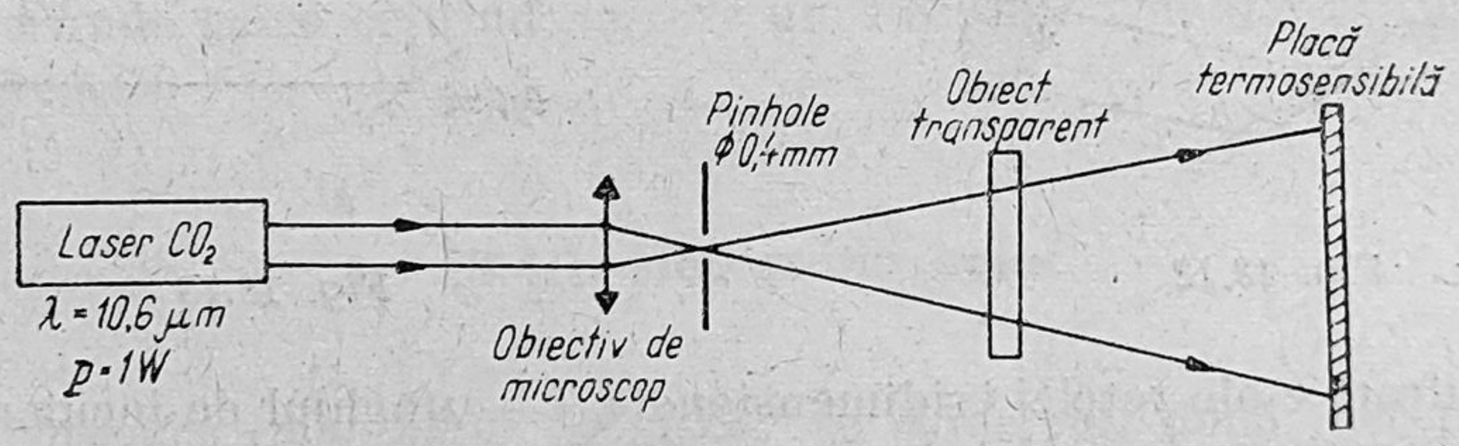


Fig. 18.15

19. OPTICA GRANULARĂ

Dacă un obiect difuzant este iluminat cu un fascicul laser, el dă impresia de a fi acoperit de o structură granulară foarte fină : toate punctele obiectului formează pe retină pete de difracție caracteristice sistemului optic al ochiului, interferențele acestor figuri de difracție producînd aspectul granular denumit *speckle*. Fenomenul este același dacă se înregistrează fogotrafic imaginea unui obiect iluminat de un laser : după developare, imaginea arată un

speckle care depinde de deschiderea obiectivului foto. Cu cît deschiderea este mai mare cu atît structura specklelui este mai fină, ceea ce este explicabil deoarece diametrul figurii de difracţie (pata Airy) scade dacă deschiderea obiectivului creşte. Dar nu este strict necesară formarea unei imagini pentru observarea unui speckle, deoarece un obiect difuzant iluminat de un laser produce un speckle în tot spaţiul înconjurător ; este suficient să se plaseze o placă fotografică la o distanţă oarecare de obiect pentru a înregistra un speckle. Prin analogie cu fenomenele de difracţie, în cazul utilizării unui sistem optic care formează imaginea unui obiect, aspectul granular se numeşte speckle de tip Frannhofer, iar în cazul înregistrării directe, fără sistem optic, aspectul granular se numeşte speckle de tip Fresnel. Aspectul speckle apare la înregistrarea holografică, reducînd calitatea imaginii, ceea ce a determinat găsirea unor metode de a-l reduce pe cît posibil. Dar s-a constatat că aspectul speckle poate fi foarte util în anumite situaţii, ; în ultimii ani tehnica speckle a deschis un nou capitol la opticii.

19.1. Speckle în imaginea unui obiect difuzant iluminat de un fascicul laser

Difuzia luminii este produsă în general de variaţii ale grosimii, ale reflexiei, ale indicelui de refracţie, ale absorbţiei ; aceste variaţii sînt mari în raport cu lungimea de undă a radiaţiei. Obiectele difuzante pot fi reflectante sau transparente, ca de exemplu : suprafeţele rugoase metalice sau nemetalice, respectiv sticla mată. Montajele de obţinere a aspectelor speckle sînt reprezentate în figura 19.1 :

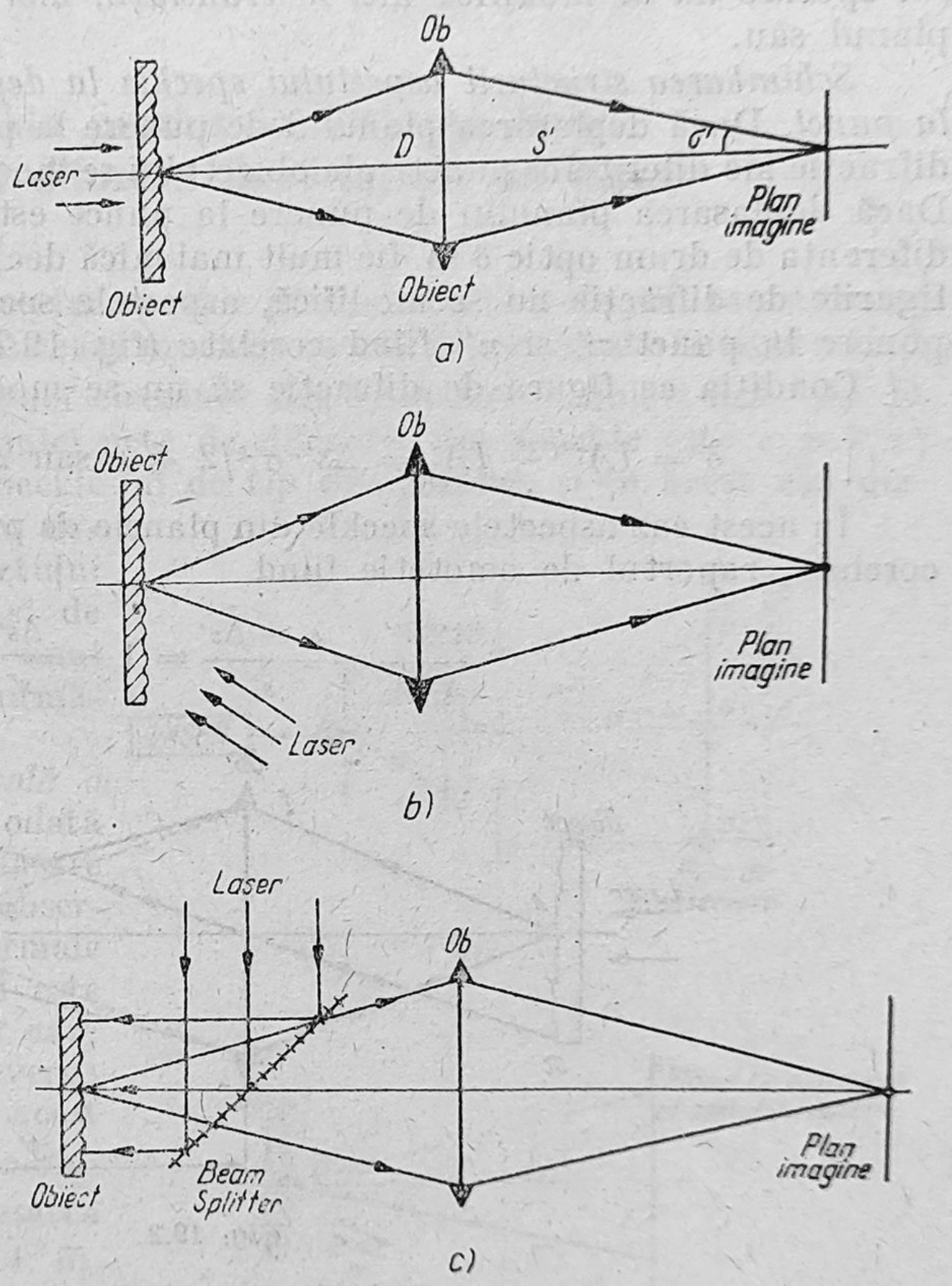


Fig. 19.1

a) Imaginea rezultă ca superpoziţie în amplitudine a tuturor figurilor de difracţie datorate diferitelor puncte ale obiectului transparent-difuzant : se observă un mare număr de pete luminoase repartizate aleatoriu, cele mai mici avînd un diametru $\varepsilon \simeq \lambda/\sigma' = 2\lambda s'/D$, unde D este diametrul obiec-

tivului, iar s' distanța pînă la planul imagine. Obiectul fiind iluminat de un fascicul laser paralel, cu o înclinare oarecare, o translație oarecare a obiectului în planul său nu modifică fazele relative ale diferitelor puncte-obiect, iar în planul imagine structura speckle-lui nu se modifică. el urmează obiectul în translație. La o rotație a obiectului în planul său, fazele relative ale punctelor sale sînt modificate, ca și aspectul speckle, în afara cazului iluminării normale a obiectului.

b) Montajul pentru obținerea unui speckle în imaginea unui obiect reflectant-difuzant iluminat de un laser. Fenomenele care apar la translația și rotația obiectului în planul său sînt aceleași ca și în cazul obiectelor transparent-difuzante.

c) În cazul iluminării normale a unui obiect reflectant-difuzant, aspectul speckle nu se modifică nici la translații, nici la rotații ale obiectului în planul său.

Schimbarea structurii aspectului speckle la deplasarea planului de punere la punct. Dacă deplasarea planului de punere la punct este mare, figurile de difracție ale diferitelor puncte ale obiectului se modifică, ca și aspectul speckle. Dacă deplasarea planului de punere la punct este forate mică, astfel încît diferența de drum optic δ să fie mult mai mică decît lungimea de undă, atunci figurile de difracție nu se modifică, aspectele speckle din cele două plane de punere la punct π' și π'' fiind corelate (fig. 19.2).

Condiția ca figura de difracție să nu se modifice este

$$\delta = IA'' - IA' = \Delta s' \cdot \sigma'^2/2 \ll \lambda \text{ sau } \Delta s' \ll 2\lambda/\sigma'^2. \tag{19.1}$$

În acest caz aspectele speckle din planele de punere la punct π' și π'' sînt corelate, raportul de omotetie fiind

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{s' - \Delta s'}{s'} = 1 - \frac{\Delta s'}{s'}. \tag{19.2}$$

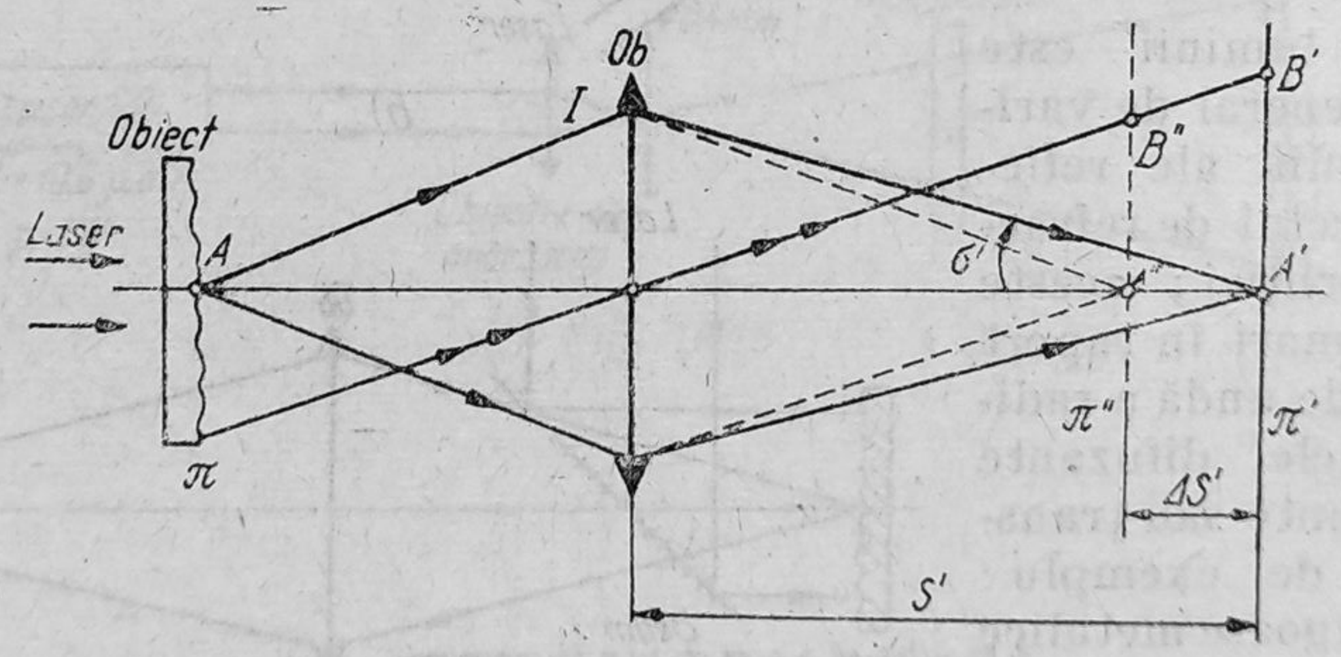


Fig. 19.2

Relațiile (19.1) și (19.2) arată că pentru a mări raportul de omotetie trebuie micșorată deschiderea $2\sigma' = D/s'$. Se obțin rezultate analoge dacă, în loc de a deplasa planul π', se deplasează obiectul sau dacă se deplasează axial obiectivul.

Schimbarea aspectului speckle în imaginea unui obiect difuzant la schimbarea lungimii de undă. Se observă un speckle al unui obiect difuzant iluminat de un laser cu lungimea de undă λ, apoi de un altul cu lungimea de undă λ',

fără a schimba montajul, care poate fi considerat cel reprezentat în figura 19.1. Se presupune obiectivul *Ob* corectat la cromatism pentru radiațiile λ și λ'. Dacă Δg reprezintă variația grosimii obiectului difuzant (Δg este o caracteristică a sticlei mate, de exemplu), atunci diferența de drum pentru două puncte ale obiectului $\delta = (n-1)\cdot\Delta g$ produce o diferență de fază $\Delta\varphi = 2\pi\delta/\lambda$, adică $\Delta\varphi = (n-1)\cdot\Delta g\cdot 2\pi/\lambda$. Condiția ca cele două aspecte speckle obținute cu laser de lungimi de undă λ și $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ să fie practic identice este ca variația fazei să fie foarte mică

$$\Delta(\Delta\varphi) = [2\pi(n-1)\cdot\Delta g/\lambda^2]\cdot\Delta\lambda \ll 2\pi \text{ sau } (n-1)\Delta g\Delta\lambda/\lambda^2 \ll 1. \quad (19.3)$$

Dacă relația (19.3) nu este îndeplinită, atunci necorelația între cele două speckle depinde de $(n-1)\cdot\Delta g$, adică de rugozitatea obiectului difuzant.

19.2. Speckle produs la distanță finită de un obiect difuzant iluminat de un laser

Pentru observarea aspectelor speckle produse de obiecte difuzante transparente sau reflectante se utilizează montaje ca cele reprezentate în figura 19.3.

Dacă diametrul diafragmei circulare din vecinătatea obiectului este D, atunci diametrul celei mai mici pete de difracție din speckle este $\varepsilon \approx \lambda/\alpha$; $\alpha = D/2l$. Ca și în cazul speckle-lui de tip Fraunhofer, și în acest caz diametrul petei de difracție nu depinde de structura obiectului difuzant, ci numai de λ și de unghiul α. Proprietățile unui speckle de tip Fresnel sînt următoarele:

a) *Deplasarea transversală a obiectului* (în planul său), odată cu diafragma, produce o deplasare a speckle-lui în planul de observare în cazul iluminării normale (fig. 19.4, a). Dacă obiectul este iluminat de un fascicul laser care în absența obiectului ar converge în planul de observare, în acest caz deplasarea tansversală a obiectului nu produce deplasarea aspectului speckle (fig. 19.4, b). Același fenomen se observă și în cazul obiectelor reflectant-difuzante observînd aspectul speckle în planul în care s-ar forma imaginea sursei dacă obiectul difuzant ar fi înlocuit de o oglindă.

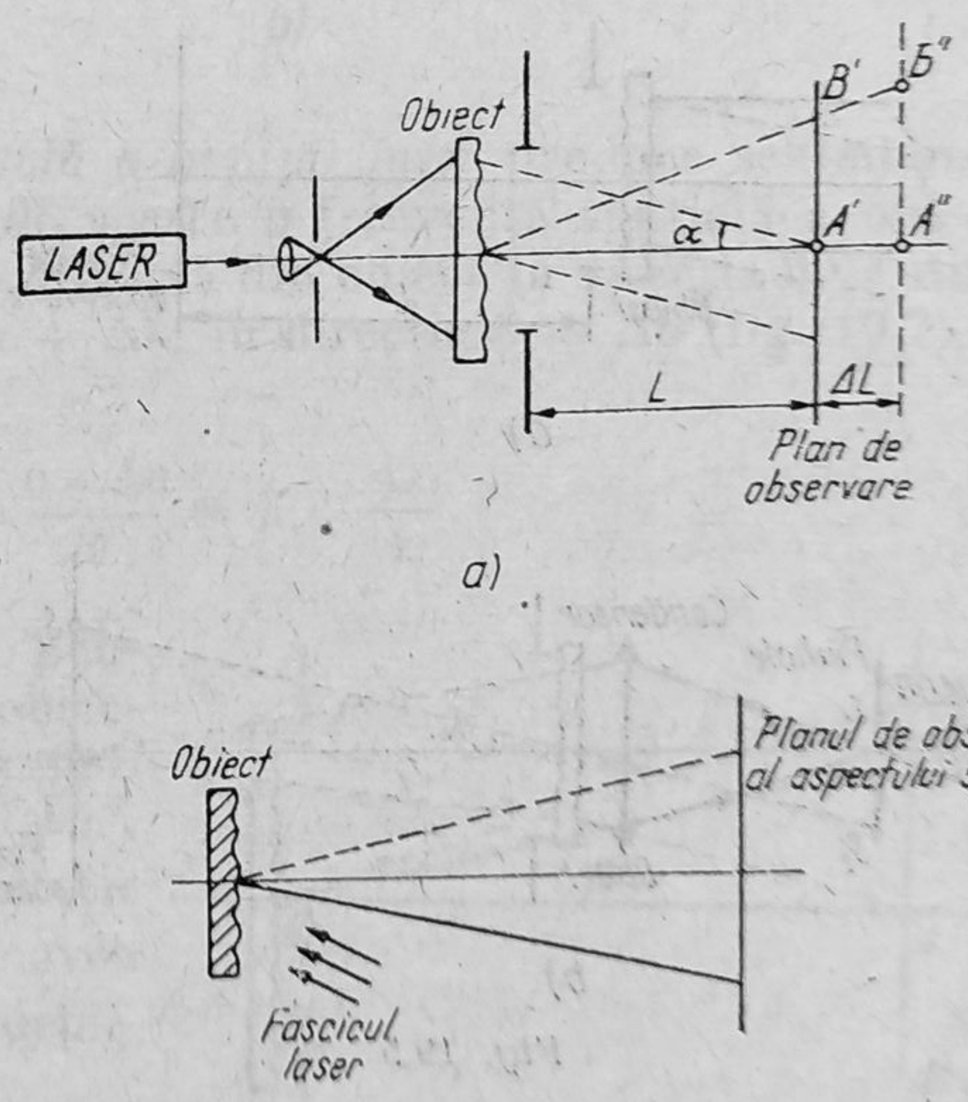
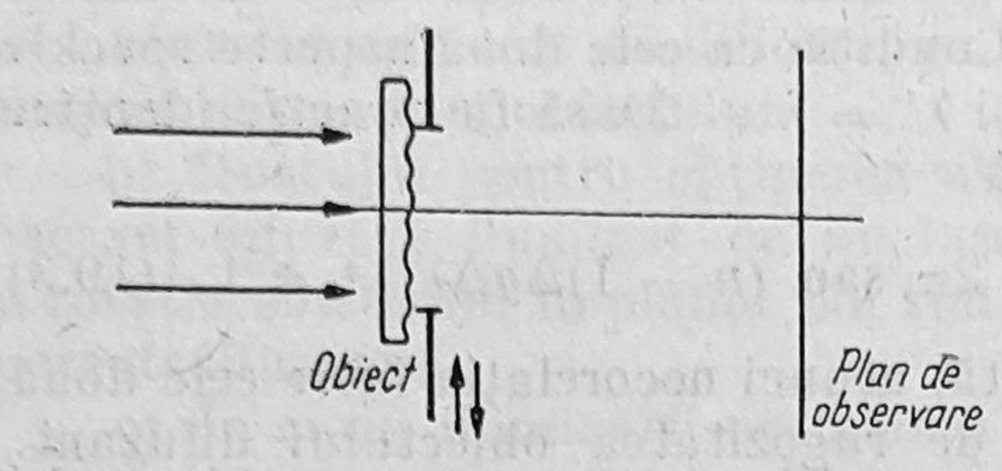


Fig. 19.3

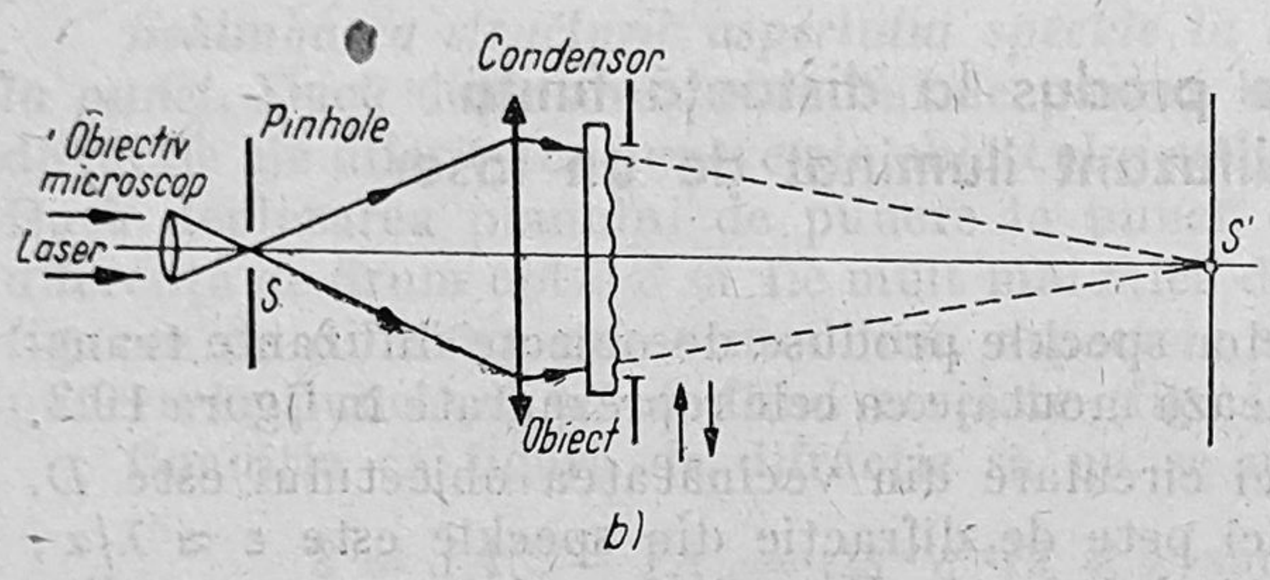
b) *Schimbarea orientării fasciculului laser*. Experimental, s-a constatat că la înclinarea cu unghiul α, a unui fascicul laser paralel, aspectul speckle nu se

schimbă, cu atît mai mult cu cît distanța l este mai mică, ci suferă o translație în planul de observare (fig. 19.5, a).

Și în cazul unui fascicul laser convergent, reprezentat în figura 19.5, b, sursa S_1 fiind în centrul unei microdiafragme (pinhole) așezate în focarul microobiectivului MOB care expandează fasciculul laser incident, se constată același fenomen la deplasarea sursei punctiforme din S_1 în S_2: aspectul speckle suferă o translație egală cu $S_1'S_2'$. Unghiul α trebuie să fie suficient de mic, în ambele cazuri, pentru ca regiunea utilizată a obiectului transparent-difuzant să fie practic aceeași.

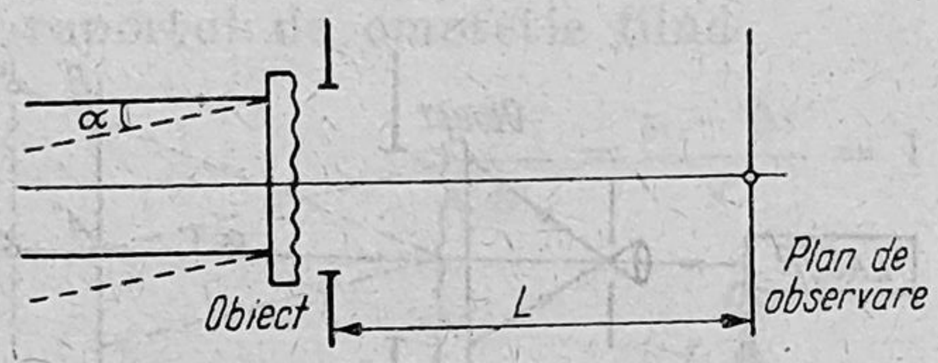


a)

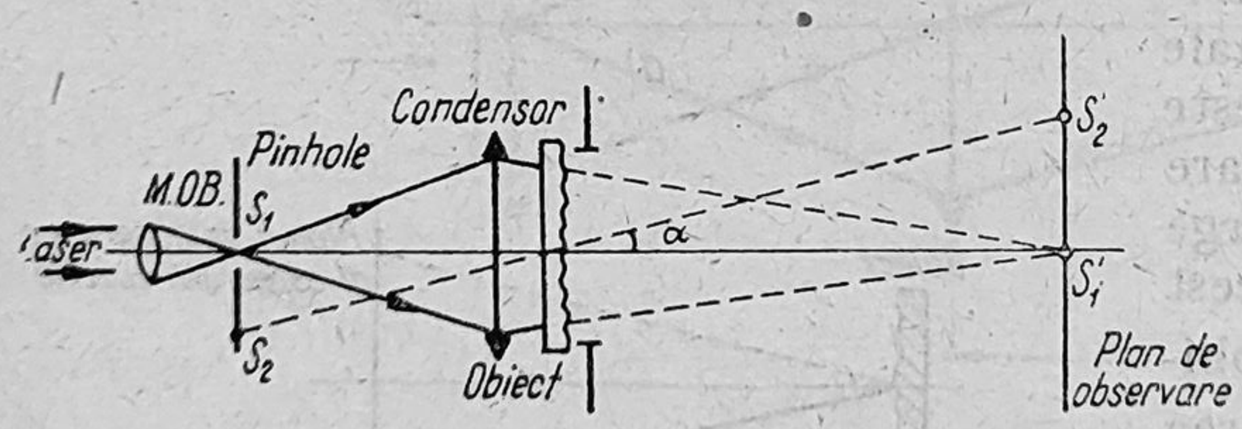


b)

Fig. 19.4



a)



b)

Fig. 19.5

c) *Deplasarea axială a planului de observare* sau a obiectului. La o deplasare Δl a planului de observare se obține un nou speckle care, în cazul respectării condiției (19.1) rescrisă pentru notațiile din figura 19.6, a: $\Delta l \ll 2\lambda/\sigma'^2$, poate fi dedus din primul cu relația de omotetie

$$(19.2) \rightarrow \frac{A''B''}{A'B'} = 1 + \frac{\Delta l}{l}.$$

În loc de a deplasa planul de observare se poate deplasa obiectul (fig. 19.6, a), considerat subțire și confundat cu planul diafragmei. Diferența de drum între razele SIA și SCA este

$$\delta = \frac{d + l}{d \cdot l}\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \delta_0$$

unde δ_0 este diferența de drum optic introdusă de obiectul transparent-difuzant de indice de refracție n și variație medie de grosime Δg: $\delta_0 = (n-1)\cdot\Delta g$, iar D este diametrul diafragmei obiectului. La o deplasare Δl a obiectului variația diferenței de drum va fi

$$\Delta\delta = \frac{l^2 - d^2}{d^2 l^2}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \Delta l.$$

Se observă că această variaţie nu depinde de caracteristica Δg a obiectului şi devine neglijabilă dacă $l = d$. În cazul obiectelor reflectante difuzante fenomenele sînt aceleaşi, montajul putînd fi cel din figura 19.6, b.

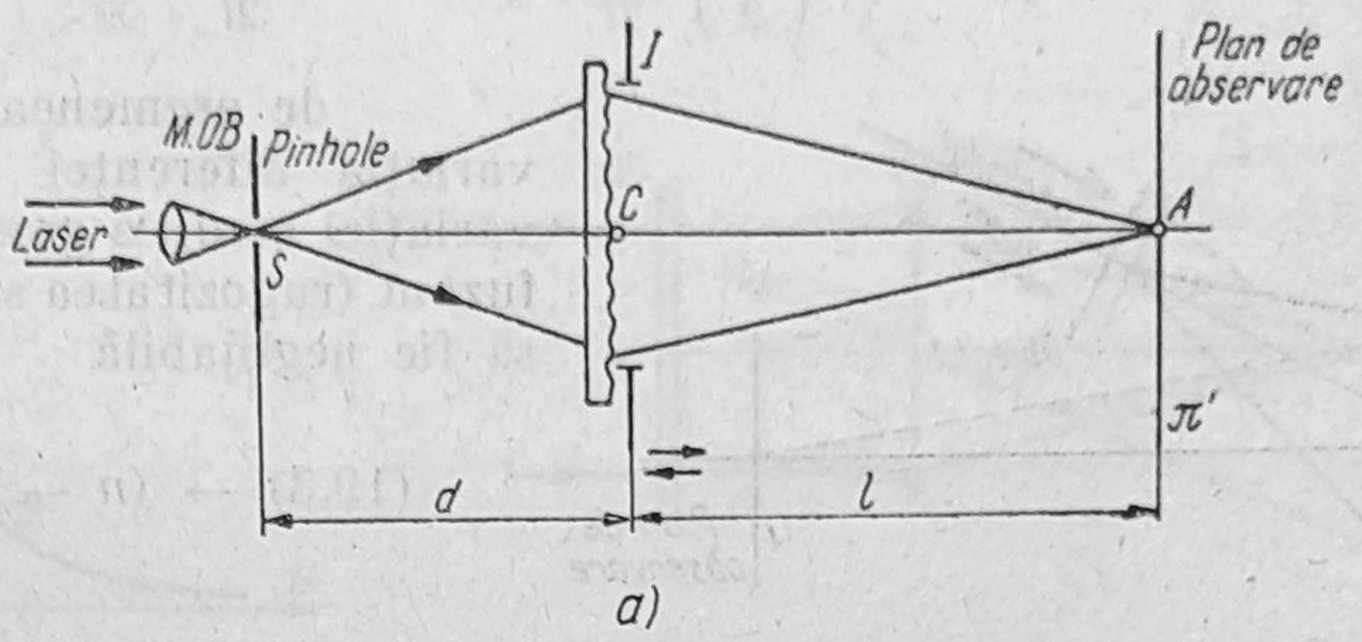
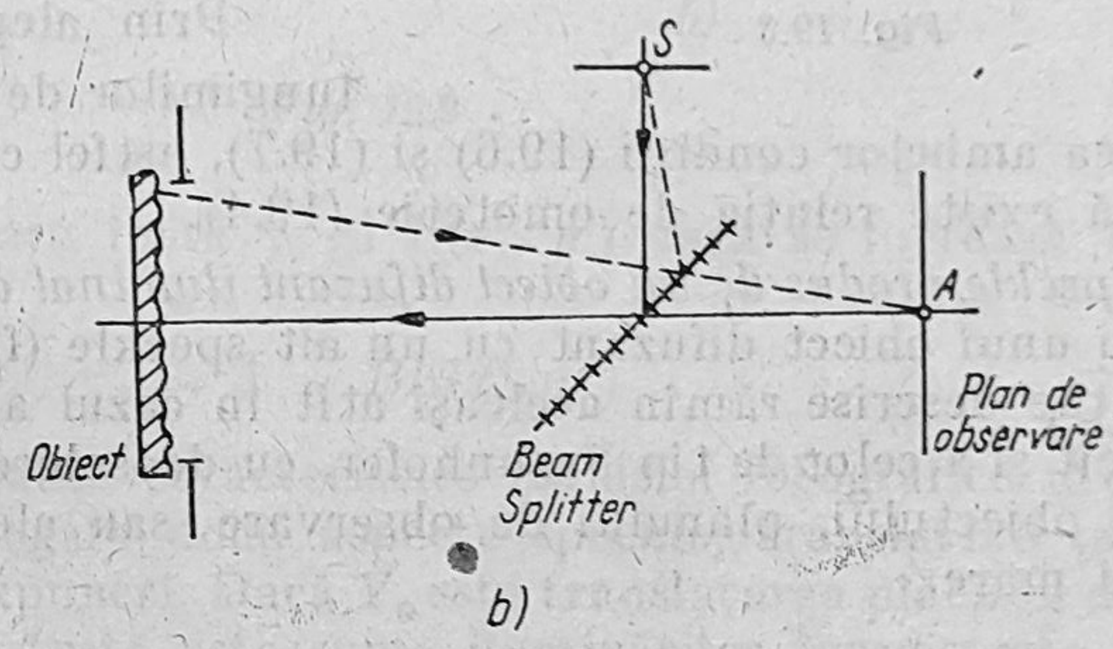


Fig. 19.6



d) *Schimbarea lungimii de undă a luminii laser* produce schimbarea unghiurilor de difracţie $\theta = \lambda\nu$, unde ν este o frecvenţă spaţială a obiectului, cu : $\Delta\theta = \nu \cdot \Delta\lambda$. Aşadar, raza care difractă din obiect în direcţia θ va difracta, pentru o lungime de undă $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, în direcţia $\theta + \Delta\theta$ (fig. 19.7), astfel încît

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{\theta + \Delta\theta}{\theta} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \qquad (19.4)$$

Făcînd acelaşi raţionament pentru fiecare frecvenţă spaţială a obiectului, rezultă că la o creştere a lungimii de undă aspectul speckle se „dilată", fără însă a respecta o simplă omotetie cu raportul $1 + \Delta\lambda/\lambda$. Pentru a avea loc această omotetie trebuie îndeplinite următoarele două condiţii :

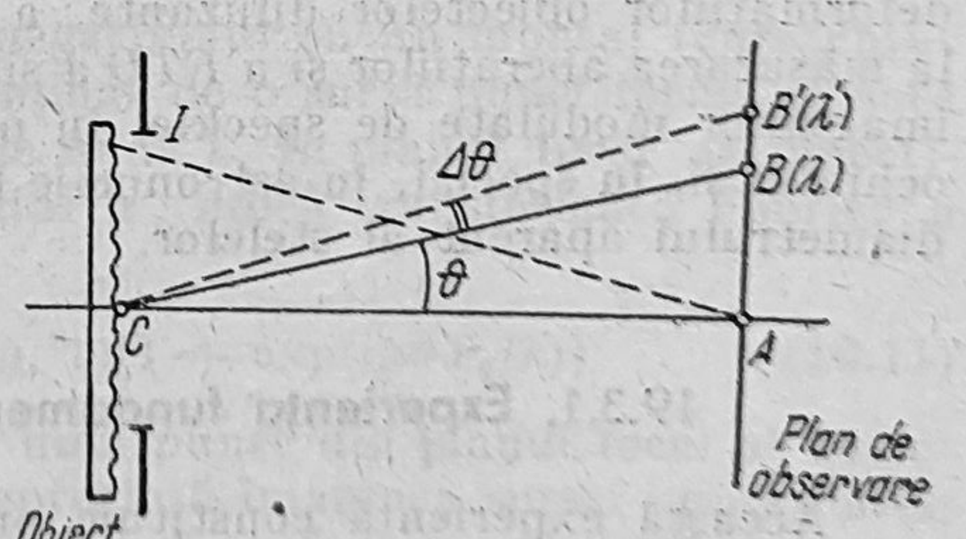


Fig. 19.7

— diferenţa de drum $IA - CA = D^2/(8l)$, unde D este diametrul diafragmei obiectului, produce pentru o lungime de undă λ o diferenţă de fază

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{1}{2l}. \qquad (19.5)$$

Influenţa variaţiei lungimii de undă $\Delta\lambda$ este neglijabilă dacă variaţia diferenţei de fază respectă condiţia :

$$\Delta(\Delta\varphi) = \frac{2\pi}{\lambda^2}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{\Delta\lambda}{2l} \ll 2\pi \text{ sau } \frac{(D/2)^2}{2l}\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \ll 1 ; \qquad (19.6)$$

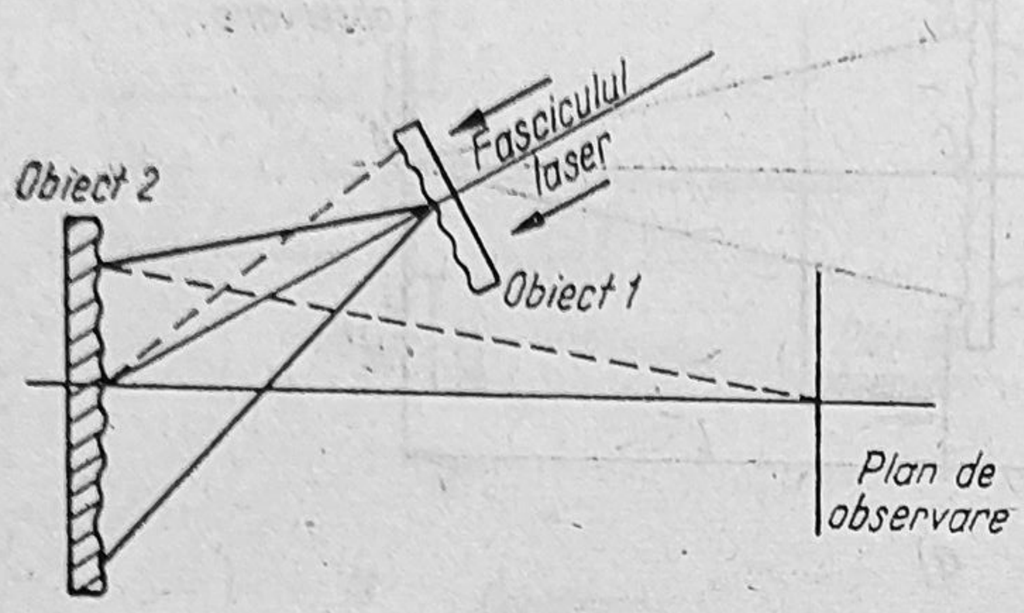


Fig. 19.8

— de asemenea, este necesar ca şi variaţia diferenţei de fază datorate variaţiei medii a grosimii obiectului difuzant (rugozitatea suprafeţei acestuia) să fie neglijabilă

$$(19.3) \rightarrow (n-1)\Delta g \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \ll 1. \qquad (19.7)$$

Prin alegerea corespunzătoare a lungimilor de undă λ şi λ' este posibilă respectarea ambelor condiţii (19.6) şi (19.7), astfel ca între cele două aspecte speckle să existe relaţia de omotetie (19.4).

e) *Speckle produs de un obiect difuzant iluminat de un alt speckle.* În cazul iluminării unui obiect difuzant cu un alt speckle (fig. 19.8) s-a constatat că proprietăţile descrise rămîn aceleaşi atît în cazul aspectelor speckle de tip Fresnel, cît şi a celor de tip Fraunhofer, cu deosebirea că sensibilitatea la variaţii ale obiectului, planului de observare sau ale lungimii de undă este mult mai mare.

19.3. Aplicaţii ale opticii granulare

Aplicaţiile aspectelor speckle se bazează pe proprietăţile acestora şi pe fenomenele de interferenţă în lumină difuză produse prin suprapunerea fotografică a unor speckle decalate lateral sau axial. Cele mai importante aplicaţii, de dată foarte recentă, sînt în domeniile măsurării deplasărilor sau deformaţiilor obiectelor difuzante, a rugozităţii acestora, în optica tehnică la măsurarea aberaţiilor şi a *FTO* a sistemelor optice, în tratamentul optic al imaginilor modulate de speckle, în oftalmologie la examinarea ametropiilor ochiului şi, în special, în astronomie la studiul stelelor duble şi la măsurarea diametrului aparent al stelelor.

19.3.1. Experienţa fundamentală a lui Burch şi Tokarski

Această experienţă constituie punctul de plecare al tuturor tehnicilor actuale utilizînd aspectul speckle. Montajul folosit este cel reprezentat în figura 19.4, a, cu observaţia că lumina emisă de laser fiind polarizată se va presupune că orientarea oscilaţiei luminoase nu se va schimba în cursul experienţei. Aspectul speckle în planul de observaţie este caracterizat de funcţia $E(x', y')$ care reprezintă distribuţia iluminării. Dacă t este timpul

expunerii, atunci placa fotosensibilă primește o energie $H = t \cdot E(x', y')$, (expunere). Relația care există între această energie și amplitudinea transmisă, exprimată prin factorul τ_a, este dată de funcția $\tau_a(H)$ reprezentată grafic în figura (19.9, a). Curba $\tau_a(H)$ prezintă o porțiune liniară AB, putîn-

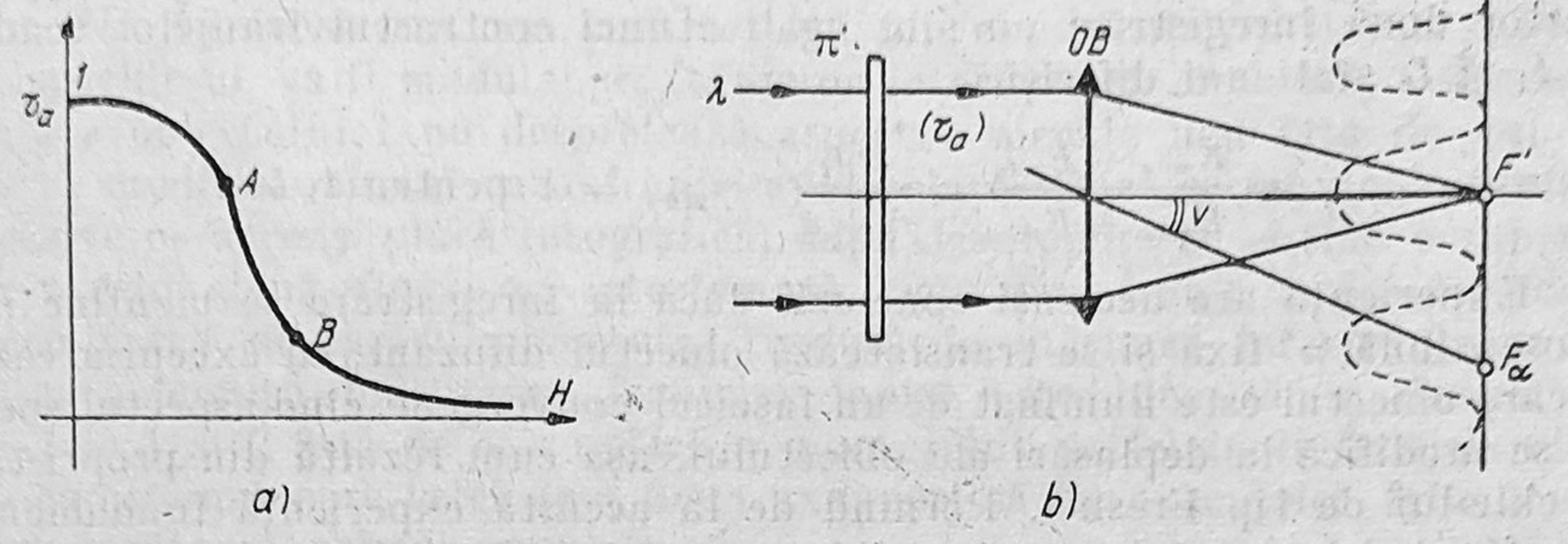


Fig. 19.9

du-se scrie o relație liniară între τ_a și $E(x', y')$ dacă se lucrează în această porțiune

$$\tau_a = A - BE(x', y') \tag{19.8}$$

unde A și B sînt constante caracteristice emulsiei fotografice utilizate. Se înregistrează, cu timpi egali, două aspecte speckle, translatînd placa fotografică între cele două expuneri. Dacă Y_0 este translatarea plăcii în direcția y', atunci iluminarea înregistrată este suma iluminărilor înregistrate la fiecare expunere, echivalentă convoluției cu o funcție Dirac

$$E(x', y') + E(x', y' - Y_0) = E(x', y') \otimes [\delta(x', y') + \delta(x', y' - Y_0)]. \tag{19.9}$$

După developare, amplitudinea transmisă prin negativul π' va fi, conform relațiilor (19.8) și (19.9),

$$\tau_a = A - B\{E(x', y') \otimes [\delta(x', y') + \delta(x', y' - Y_0)]\}. \tag{19.10}$$

Se studiază distribuția iluminării negativului cu un montaj reprezentat în figura 19.9, b, negativul π' fiind iluminat de o sursă punctiformă situată la infinit, monocromatică, de lungime de undă λ. În planul focal al obiectivului OB se observă spectrul negativului π', adică transformata Fourier a amplitudinii transmise τ_a prin π'

$$t(u, v) = A\delta(u, v) - Bd(u, v)[1 + \exp(i\pi v Y_0/\lambda)] \tag{19.11}$$

u, v fiind coordonatele unghiulare ale unui punct din planul focal al obiectivului OB. Primul termen $A \cdot \delta(u, v)$ reprezintă imaginea sursei punctiforme de la infinit în F'. Al doilea termen conține transformata Fourier $d(u, v)$ a distribuției iluminării în speckle, modulată de factorul $1 + \exp(i\pi v Y_0/\lambda) = 2\cos^2 \pi v Y_0/\lambda$. Dacă nu se ia în considerație imaginea sursei din F', distribuția iluminării în planul focal este dată, cu un factor de proporționalitate, de expresia

$$E = |d(u, v)|^2 \cos^2 \pi v Y_0/\lambda, \tag{19.12}$$

ceea ce reprezintă distribuţia iluminării în cazul franjelor Young, distanţa unghiulară între două franje, întunecate consecutiv, fiind egală cu λ/Y_0. Aşadar, interpretarea cantitativă a spectrului înregistrat în planul focal al obiectivului OB este : pentru o translaţie Y_0 a plăcii fotosensibile în planul de observare a aspectului speckle (la înregistrare), depărtarea unghiulară între două franje consectuive este λ/Y_0. În cazul în care timpii de expunere a celor două înregistrări nu sînt egali atunci contrastul franjelor scade cu cît t_1 şi t_2 sînt mai diferiţi

$$\gamma = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}} = \frac{2t_1t_2}{t_1^2 + t_1^2}\ ;\ \gamma_{max} = 1 \text{ pentru } t_1 = t_2.$$

Experienţa are aceleaşi concluzii dacă la înregistrare se menţine placa fotosensibilă π' fixă şi se translatează obiectul difuzant, cu excepţia cazului în care obiectul este iluminat de un fascicul convergent, cînd aspectul speckle nu se modifică la deplasări ale obiectului, aşa cum rezultă din proprietăţile speckle-lui de tip Fresnel. Pornind de la această experienţă fundamentală s-au făcut determinări experimentale asupra înregistrărilor aspectelor speckle în diferite situaţii : deplasări succesive egale ale plăcii fotosensibile, deplasare continuă a plăcii fotosensibile, schimbarea orientării fasciculului laser incident, utilizarea luminii polarizate, înclinarea obiectului, schimbarea lungimii de undă a radiaţiei laser, deplasare axială a plăcii fotosensibile etc. Rezultatele acestor experienţe stau la baza principiilor metodelor de măsurare utilizînd aspectul speckle.

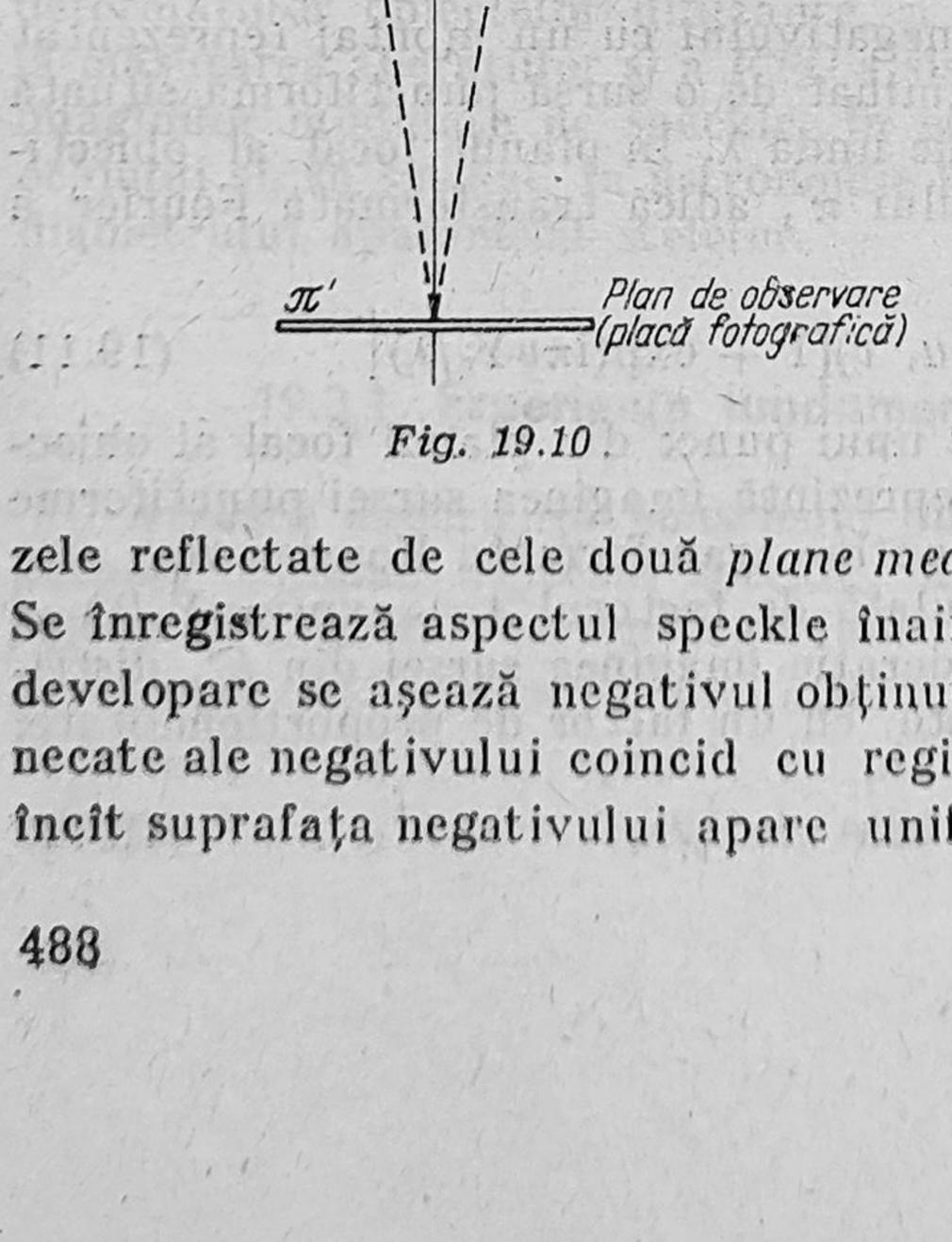


Fig. 19.10

19.3.2. Măsurarea deplasărilor şi deformărilor mici

Dintre multiplele posibilităţi de măsurare a micilor deplasări sau deformaţii ale unor obiecte difuzante se remarcă montajul prezentat în figura 19.10, foarte sensibil la cele mai mici deplasări axiale ale obiectului. Este un interferometru Michelson la care oglinzile au fost înlocuite de obiecte reflectant-difuzante 1 şi 2. Aspectul speckle care apare în planul π' nu este modulat de franje de interferenţă, diferenţa de drum între razele reflectate de cele două *plane medii* ale obiectelor fiind redusă la zero. Se înregistrează aspectul speckle înainte de deplasarea de măsurat ; după developare se aşează negativul obţinut în aceeaşi poziţie π'. Regiunile întunecate ale negativului coincid cu regiunile luminoase ale speckle-lui, astfel încît suprafaţa negativului apare uniformă şi puţin luminoasă. Deplasînd

axial suprafaţa obiectului 1, intensităţile luminoase ale speckle-lui real variază, lumina transmisă prin placa π' crescînd, devenind din nou minimă dacă translaţia este egală cu $\lambda/2$. Montajul poate fi completat cu aparatură opto-electrică de măsurare şi înregistrare ce poate fi etalonată, precizia de măsurare a deplasărilor atingînd uşor $\lambda/16 \simeq 0{,}04$ μm. Utilizînd acelaşi montaj, se poate observa aspectul speckle în focarul F' al obiectivului OB. În acest caz, aşa cum rezultă din experienţa lui Burch şi Tokarski, speckle-ul va fi modulat de franje de interferenţă circulară. O deplasare axială a obiectului 1 nu decorelează aspectul speckle nou faţă de cel iniţial, ci modifică numai raza franjelor circulare. Dacă se fac două expuneri succesive pe acecaşi placă fotografică, după developare se obţine o suprapunere a celor două figuri de interferenţă, care dau franje moiré ce permit determinarea deplasării obiectului tradusă în mărimea interfranjei moiré. Pentru a facilita măsurarea franjelor moiré este bine să se descentreze obiectele 1 şi 2 faţă de axa optică a montajului, astfel încît franjele circulare corespunzătoare celei de-a doua expuneri să fie excentrice faţă de cele corespunzătoare primei expuneri.

19.3.3. Măsurarea rugozităţii suprafeţelor

În general, profilul unei suprafeţe se studiază cu ajutorul unui palpator în contact cu suprafaţa, deplasările acestuia fiind transformate în variaţii de tensiune electrică şi transmise într-un înregistrator sau calculator ; prin filtrarea semnalului electric se conservă numai frecvenţele înalte, care reprezintă rugozitatea. Inconvenientul principal al acestei metode este contactul între palpator şi suprafaţă, contact care poate suferi deteriorări. Metodele optice nu prezintă acest inconvenient, contactul material fiind înlocuit printr-o punere la punct a unui sistem optic. Informaţiile asupra rugozităţii utilizînd aspectul speckle se obţin în general urmărind corelaţia care există între două speckle obţinute cu suprafaţa rugoasă de studiat, fie schimbînd orientarea fasciculului laser, fie schimbînd lungimea de undă a radiaţiei laser. Aceste metode se aplică cu rezultate foarte bune la măsurarea rugozităţilor mari (depărtarea pătratică medie > 1 μm).

Studiul rugozităţii prin corelaţia a două speckle obţinute prin schimbarea incidenţei fasciculului laser. Din proprietăţile speckle-lui de tip Fresnel rezultă că dacă variaţia $\Delta\alpha$ a unghiului α de orientare al fasciculului laser este suficient de mică, aspectul speckle nu-şi schimbă structura, ci suferă o deplasare laterală $Y_0 = d \cos\alpha\Delta\alpha$, unde d este distanţa de la suprafaţa de studiat S la placa fotografică π' (fig. 19.11, a). Dacă schimbarea incidenţei fasciculului laser $\Delta\alpha$ creşte ; se constată că translaţia aspectului speckle este însoţită de o modificare a structurii acestuia, care se datorează rugozităţii suprafeţei S.

Se înregistrează pe acecaşi placă fotografică cele două aspecte speckle, schimbînd cu $\Delta\alpha$ incidenţa fasciculului laser ; după developare negativul π este studiat cu montajul (fig. 19.9, b) utilizat şi în experienţele fundamentale Burch-Tokarski. Dacă timpii celor două expuneri sînt egali, franjele rectilinii

și paralele din planul focal, depărtate unghiular cu λ/Y_0, prezintă un contrast γ, funcție de rugozitatea suprafeței S, exprimată prin depărtarea pătratică medie σ

$$\gamma = \exp\left[-\left(\frac{2\pi\sigma}{\lambda}\sin\alpha\Delta\alpha\right)^2\right]. \tag{19.13}$$

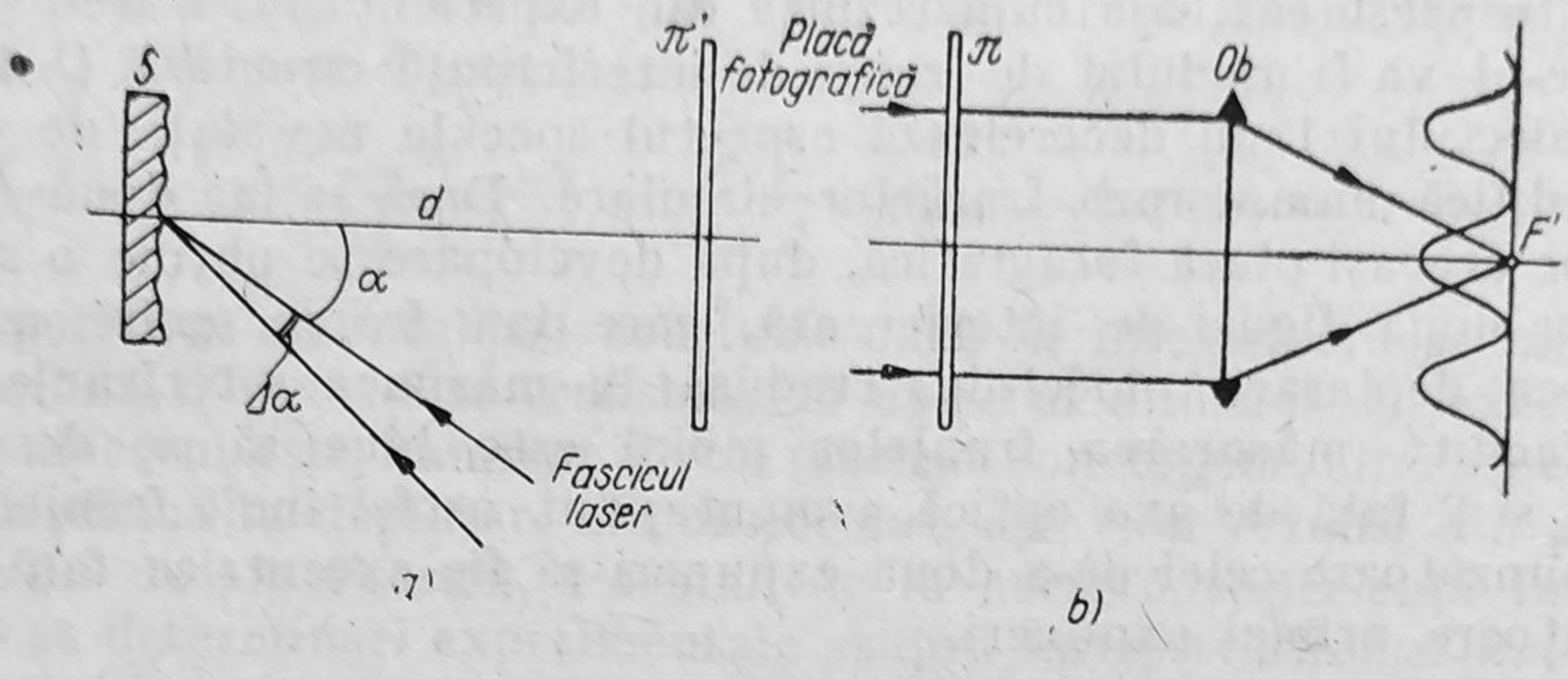


Fig. 19.11

Experimental, s-a dovedit că eroarea relativă de determinare a rugozității pe baza acestei metode este de ordinul $\Delta\sigma/\sigma \simeq 8\%$.

Rugozitatea suprafețelor poate fi determinată și prin corelarea a două speckle obținute prin schimbarea lungimii de undă a radiației laser, utilizînd montaje de înregistrare și de observare a franjelor similare celor prezentate anterior în figura 19.11, a și, respectiv 19.11, b. Măsurarea rugozității se face pe baza unor relații care leagă depărtarea pătratică medie σ de variațiile lungimii de undă $\Delta\lambda$, de la care relația (19.3,) nu mai este respectată.

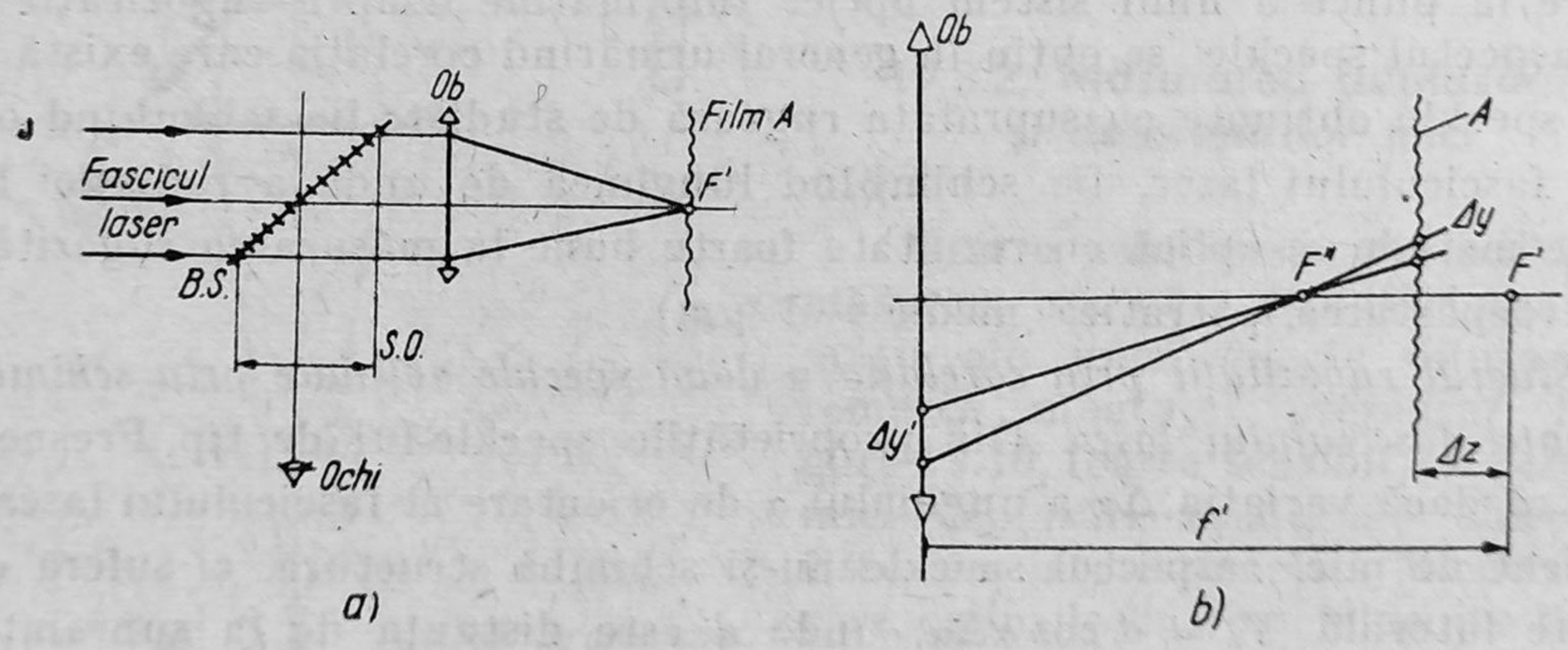


Fig. 19.12

19.3.4. Punerea la punct a unui obiectiv utilizînd aspectul speckle

Pentru a plasa cu precizie filmul A în focarul F' al obiectivului Ob se utilizează un montaj reprezentat în figura 19.12, a, în care fasciculul laser ilumineză o porțiune a filmului A, producînd un speckle în planul obiec-

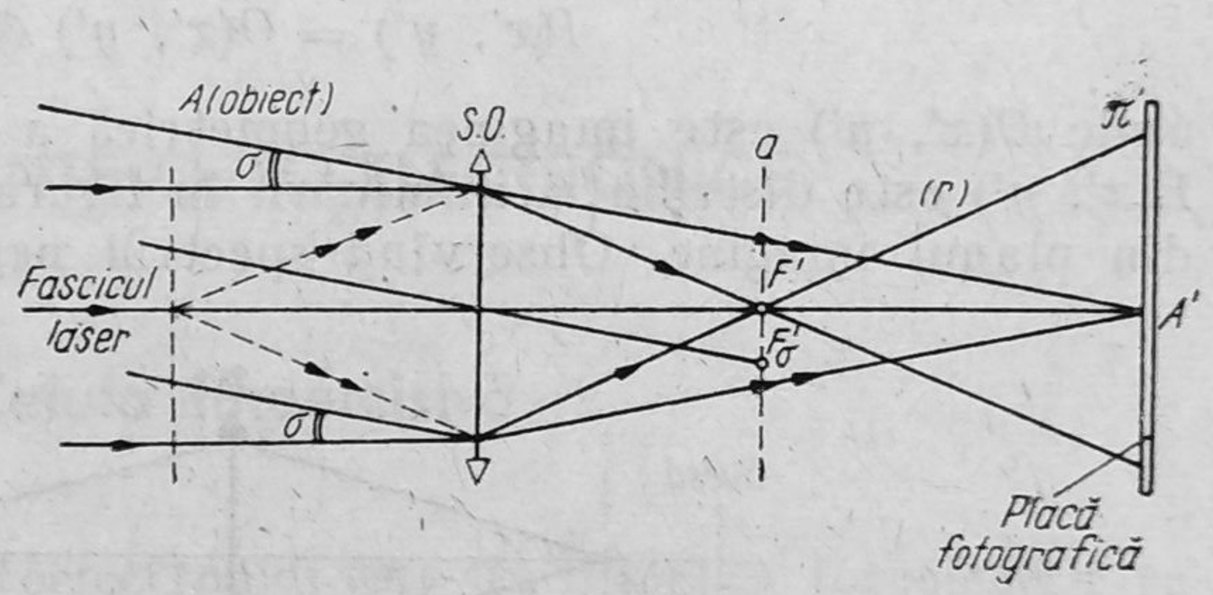
tivului *Ob*, observat cu ajutorul sistemului optic *S.O.* Dacă eroarea de punere la punct este Δz, la o deplasare Δy a filmului (obiect difuz), aspectul speckle suferă o deplasare $\Delta y'$

$$\Delta y' = \Delta y f'/\Delta z$$

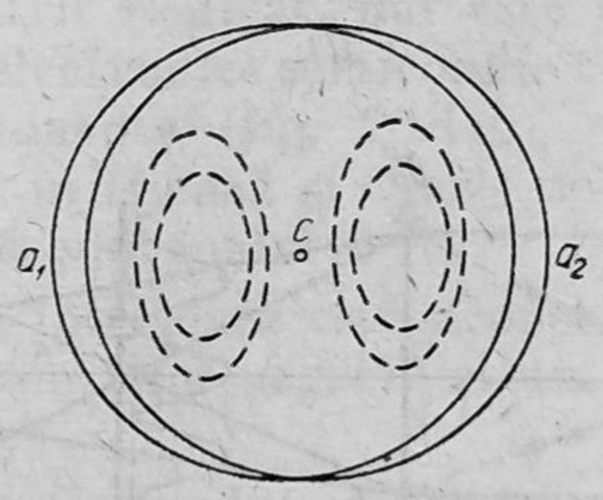
unde f' este distanța focală a obiectivului *Ob*. Se observă că sensul de deplasare a aspectului speckle, la același sens de deplasare a filmului, se schimbă atunci cînd A trece prin F'. De asemenea se observă că diametrul granulației speckle, $\varepsilon \simeq \lambda/\alpha = \Delta y/\Delta z$, în cazul montajului utilizat, depinde direct de eroarea de punere la punct Δz. Dacă $\Delta z \to 0$ se constată că diametrul granulei $\varepsilon \to \infty$, ca și viteza de deplasare a aspectului speckle $\Delta y'/\Delta t \to \infty$.

19.3.5. Studiul aberației de sfericitate a unui sistem optic

Principiul metodei este reprezentat în figura 19.13, a : un difuzor de amplitudine A (fotografia unui speckle), iluminat de un fascicul laser paralel normal pe A, constituie obiectul a cărei imagine este formată în π' de obiectivul studiat ; placa fotografică înregistrează ceea ce se poate considera o hologramă Fourier : unda de referință (r) este imaginea sursei ce se formează în F', iar unda obiect este dată de spectrul a al difuzorului A. Variațiile de fază ale lui a reprezintă aberațiile sistemului optic. După developare, se iluminează negativul π' cu un fascicul laser paralel, obținîndu-se două imagini ale lui a simetrice în raport cu axa. În cazul aberației de sfericitate (de revoluție) aceste două imagini sînt identice și confundate, F' fiind în centrul lui a.



a)



b)

Fig. 19.13

Dacă obiectul (difuzorul A) este iluminat de un fascicul laser paralel, înclinat cu unghiul σ, se va înregistra o hologramă în π' cu sursa de referință în F'_σ. La reconstrucție se vor obține două imagini a_1 și a_2 identice, dar neconfundate. Dacă decalajul acestor două imagini nu este prea mare (depinde de înclinarea σ a fasciculului laser) atunci se formează o figură de interferență ale cărei franje reprezintă derivata funcției de aberație a sistemului optic (fig. 19.13, b).

Metoda descrisă este o metodă diferențială. Pentru a putea considera unda de referință (r) practic neafectată de aberațiile sistemului optic se studiază holograma π' cu ajutorul unei diafragme, ceea ce echivalează cu traversarea sistemului optic de către unda de referință numai printr-o mică regiune. Experimental, și teoretic, procedeul poate fi extins și la studiul aberațiilor care nu prezintă simetrie de revoluție, iar difuzorul de amplitudine poate fi înlocuit cu un difuzor de fază (sticlă mată, de exemplu).

19.3.6. Măsurarea funcției de transfer a unui sistem optic utilizînd un speckle

Montajul utilizat este simplu (fig. 19.14, a), fiind constituit dintr-o sursă întinsă, dar monocromatică, care ilumineză un obiect de transparență aleatorie A (fotografia unui speckle); obiectivul de testat formează în A' imaginea obiectului care este înregistrată pe placa fotografică π, care după developare este studiată cu un dispozitiv ca cel prezentat schematic în figura 19.14, b. Distribuția iluminării în planul imagine A' este dată de operația de convoluție

$$I(x',\ y') = O(x',\ y') \otimes E(x',\ y')$$

unde $O(x',\ y')$ este imaginea geometrică a distribuției iluminării din A' iar $E(x',\ y')$ este distribuția iluminării în figura de difracție a punctului $(x',\ y')$ din planul imagine. Observînd spectrul negativului cu montajul prezentat

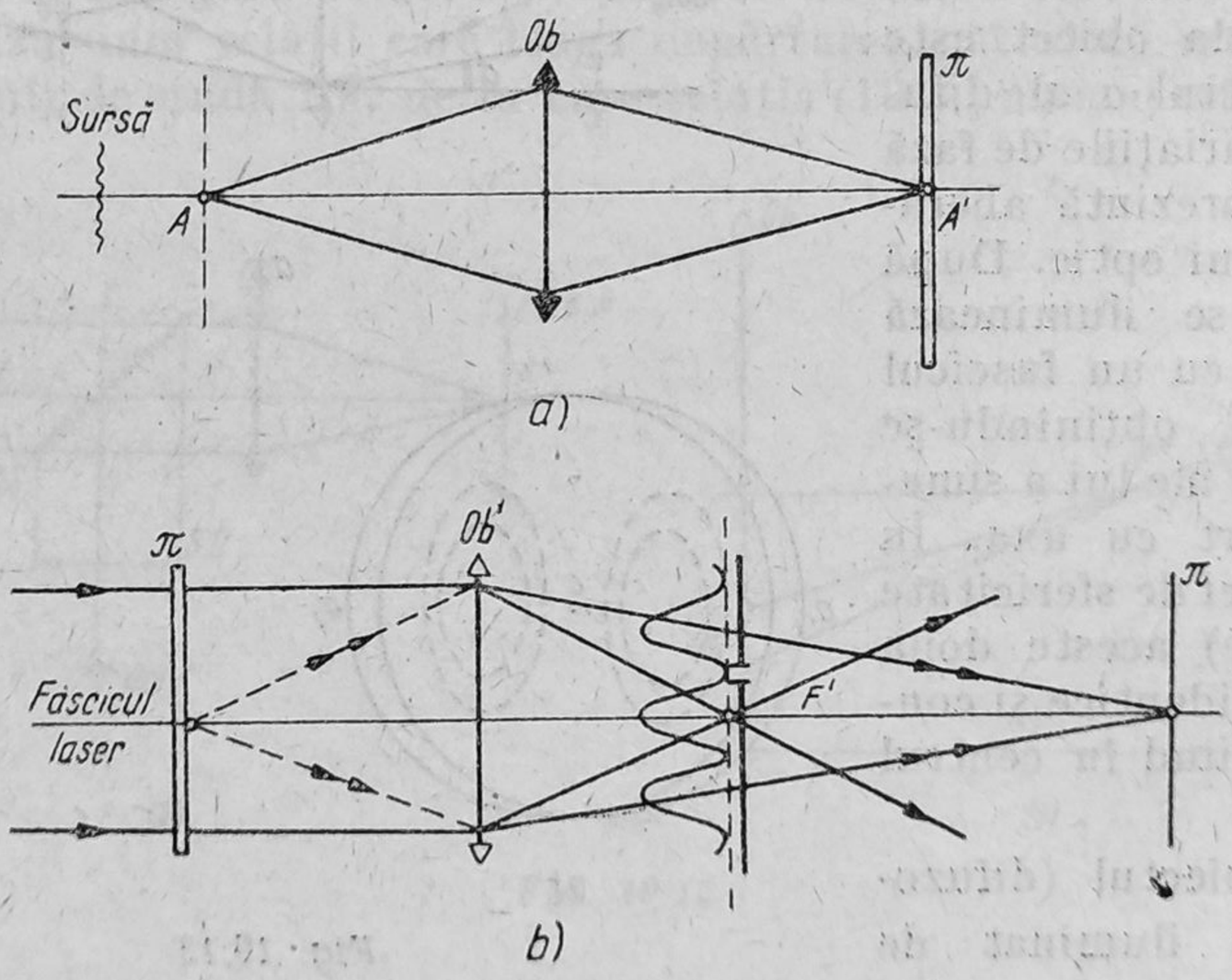


Fig. 19.14

în figura 19.14, b, amplitudinea în planul focal F' al obiectivului Ob' este proporțională cu transformata Fourier a lui $I(x',\ y')$

$$i(u,\ v) = o(u,\ v) \cdot e(u,\ v) \qquad (19.14)$$

unde $e(u,\ v)$ reprezintă funcția de transfer a obiectivului testat Ob.

Înregistrînd distribuția iluminării din planul focal F' al obiectivului Ob'_2, se obține pătratul modulului *FTO*. Faza *FTO* se obține utilizînd tehnica dublei expuneri : pe aceeași placă fotografică se face o primă expunere utilizînd montajul din figura 19.14, a apoi o a doua expunere, înlocuind obiectivul *Ob* cu un obiectiv de referință presupus perfect Ob_0, între cele două expuneri placa suferind o mică deplasare în planul său, după care se studiază spectrul negativului cu montajul reprezentat în figura 19.14, b. Dacă obiectivul *Ob* nu prezintă aberații atunci se obține o figură de franje rectilinii și paralele, deoarece în acest caz obiectivele *Ob* și Ob_0 (de referință), fiind identice, cele două înregistrări reprezintă două speckle identice decalate între ele prin translația dată plăcii fotografice în planul π. Dacă obiectivul *Ob* are aberații, franjele nu mai sînt nici paralele, nici rectilinii, figura de interferență permițînd în cele mai multe cazuri determinarea fazei *FTO*. Este evident că obiectivele de testat *Ob* și de referință Ob_0, trebuie poziționate perfect în montajul din figura 19.14, a, acesta constituind punctul delicat al metodei. De aceea este bine să se utilizeze proprietățile punctelor antinodale (sistemul fiind în aer acestea coincid cu punctele antiprincipale), montînd obiectul A și placa fotografică π în planele antiprincipale A_1 și A_1'.

20. COMPONENTE OPTO-ELECTRONICE

20.1. Celula fotoemisivă

Celula fotoemisivă (tub fotoelectronic) este un receptor fotoelectric ce constă dintr-un tub electronic vidat, sau cu gaz, în care se află un catod capabil să emită electroni prin efect fotoelectric extern. Celula fotoemisivă este primul receptor fotoelectric realizat, dar este din ce în ce mai mult înlocuită de componentele optoelectronice semiconductoare. O celulă fotoemisivă are următoarele părți componente (fig. 20.1) :

— un balon de sticlă (se utilizează și cuarț) de formă sferică, aplatizată, cilindrică, unde se realizează vid înaintat ;

— o parte din suprafața interioară este acoperită, prin depunere în vid, cu o peliculă metalică legată la polul negativ al unei surse, constituind astfel catodul celulei ;

— un fir metalic formează anodul, putînd fi de diferite forme : rectiliniu, circular, spiral, în formă de grilaj cilindric înconjurînd catodul.

Caracteristica curent-tensiune (fig. 20.2, a). Curentul de saturație I_s se obține pentru un potențial $V \simeq 20 \div 50$ V în mod normal și pentru $V \simeq 3 \div 6$ V pentru celule fotoemisive cu anod cilindric. Raportul I_s/Φ, care dă sensibilitatea celulei, depinde de stratul metalic care constituie catodul : $I_s/\Phi = 5$ μA/lumen pentru celule cu catodul din potasiu, $I_s/\Phi = 25$ μA/lumen în cazul catodului realizat din cesiu pe argint oxidat, $I_s/\Phi = 100$ μA/lumen pentru catod din antimoniură de cesiu.

Timpul de răspuns al celulelor fotoemisive cu vid fiind foarte scurt, acestea pot sesiza semnale luminoase periodice cu frecvențe de pînă la 1 MHz.

Celulele fotoemisive cu gaz (baloanele vidate sînt umplute cu gaz inert — argon în general, — la o presiune de 20—40 torri) : funcționarea se ba-

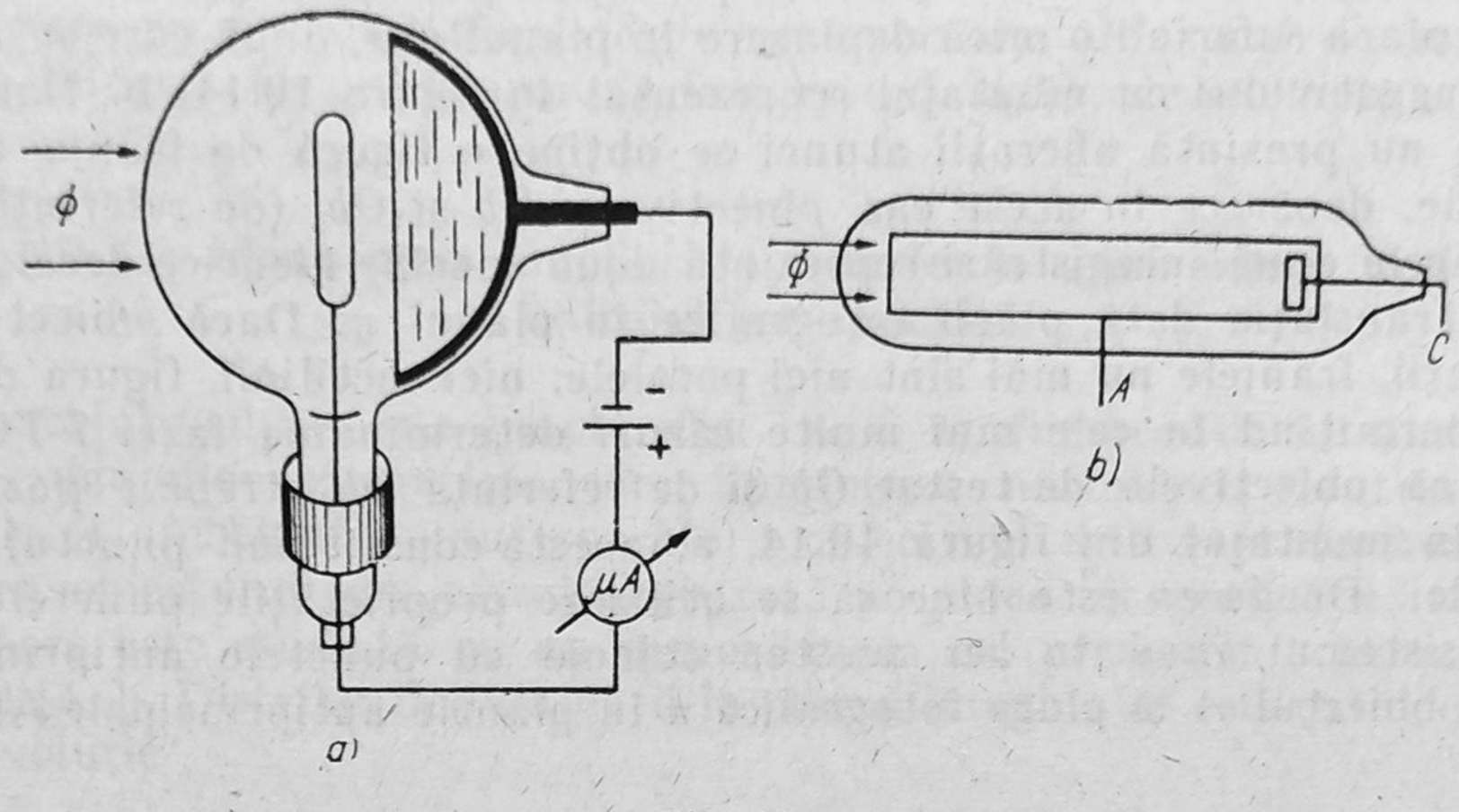


Fig. 20.1

zează pe procesele de ionizare ce au loc în gaz sub acțiunea fotoelectronilor. Datorită ciocnirilor cu atomii gazelor, fotoelectronii emiși de catod nu pot ajunge la anod decît dacă se aplică o tensiune continuă acceleratoare U_a. În urma ciocnirilor fotoelectronii ionizează atomii gazului, ionii pozitivi și

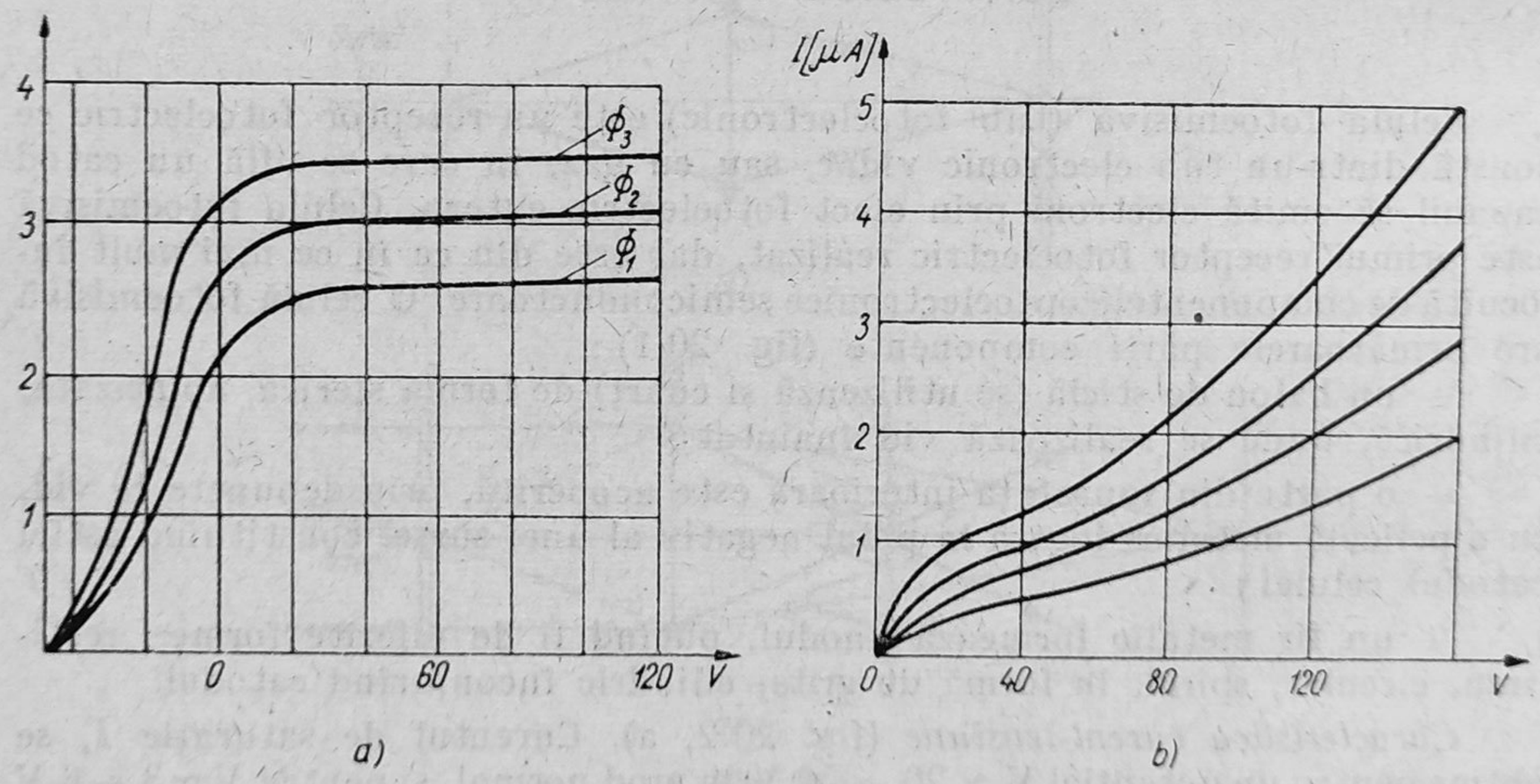


Fig. 20.2

electronii rezultați fiind accelerați de cîmpul electric generat de U_a spre electrozi, putînd produce la rîndul lor ionizări secundare.

Caracteristica curent-tensiune (fig. 20.2, b). În acest caz, fenomenul de saturație a curentului nu mai apare, limitarea acestuia fiind determinată

de tensiunea aplicată celulei. Din această cauză celulele fotoemisive cu gaz au, la tensiuni mari, sensibilitate mai mare de cîteva ori decît a celulelor cu vid. Pentru protejarea catodului (suprafaţa de ordinul cm²), curentul nu trebuie să depăşească 5 μA/cm² de arie fotosensibilă. Tensiunea de ali-

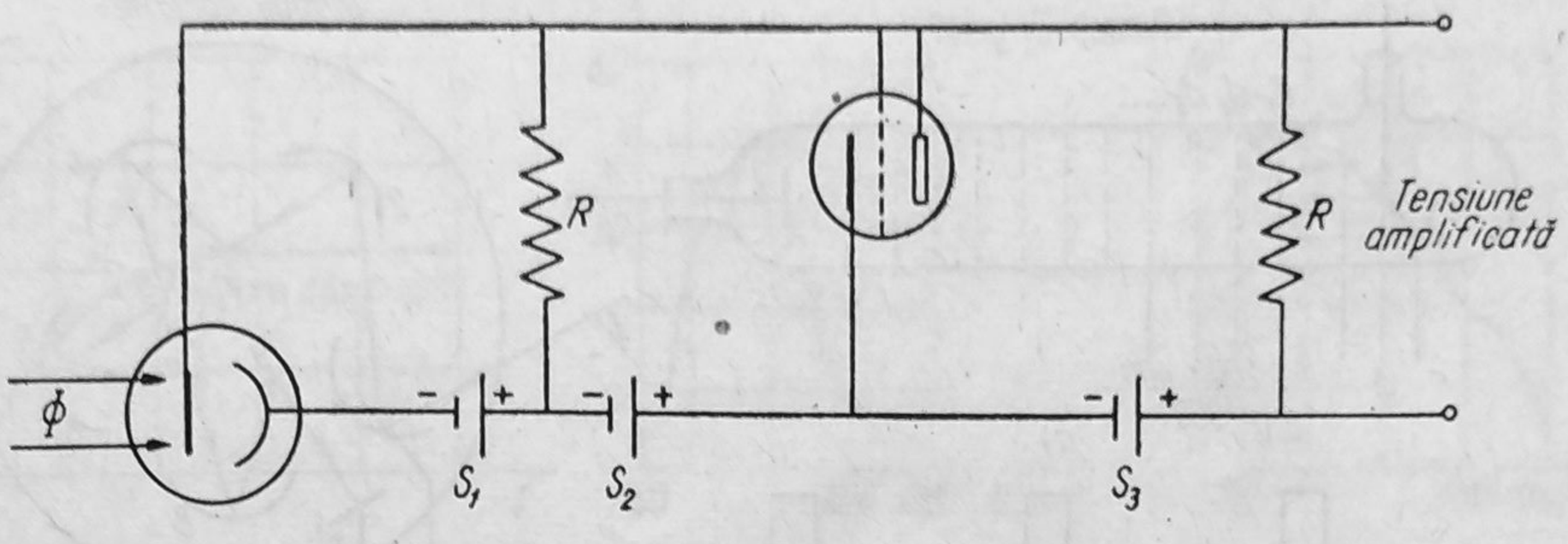


Fig. 20.3

mentare este de obicei cuprinsă între 100—200 V. Curentul fotoelectric furnizat de celula fotoemisivă poate fi amplificat utilizînd o triodă montată în paralel cu celula şi cu două rezistenţe (fig. 20.3). Curentul debitat de celulă pe rezistenţa R, de valoare mare, modifică potenţialul grilei triodei polarizate de sursa S_2; tensiunea amplificată se culege la bornele rezistenţei R.

Celulele fotoemisive sînt utilizate în fotometrie pentru măsurarea fluxurilor luminoase, în cinematografie pentru citirea pistei sonore a filmelor şi în automatizări (de exemplu ca supraveghetoare de flacără sau avertizoare).

20.2. **Fotomultiplicatorul**

Fotomultiplicatorul este un tub fotoelectric în care curentul emis de catod este amplificat prin emisii electronice secundare care se produc pe mai mulţi electrozi auxiliari, succesivi, la care lucrul de extracţie este mic. Un singur electron fotoelectric emis de catod poate elibera mai mulţi electroni secundari de pe suprafaţa unui electrod auxiliar, fie s în medie. Cele mai bune suprafeţe (oxid de argint sau antimoniu acoperit cu cesiu) dau $s = 10$. Dacă electronii secundari lovesc o suprafaţă analogă, după o accelerare suficientă ei produc o altă emisie secundară etc. Dacă avem n electrozi de acest gen, numiţi *dinode*, numărul electronilor primari este amplificat cu s^n. Exemplu : pentru $n = 7$ şi $s = 5$, $s^n = 75\,000$. S-au obţinut, în mod curent, fotomultiplicatoare cu $s^n = 10^6$. Dinodele d_1, d_2, d_3, ... au potenţialele în progresie crescătoare 100 V, 200 V, 300 V, ... pentru a asigura accelerarea electronilor secundari.

Există diferite soluţii constructive pentru fotomultiplicatoare (fig. 20.4) ; soluţia cu dinodele curbate asigură un gabarit redus. Sînt două categorii de

fotomultiplicatoare : cele cu raportul de multiplicare de ordinul 10^6, denumite comerciale, şi cele la care acest raport este de ordinul 10^8, denumite rapide, şi care au 12—14 etaje de amplificare (dinode).

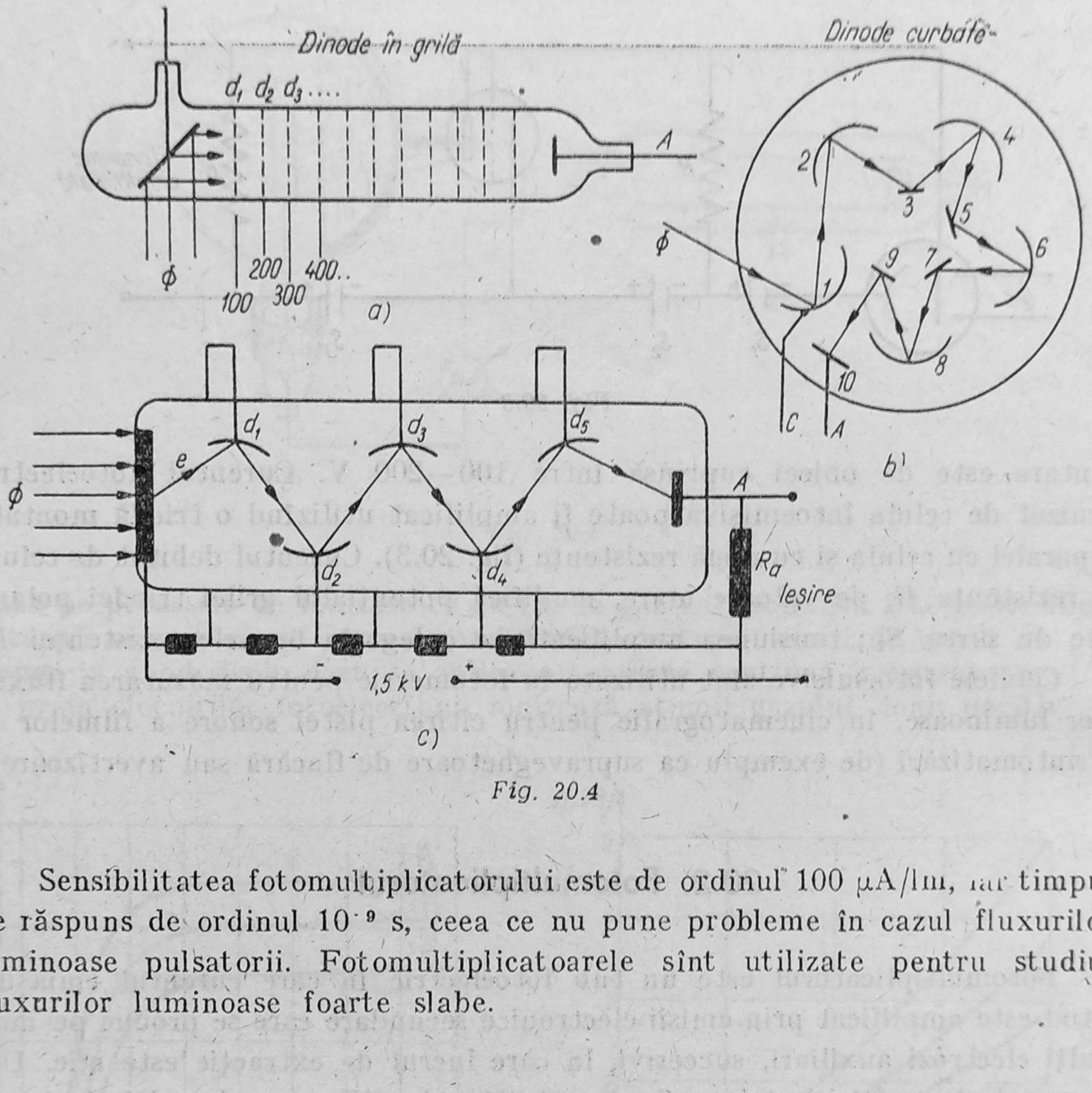


Fig. 20.4

Sensibilitatea fotomultiplicatorului este de ordinul 100 μA/lm, iar timpul de răspuns de ordinul 10^{-9} s, ceea ce nu pune probleme în cazul fluxurilor luminoase pulsatorii. Fotomultiplicatoarele sînt utilizate pentru studiul fluxurilor luminoase foarte slabe.

20.3. Efectele fotoelectrice în semiconductoare

20.3.1. Efectul fotoconductiv sau fotorezistiv

Dacă un semiconductor este iluminat, lumina pătrunde în volumul său, pe o adîncime care depinde de natura semiconductorului şi de lungimea de undă a luminii ; are loc eliberarea unor electroni din legăturile lor covalente, mărindu-se astfel conductivitatea electrică : $\sigma = \sigma_0 + \sigma_{fc}$, unde σ_{fc} este fotoconductivitatea, care depinde de timpul de iluminare (fig. 20.5, a). Dacă electronii liberi şi golurile nu s-ar recombina, fotoconductivitatea ar trebui să crească proporţional cu timpul de iluminare (linia întreruptă).

Cînd numărul purtătorilor de sarcini atinge o anumită valoare, numărul perechilor fotogenerate (electroni și goluri) devine egal cu cel al perechilor care se recombină și se ajunge într-o stare staționară cînd σ_{fo} = constant.

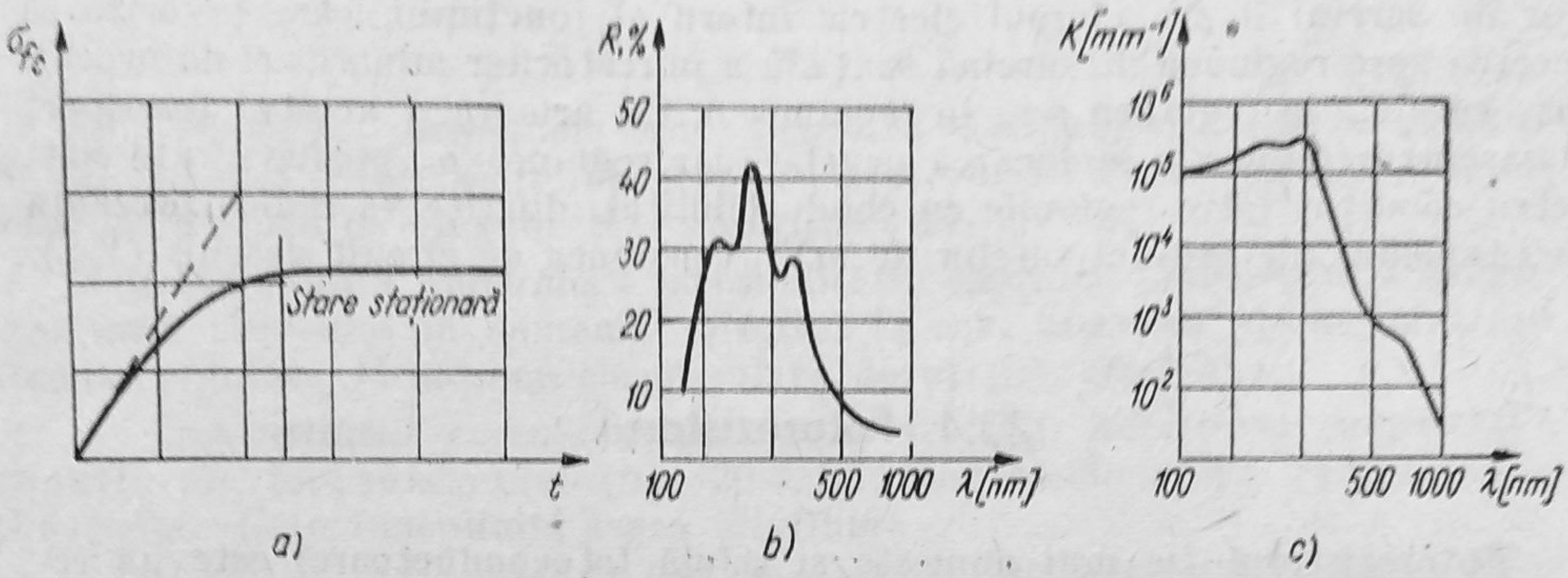


Fig. 20.5

20.3.2. Absorbția luminii în semiconductoare. Efectul Dember

O parte din lumina incidentă pe suprafața unui semiconductor este reflectată, iar o altă parte pătrunde în interiorul materialului. Coeficientul de reflexie definește fracțiunea din energia fluxului luminos care se reflectă pe suprafață și depinde de unghiul de incidență, de natura semiconductorului și de lungimea de undă a luminii (spectrul de reflexie). În cazul incidenței normale, spectrul de reflexie al siliciului este reprezentat în figura 20.5, b. Datorită absorbției în semiconductoare, intensitatea luminii se micșorează cu distanța x de pătrundere : $I = I_0 \cdot \exp(-kx)$, unde I_0 este intensitatea luminii transmise imediat după suprafața semiconductorului, iar k este coeficientul de absorbție. Coeficientul de absorbție depinde de natura semiconductorului și de lungimea de undă ; $k = k(\lambda)$ — *spectrul de absorbție*. Absorbția diferită a luminii în funcție de lungimea de undă face ca și adîncimea pînă la care pătrunde lumina să fie funcție de λ. Pentru siliciu (fig. 20.5, c) se observă că lumina ultravioletă este absorbită într-un strat foarte subțire, în timp ce pentru lungimi de undă mai mari decît 1 μm siliciul este practic transparent.

Viteza de generare a purtătorilor de sarcini depinde de coeficientul de absorbție k și de fluxul luminos Φ. Cum $k = k(\lambda)$, iar Φ scade cu adîncimea, putem afirma că viteza de generare este diferită la adîncimi diferite sau, cu alte cuvinte, că în volumul semiconductorului se produce o generare neuniformă a purtătorilor liberi sub acțiunea luminii : concentrațiile de neechilibru ale purtătorilor vor scădea cu adîncimea. În acest caz, se produce o difuzie a purtătorilor liberi din regiunea cu concentrație mare spre regiunea cu concentrație mică : cum coeficientul de difuzie al electronilor este mai mare decît cel al golurilor, golurile vor rămîne mereu în urma electronilor, ceea ce duce la o separare spațială a purtătorilor liberi. Suprafața iluminată se va încărca pozitiv, iar cea neiluminată — negativ, în semiconductorul omogen apărînd un cîmp electric : *efectul Dember*.

20.3.3. **Efectul fotovoltaic**

Un efect similar, însă mult mai pronunţat, apare atunci cînd se iluminează o joncţiune $p - n$. În acest caz, rolul esenţial în separarea purtătorilor de sarcini îl are cîmpul electric intern al joncţiunii, care favorizează trecerea spre regiunea de sarcină spaţială a purtătorilor minoritari de neechilibru ce apar în regiunea p şi în regiunea n. Ca urmare a acestui transport de sarcini, regiunea n se încarcă negativ, iar regiunea p, pozitiv ; un voltmetru conectat între regiunile cu conductibilităţi diferite va indica prezenţa unei tensiuni (de ordinul sutelor de mV), tensiunea de circuit deschis (V_{CD}).

20.4. **Fotorezistorul**

Fotorezistorul (se mai numeşte şi celulă fotoconductoare) este un receptor fotoelectric cu semiconductor, în care absorbţia radiaţiei luminoase provoacă o creştere a conductivităţii electrice prin efect fotoelectric intern. Este constituit dintr-o plăcuţă de sticlă sau de cuarţ pe care se depune un strat de metal (aur sau platină), sub forma a două benzi sau de forma unui strat continuu în care se trasează fante şi un al doilea strat semiconductor. Stratul metalic, care formează electrozii fotorezistorului, poate fi depus şi deasupra stratului semiconductor folosind teholnogia depunerii în vid. În figura 20.6 sînt reprezentate structura (a) şi simbolul (b) unui fotorezistor.

Parametrii şi caracteristicile fotorezistorilor :

— *Rezistenţa de întuneric* R_d, definită ca rezistenţa inclusă în circuitul electric de către fotorezistorul neiluminat.

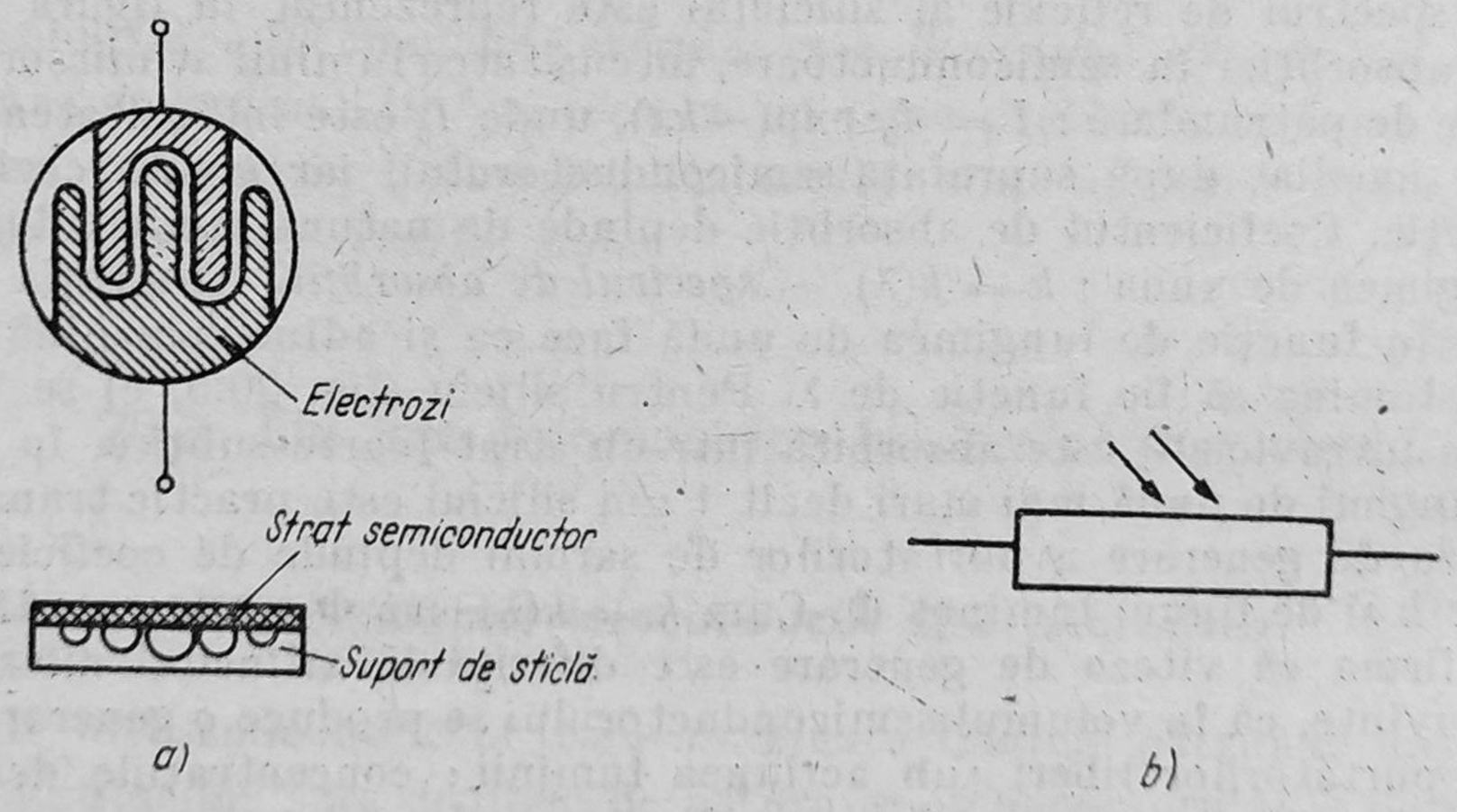


Fig. 20.6

— *Sensibilitatea integrală* S definită ca raportul dintre fotocurent şi fluxul luminos incident la suprafaţa fotorezistorului

$$S = \frac{I_\Phi}{\Phi} = \frac{I - I_d}{\Phi}$$

FIZICĂ
UNIV. „AL. I. CUZA"

unde I este curentul care trece prin fotorezistor la iluminare, iar I_d curentul de întuneric. $I - I_d = I_t$ reprezintă fotocurentul.

— *Sensibilitatea spectrală* se referă la iluminarea monocromatică

$$S_\lambda = \frac{I_{\Phi\lambda}}{\Phi_\lambda}.$$

— *Pragul de sensibilitate* este mărimea semnalului luminos minim (fluxul Φ_0) care poate să fie observat cu ajutorul fotorezistorului. Se determină cu nivelul de zgomot al fotorezistorului.

— *Caracteristica spectrală* a sensibilității exprimă distribuția sensibilității fotorezistorului în domeniul spectral în care lucrează (de la infraroșu pînă la regiunea radiațiilor corpusculare dure) (fig. 20.7, a).

— *Caracteristicile curent-tensiune* : $I(V)$ și $I_d(V)$ determină propeitățile electrice ale fotorezistorului (fig. 20.7, b). De obicei, aceste caracteristici sînt liniare (este îndeplinită legea lui Ohm).

— *Caracteristcile de lumină* (sau energetice) : $I(E)$ și $I_\Phi(E)$, reprezentate în figura 20.7, c, d.

— *Caracteristicile de frecvență* reprezintă dependența parametrilor fotorezistorului de frecvența de modulare a fluxului luminos. Cel mai mare interes îl prezintă caracteristica de frecvență a sensibilității $S(f)$, precum și

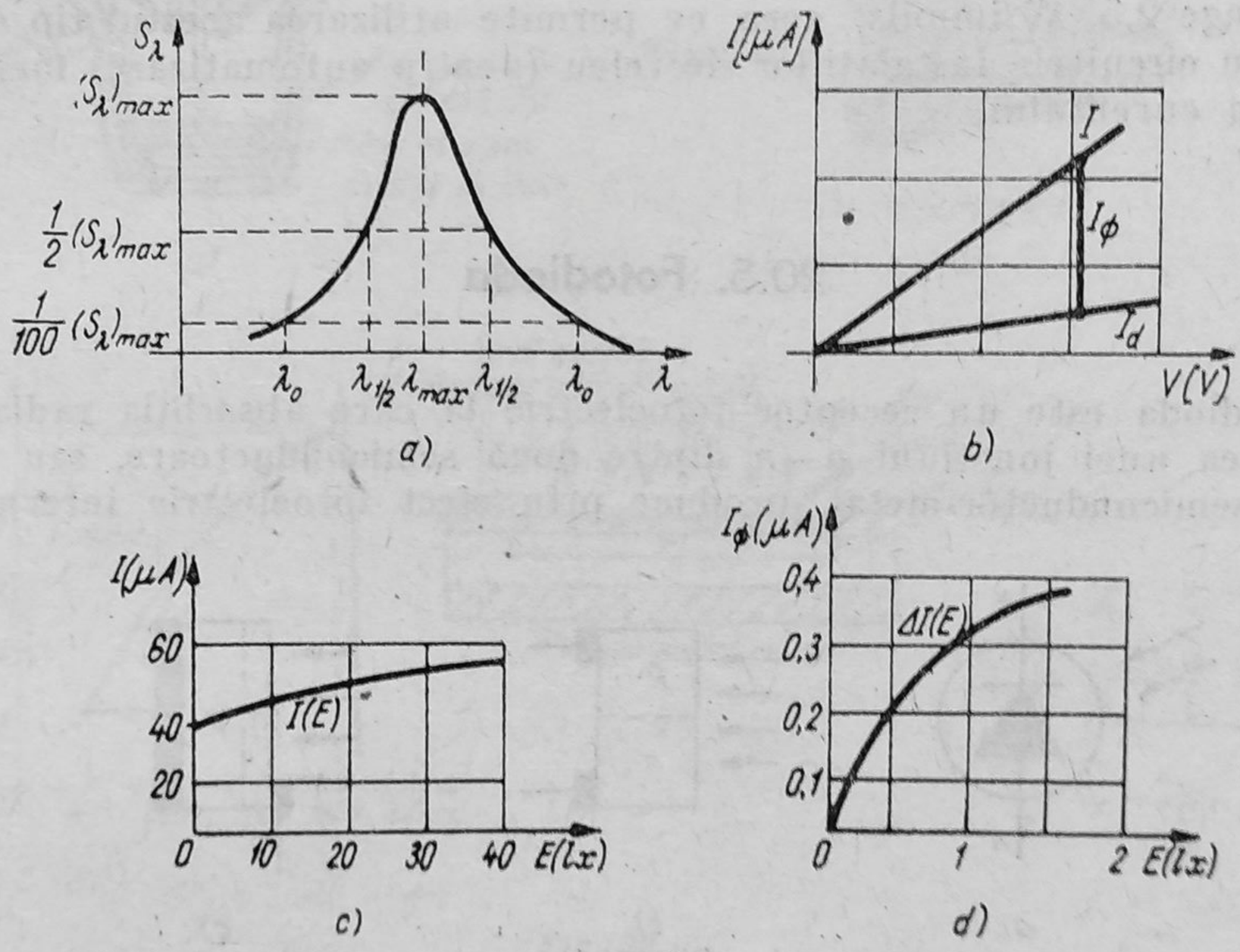


Fig. 20.7

caracteristica de frecvență a nivelului de zgomot $V_{zg}(f)$, care se determină cu forma predominantă de zgomot pentru fotorezistorul de tipul dat. Din aceste două caracteristici se poate obține ușor dependența de frecvență a pragului de sensibilitate a fotorezistorului $\Phi_0(f)$.

— *Caracteristicile de temperatură* ale parametrilor fundamentali $R_d(T)$, $S(T)$ și $\Phi_0(T)$ ai fotorezistorilor au o importanță practică deosebită.

Cele mai utilizate tipuri de fotorezistori, pentru domeniul spectral vizibil sînt :

— fotorezistorul din seleniu cristalin lucrează în domeniul vizibil și infraroșu apropiat ; deși are sensibilitatea mult mai mare decît a fotoelementelor cu vid pe bază de efect fotoelectric extern, în prezent nu se mai folosește pe scară largă, deoarece sensibilitatea lui este considerată prea mică ;

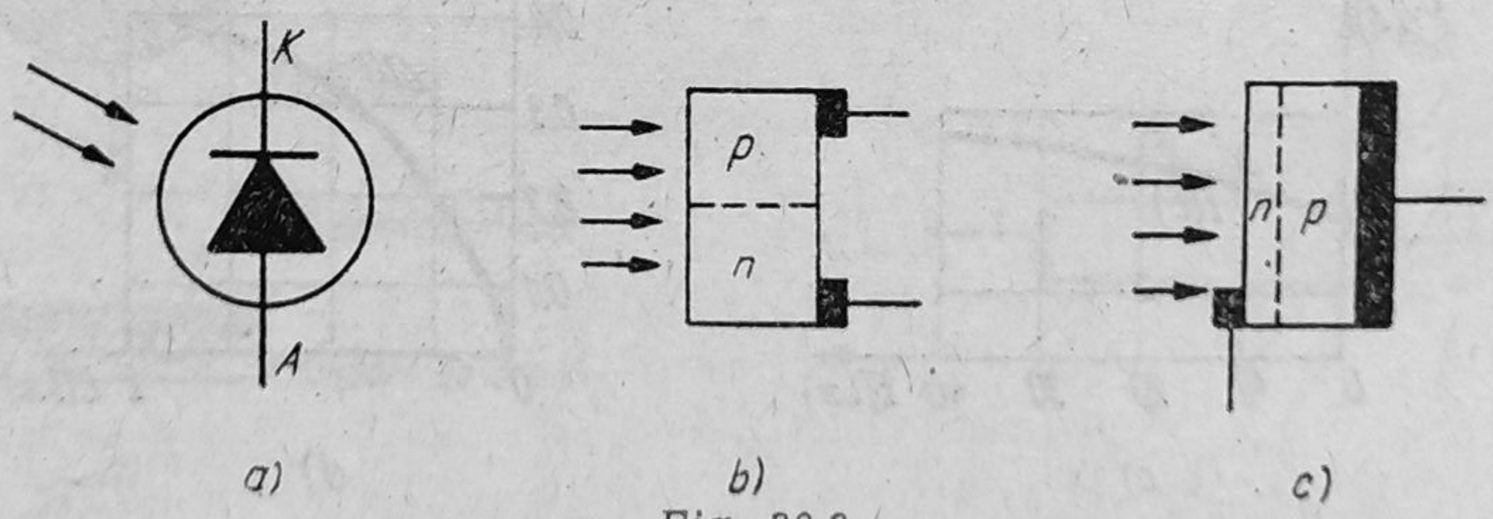
— fotorezistorul din sulfură de taliu și fotorezistorul din sulfură de bismut, deși au caracteristici mai bune decît fotorezistorul cu seleniu, nu au o răspîndire prea mare ;

— fotorezistorul din sulfură de plumb se bucură în prezent de un larg succes pe scară industrială. Acest tip de fotorezistor lucrează în domeniul spectral vizibil. Prin răcirea fotorezistorului caracteristica spectrală se dublează către lungimile de undă mari ale spectrului, iar sensibilitatea crește. Răcirea se realizează în microfrigidere cu semiconductori (pînă la —50°C) sau în vase mici de tip Dewar umplute cu azot lichid sau heliu lichid (pînă la —140°C) ;

— fotorezistorul din sulfură de cadmiu monocristalină sau policristalină. Caracteristica spectrală a fotorezistorului din CdS monocristalin prezintă o mare selectivitate, prezentînd un maxim de sensibilitate spectrală în domeniul vizibil : $\lambda_{max} = 510$ nm, iar $\lambda_0 = 550$ nm. O particularitate a fotorezistorului din CdS policristalin este valoarea mare a puterii disipate, care poate atinge 2,5 W/impuls; ceea ce permite utilizarea acestui tip de fotorezistor în circuitele instalațiilor de releu (pentru automatizare) fără o amplificare a curentului.

20.5. **Fotodioda**

Fotodioda este un receptor fotoelectric la care absorbția radiației în vecinătatea unei joncțiuni $p-n$ dintre două semiconductoare, sau a unui contact semiconductor-metal, produce prin efect fotoelectric intern o va-



a) b) c)

Fig. 20.8

riație a rezistenței electrice, care depinde de sensul curentului. Reprezentarea simbolică este indicată în figura 20.8, a.

Influența radiației asupra joncțiunii $p-n$ depinde de o serie de factori ca intensitatea și lungimea de undă a radiației incidente, dimensiunile geometrice și parametrii fizicii ai joncțiunii $p-n$, precum și de direcția de in-

cidență a radiației față de planul joncțiunii. Sînt posibile două scheme constructive ale fotodiodelor, care corespund celor două cazuri extreme, reprezentate în figura 20.8 : radiația este paralelă cu planul joncțiunii, (fig. 10.8, **b**) radiația este perpendiculară cu planul joncțiunii (fig. 20.8, c).

Parametrii și caracteristicile fotodiodelor :

— *curentul de întuneric* I_d,

— *rezistența statică de întuneric*, definită pentru tensiunea fixă $V=1$ volt, prin inversul curentului de saturație : $R_{st} = 1/I_s$,

— *rezistența dinamică* $R_d = \mathrm{dV/dI}$,

— *tensiunea maximă admisă*, V_{max},

— *tensiunea de zgomot*, V_{zg},

— *sensibilitatea integrală* $S = I_\Phi/\Phi$.

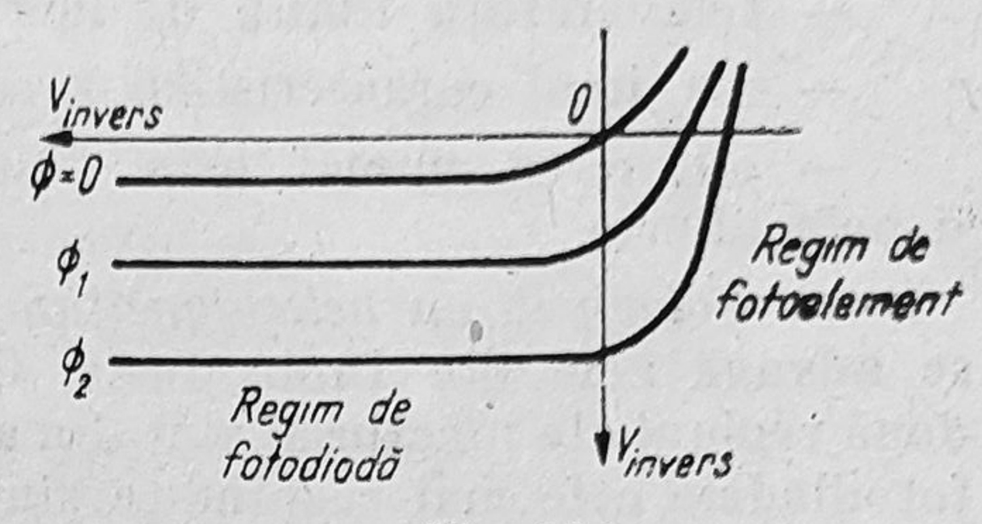


Fig. 20.9

Caracteristica curent-tensiune (fig. 20.9). În absența iluminării, caracteristica fotodiodei în sens direct și invers nu se deosebește cu nimic de caracteristica curent-tensiune a joncțiunii $p-n$ redresoare. Iluminarea conduce la creșterea curentului invers.

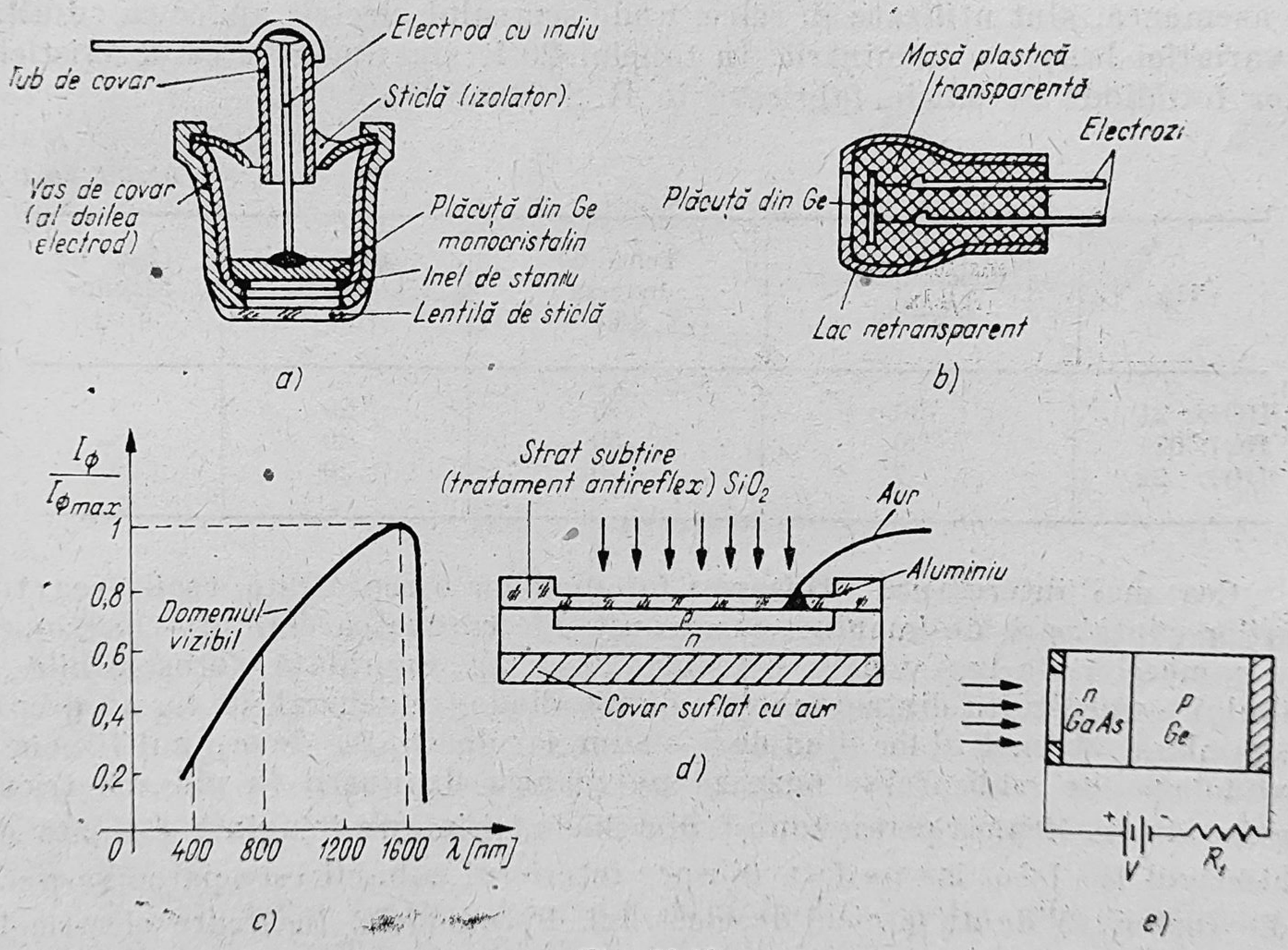


Fig. 20.10

— *Caracteristicile de lumină* sînt în general liniare. Fotodiodele sînt receptori de radiație cu inerție relativ mică.

Tipuri constructive de fotodiode (fig. 20.10) :

— *Fotodiodele din germaniu* pot avea carcasa metalică (a) sau din plastic (b). Caracteristica spectrală a unei fotodiode de germaniu, reprezentată

în figura 20.10, c, arată că sensibilitatea maximă corespunde unei lungimi de undă $\lambda = 1600$ nm. Temperatura maximă de lucru este de $\simeq 55°C$.

— *Fotodioda din siliciu* (*d*). Diferențele față de fotodiodele cu germaniu sînt :

— temperatura limită de lucru în jur de 140°C,

— maximul caracteristicii spectrale pentru $\lambda = 800$ nm,

— obținerea numai prin difuzie (fotodiodele din germaniu se obțin și prin aliere).

— *Fotodioda cu heterojoncțiune* (e). Fotodiodele din Ge, din Si, la care se adaugă cele din InSb, InAs, GaAs, ZnS, sînt cu homojoncțiune (cele două regiuni ale joncțiunii sînt din același material, dopate diferit). În prezent fotodiodele cele mai răspîndite sînt cu heterojoncțiune (regiunile joncțiunii sînt din materiale diferite). Avantajul unei astfel de fotodiode constă în răspunsul de frecvență, care nu mai depinde de distanța la care se află joncțiunea de suprafață, ci numai de absorbția specifică a fiecărui semiconductor.

Fotodiodele se folosesc în instalații opto-electronice la care mărimea semnalului electric este legată liniar de iluminarea suprafeței fotosensibile. De asemenea, sînt utilizate în relee, unde semnalul electric apare ca rezultat al variației bruște a iluminării. În tabelul 20.1, sînt indicate caracteristicile unor fotodiode cu siliciu fabricate în R. S. România.

Tabelul 20.1

Tip	Sensibilitate [A/klx]	Tensiune inversă [V]	Curent de întuneric [nA]	Timp de răspuns [μs]
ROL 21	30	75	20	1
ROL 021	30	50	20	1
ROL 22	7	70	20	1

Cea mai interesantă utilizare a fotodiodelor o reprezintă realizarea tuburilor captatoare de imagine, care constituie traductoarele opto-electronice ale camerelor de luat vederi TV (fig. 20.11, a). Suprafața fotosensibilă a tubului e constituită dintr-o matrice de fotodiode (în general, de formă dreptunghiulară), diametrul lor fiind de 5—6 μm, iar densitatea de ordinul 10^5 cm^{-2} (tehnologia de realizare se bazează pe tehnica depunerii în vid). Matricea de fotodiode, depusă pe un suport din siliciu, primește imaginea formată de obiectivul tip foto, iar pe fața dinspre interiorul tubului este parcursă periodic (baleiată) de un fascicul de electroni. Fotodiodele, încărcate electric la o primă trecere a fasciculului electronic, sînt descărcate proporțional cu iluminarea imaginii în punctul considerat, astfel încît la o a doua trecere a fasciculului apar curenți diferiți de reîncărcare, care produc căderi de tensiune variabile pe rezistorul R, obținîndu-se astfel semnalul video (fig. 20.11, b). Semnalul video, reluat de condensatorul C, este amplificat și completat cu semnale de sincronizare care marchează începutul baleierii unei noi linii și

a unui nou cadru, în vederea modulării frecvenței de emisie a stației de televiziune. Sensibilitatea spectrală a tubului captator de imagini acoperă domeniul 350—1 000 nm, dar există și tuburi captatoare care lucrează în infraroșu (pentru observarea nocturnă).

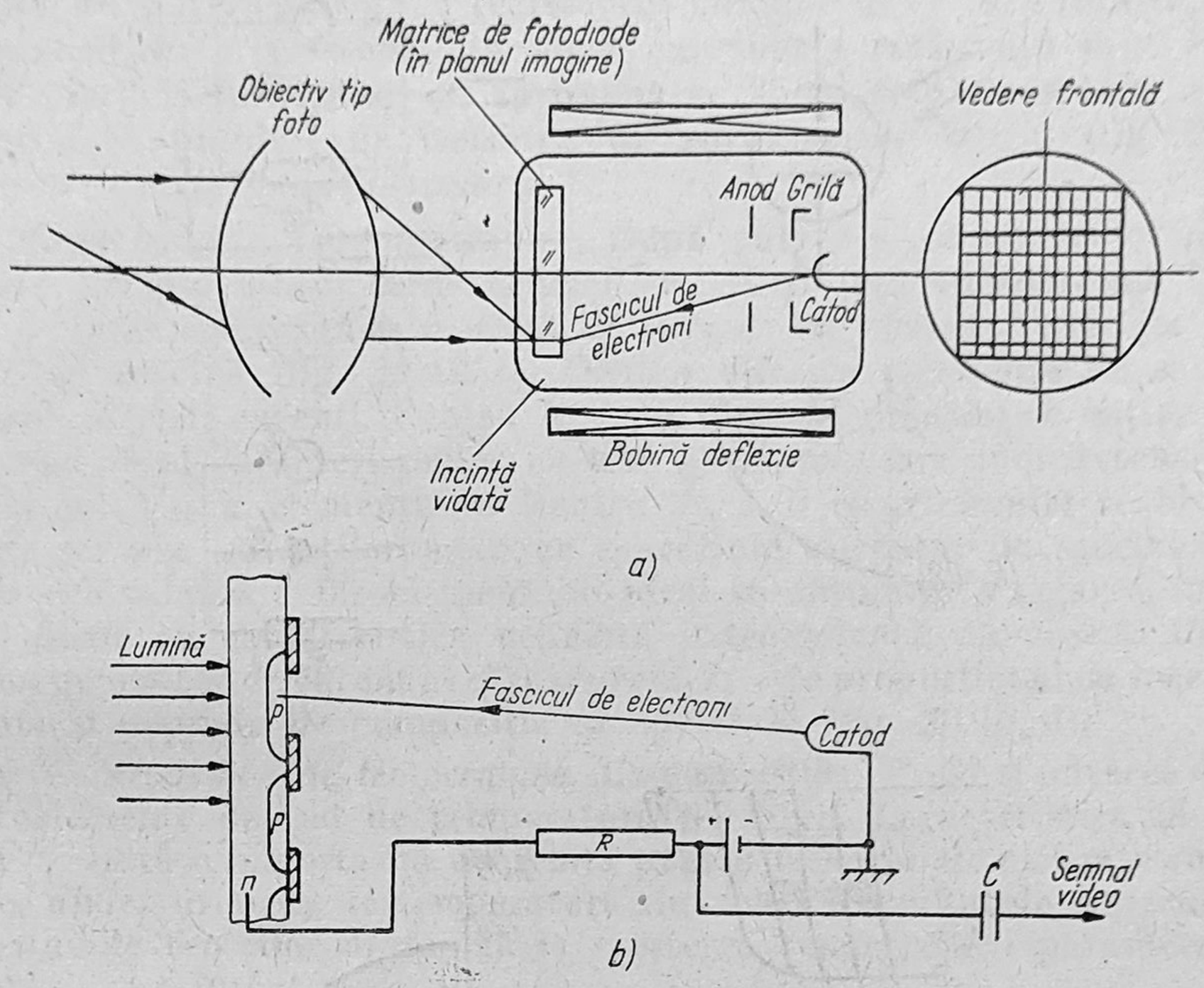


Fig. 20.11

20.6. **Fotoelementul**

Fotoelementul (numit și celulă fotovoltaică sau fotopilă) reprezintă un receptor fotoelectric în care sub acțiunea luminii apare o tensiune electromotoare, datorită efectului fotovoltaic. Reprezentarea simbolică este indicată în figura 20.12, a. Față de celelalte componente fotoelectrice în care are loc numai o variație a curentului în circuitul alimentat de o sursă, numai fotoelementele realizează conversia directă a energiei luminoase în energie electrică.

Un parametru foarte important al fotoelementului este randamentul de conversie a energiei luminoase în energie electrică $\eta = P_m/P_i$, unde P_m este puterea electrică debitată pe rezistența de sarcină acordată pentru regimul de maxim (determinarea regimului optim de funcționare a fotoelementului se face folosind caracteristica curent-tensiune a fotoelementului), iar P_i este puterea radiației incidente pe fotoelement ; în cazul în care fotoelementele se utilizează drept convertizori ai energiei radiației solare în energie electrică (celule solare), P_i reprezintă puterea radiației solare incidente. Dată fiind importanța actuală a energiei radiației solare, în cadrul cercetărilor efectuate

pe plan internaţional şi naţional se acordă o atenţie deosebită preocupărilor legate de randamentul de conversie al celulelor solare. Randamentul de conversie depinde de natura semiconductorului, dar şi de o serie întreagă

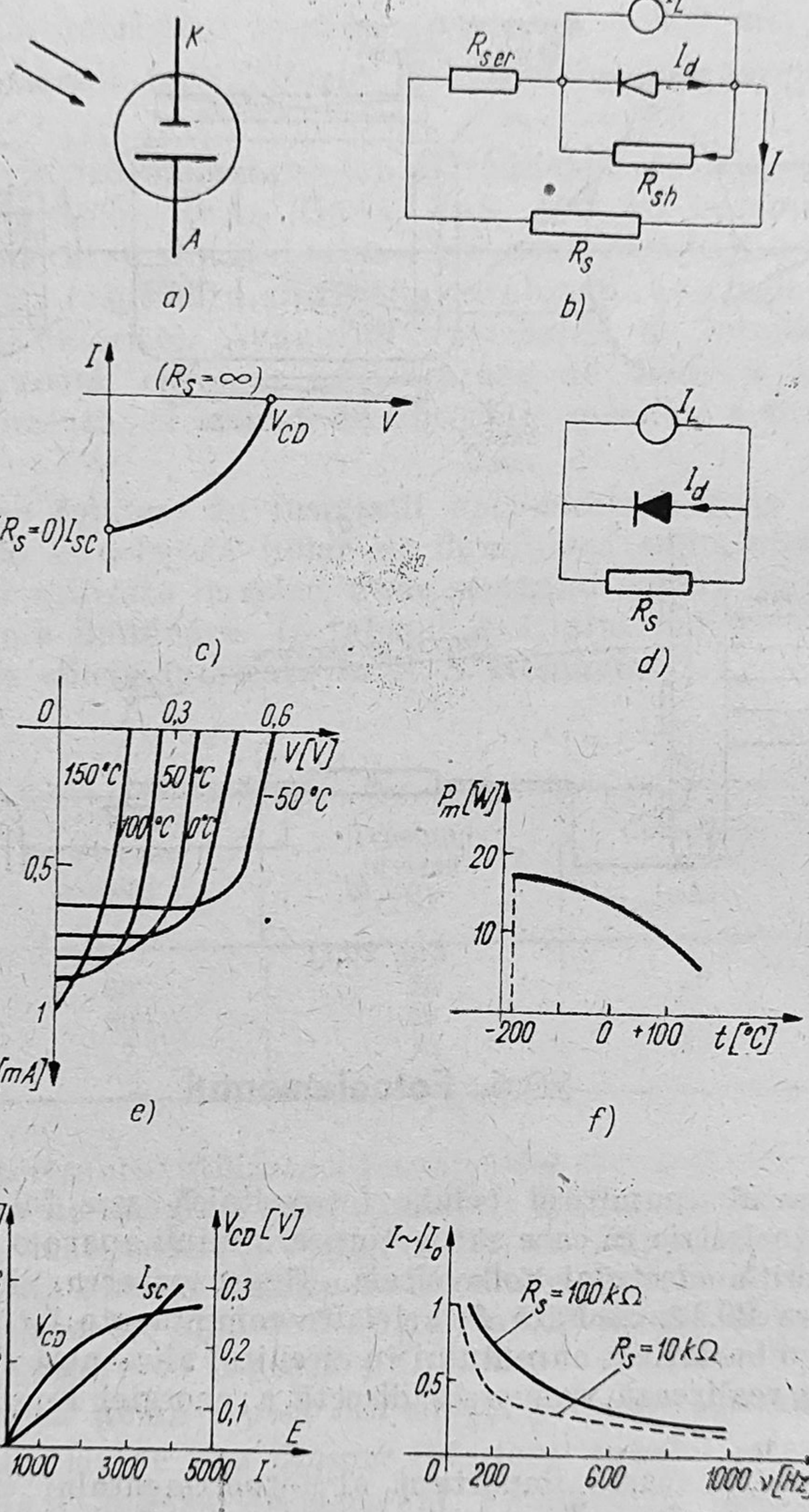


Fig. 20.12

de factori, dintre care cel mai important şi cel mai greu de evaluat este, pentru celulele solare, puterea radiaţiei solare.

Factorii constructivi de care depinde randamentul de conversie se pot grupa în două categorii :

— factori ce definesc procesele suferite de radiație, pierderile luminoase prin reflexie sau absorbție atingînd 30%;

— factori ce definesc pierderile energetice suferite de electroni și goluri, generate prin absorbția radiației și mișcarea lor în interiorul fotoelementului. Schema echivalentă a fotoelementului real, în care se iau în considerație pierderile de putere datorate rezistenței contactelor și a șuntării semiconductorului printr-o rezistență de ieșire, cuprinde o rezistență șunt R_{sh} (care produce pierderi de curent de aproximativ 25%) și o rezistență serie R_{ser} (care produce pierderi de tensiune de aproximativ 30%), (fig. 20.12, b).

Caracteristicile fotoelementelor :

— *Caracteristica curent-tensiune.* După cum s-a văzut la fotodiodă, la iluminări pe porțiunea caracteristicii $V-A$ situată în cadrauul IV, joncțiunea $p-n$ se comportă ca o sursă de curent, iar circuitul exterior ca o rezistență de sarcină (fig. 20.12, c). Pentru diferite rezistențe de sarcină R_s corespund diferiți curenți. Pentru $R_s = \infty$ (circuit deschis) se obține punctul de intersecție al caracteristicilor cu axa tensiunii, care indică tensiunea de mers în gol V_{CD} a elementului. Pentru $R_s = 0$ (scurtcircuit) se obține intersecția cu axa curenților, ceea ce reprezintă curentul de scurtcircuit I_{sc}. Schema echivalentă a fotoelementului ideal se obține prin legarea în paralel a unei diode cu caracteristica neliniară independentă de nivelul iluminării și a unui generator de curent al cărui curent I_L este proporțional cu intensitatea radiației și depinde de compoziția sa spectrală (fig. 20.12, d).

— *Caracteristica de temperatură.* Caracteristica $V-A$ și puterea debitată de fotoelemente depind de temperatura de lucru. Caracteristica de temperatură prezintă o importanță deosebită pentru fotocelulele utilizate în spațiul cosmic, unde variațiile de temperatură sînt mari. Rezultatele experimentale, ca și studiile teoretice arată că la creșterea temperaturii parametrii fotoelementului se înrăutățesc :

— variația caracteristicilor $V-A$ la variația temperaturii între $-50°C$; $+150°C$: în timp ce curentul de scurtcircuit variază foarte puțin, tensiunea de mers în gol V_{CD} scade substanțial la creșterea temperaturii (fig. 20.12, e);

— variația puterii de ieșire (maxime) în funcție de temperatură (fig. 20.12, f).

— *Caracteristica de lumină* în regim de scurtcircuit este liniară pentru fluxuri luminoase nu prea mari, panta caracteristicii definind sensibilitatea integrală a fotoelementului (fig. 20.12, g) : $S = I_{sc}/\Phi$.

Fotoelementele prezintă fenomenul de oboseală, care crește cu iluminarea, cu scăderea temperaturii și cu micșorarea rezistenței de sarcină R_s. Acest fenomen este mai accentuat la începutul funcționării, după care parametrii fotoelementului se stabilizează.

O altă caracteristică de lumină este cea a tensiunii de circuit deschis. Această caracteristică este neliniară, V_{CD} variază logaritmic cu iluminarea (fig. 20.12, g).

— *Caracteristicile spectrale* ale fotoelementelor sînt specifice materialului joncțiunii $p-n$.

— *Caracteristica de frecvență*, adică dependența amplitudinii componentei variabile a fotocurentului de frecvența de modulare a fluxului luminos, este foarte importantă pentru utilizările fotoelementelor în instalații optoelectronice de prelucrare a informației (fig. 20.12, h).

— *Constanta timpului de stabilire a fotocurentului*, parametru important, de asemenea, în instalaţiile opto-electronice de prelucrare a informaţiei, este de $10^{-2} \div 10^{-3}$ s.

— *Zgomotele fotoelementelor*, deoarece nu avem tensiune exterioară, sînt datorate în special fluctuaţiilor termice ale căderii de tensiune pe rezistenţa semiconductorului.

Tipuri constructive de fotoelemente :

— *Fotoelemente din siliciu.* Siliciul este materialul semiconductor cel mai adecvat pentru conversia eneigiei radiaţiei solare în energie electrică. După cum arată caracteristica spectrală, maximul sensibilităţii spectrale a fotoelementului cu siliciu, $\lambda_{max} = 750-800$ nm, este foarte aproape de maximul distribuţiei spectrale a energiei solare (fig. 20.13). Deci, din punct de vedere al caracteristicii spectrale, fotoelementele din siliciu sînt apropiate de receptorii ideali ai radiaţiei solare. Experimental s-a stabilit că la suprafaţa Pămîntului, pentru o putere a fluxului luminos de 1 000 W/m², densitatea fotocurentului de scurtcircuit atinge valorile 27 — — 33 mA/cm². Un alt factor hotărîtor în alegerea siliciului pentru celulele solare îl constituie posibilitatea actuală de obţinere a siliciului la scară industrială.

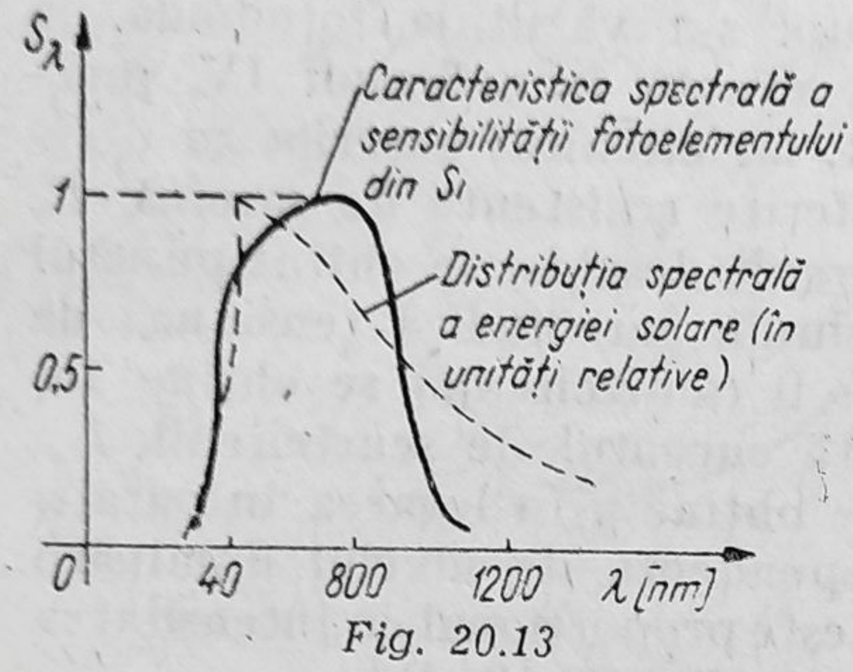


Fig. 20.13

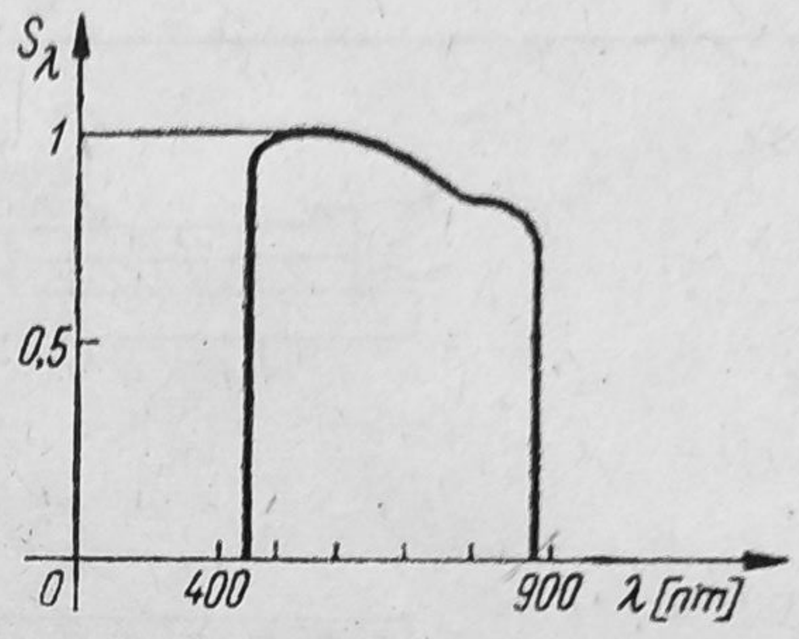
Pentru creşterea stabilităţii funcţionării fotoelementului, acesta se plasează într-o capsulă închisă, din sticlă organică, transparentă în domeniile vizibil şi infraroşu ale spectrului. Micşorarea pierderilor energetice prin reflexia luminii se realizează prin tratament antireflex (depuneri de straturi subţiri de SiO_2 şi SiO) ; tratamentul antireflex nu trebuie să afecteze radiaţiile din afara domeniului de lucru al fotoelementului ($\lambda < 450$ nm şi $\lambda > 1\,000$ nm), care nu produc decît încălzirea fotoelementului. Randamentul fotoelementului din siliciu realizat în acest mod atinge 14—16%. Pentru asigurarea unui randament ridicat al conversiei energiei radiaţiei solare în energie electrică trebuie utilizat siliciul pur (randamentul maxim, teoretic, atinge 25%). În cazul utilizării de siliciu impurificat sau din straturi policristaline se obţine un randament de 3—6%.

— *Fotoelemente din arseniură de galiu* (Ga, As). Un material foarte bun pentru confecţionarea fotoelementelor este GaAs, asigurînd un randament teoretic (29%) mai ridicat decît siliciul. Totuşi, fotoelementele din GaAs au răspîndire mai redusă, randamentul practic fiind mai mic. Astfel, fotocurentul măsurat la radiaţia solară pe Pămînt (puterea 1 000 W/m²) este cuprins între 13—22 mA/cm², mai mic decît pentru fotoelementele din siliciu.

— *Fotoelemente cu heterojoncţiuni.* Avantajele acestor fotoelemente nu constau în ridicarea performanţelor, ci în posibilitatea de a plasa joncţiunea mai departe de suprafaţă decît la fotoelementele cu homojoncţiuni. Studiul fotostructurii heterojoncţiunilor este încă insuficient, dificultăţile legate de construcţia dispozitivelor şi de obţinerea contactelor nefiind încă rezolvate.

Prezintă interes, mai ales din punct de vedere al caracteristicilor spectrale, fotoelementele cu heterojoncţiuni: *n* GaP—*p* Si, *n* ZnSe—*p* Ge, *n* ZnSe—*p* GaAs; pentru acesta din urmă caracteristica spectrală prezintă o formă aproape treaptă (fig. 20.14).

— *Fotoelemente cu straturi subţiri.* În ultimul timp cunosc o largă răspîndire fotoelementele cu heterojoncţiune din straturi subţiri, în primul rînd datorită costului mult mai scăzut decît al fotoelementelor din monocristale semiconductoare, dată fiind tehnologia mai simplă de obţinere. De asemenea, greutatea unor astfel de fotoelemente este foarte mică, deoarece este suficient un strat subţire de ordinul micrometrilor pentru a converti energia luminoasă în energie electrică. Astfel, pentru a produce acelaşi efect electric este necesară o cantitate de material de 1 000 de ori mai mică în cazul fotoelementelor cu straturi subţiri (în prezent sînt folosite la bordul navelor cosmice sau al sateliţilor). Grosimea mică a stratului semiconductor, asociată grosimii mici a suportului, poate conferi suplețe unor celule solare de dimensiuni mari; dar creşterea suprafeţei este însoţită de scăderea randamentului (de exemplu, pentru o suprafaţă a unui fotoelement de 100 cm² randamentul atinge 1—2%). Dezavantajele actuale ale fotoelementelor cu straturi subţiri, randament scăzut şi stabilitate redusă în timp, sînt dominate de avantajele tehnologice şi de utilizarea enunţată mai înainte. Fotoelementele cu straturi subţiri de CdS şi CdTe au cele mai favorabile posibilităţi de dezvoltare în convertirea energiei solare în energie electrică. De asemenea, s-au atins rezultate foarte bune cu fotoelemente cu straturi subţiri din Cu_2S—CdS, reuşindu-se să se îmbunătăţească randamentul de la 1% la 10%.



Caracteristica heterojoncţiunii ZnSe-GaAs

Fig. 20.14

Cercetările pe plan mondial, inclusiv la noi în ţară, privind conversia energiei radiaţiei solare în energie electrică, efectuate în ultimul deceniu, au dus la elaborarea mai multor metode tehnologice şi soluţii constructive pentru obţinerea unor celule solare cu heterojoncţiune CdS—Cu_2S (prezentate în figura 20.15). În tabelul 20.2 sînt prezentate caracteristicile unor fotoelemente fabricate în R. S. România.

Tabelul 20.2

Fotoelemente	Sensibilitate [A/klx]	Suprafaţa fotosensibilă [mm²]	Fototensiune la $E = 1$ klx [mV]	Timp de răspuns [μs]	Dimensiuni de gabarit [mm]
ROL 11	80	13	400	10	∅ 9,2×6,3
ROL 011	100	13	400	10	∅ 9,2×6,3
ROL 12	160	28	400	20	4×7×12
ROL 16	80	16	400	10	4×8×25

Tabelul 20.2 (continuare)

Celule solare	Fotocurent [mA]	Fototensiune [mV]	Randament de conversie [%]	Dimensiuni de gabarit [mm]
	la 80 mW/cm²			
ROL 41	90	500	12	29 × 29 × 10
ROL 45	90	4 500	12	80 × 80 × 12

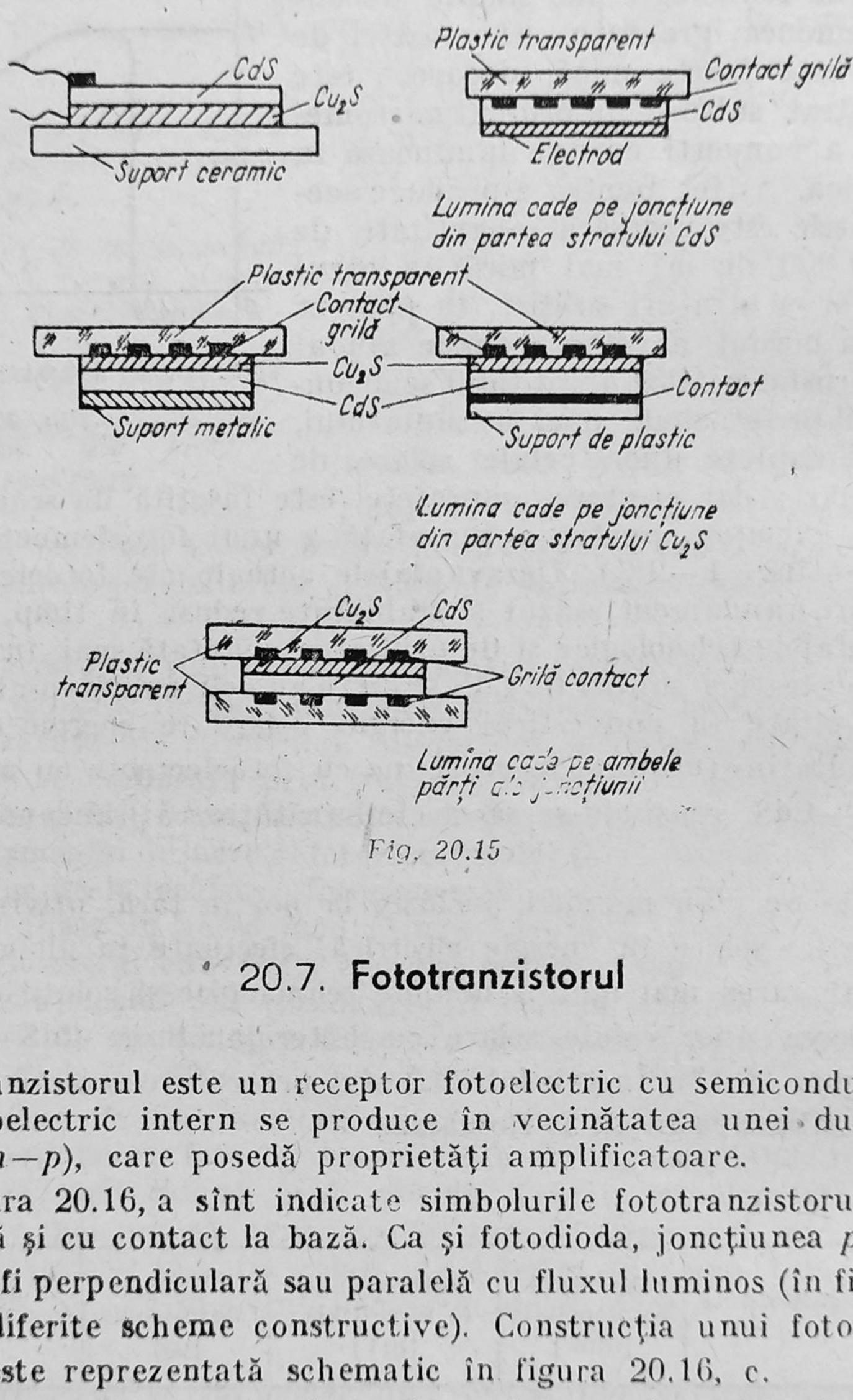


Fig. 20.15

20.7. Fototranzistorul

Fototranzistorul este un receptor fotoelectric cu semiconductori în care efectul fotoelectric intern se produce în vecinătatea unei duble joncțiuni $p-n$ ($p-n-p$), care posedă proprietăți amplificatoare.

În figura 20.16, a sînt indicate simbolurile fototranzistorului fără contact la bază și cu contact la bază. Ca și fotodioda, joncțiunea $p-n$ a emiterului poate fi perpendiculară sau paralelă cu fluxul luminos (în figura 20.16, b sînt date diferite scheme constructive). Construcția unui fototranzistor cu germaniu este reprezentată schematic în figura 20.16, c.

Dacă se menține constantă tensiunea între emiter și bază, funcționarea fototranzistorului nu se deosebește de cea a fotodiodei. Inițial, fototranzistorii s-au aplicat fără contactul bazei ($I_b = 0$), obținîndu-se o sensibilitate integrală mai mare decît la fotodiode. Contactul bazei unui fototranzistor

se folosește pentru liniarizarea caracteristicii luminoase la variații mici ale fluxului luminos și, de asemenea, la compensarea variațiilor parametrilor fototranzistorului datorate temperaturii sau altor factori externi.

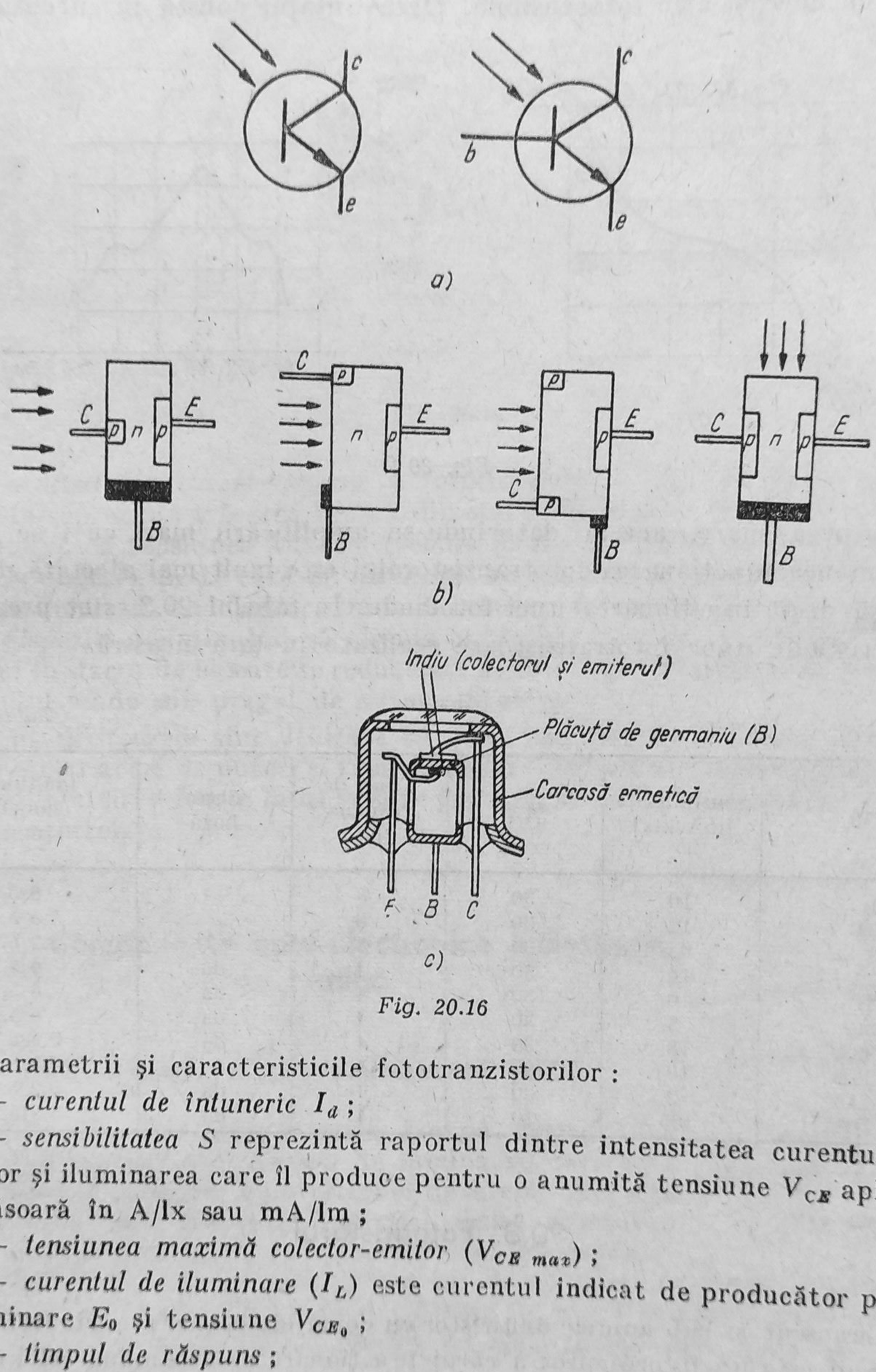


Fig. 20.16

Parametrii și caracteristicile fototranzistorilor :

— *curentul de întuneric* I_d ;

— *sensibilitatea* S reprezintă raportul dintre intensitatea curentului de colector și iluminarea care îl produce pentru o anumită tensiune V_{CE} aplicată. Se măsoară în A/lx sau mA/lm ;

— *tensiunea maximă colector-emitor* ($V_{CE\ max}$) ;

— *curentul de iluminare* (I_L) este curentul indicat de producător pentru o iluminare E_0 și tensiune V_{CE_0} ;

— *timpul de răspuns* ;

— *caracteristica curent-tensiune* (fig. 20.17, a) depinde de nivelul iluminării. Pentru tensiuni de ordinul mV curentul crește brusc ;

— *dependența spectrală* a tensiunii de circuit deschis V_{CD} (fig. 20.17, b).

Principalele avantaje ale fototranzistorului constau în sensibilitatea mult mai mare decît a unei fotodiode realizate din același material semiconductor, cu aceeași arie fotosensibilă. Dezavantajul constă în curentul de în-

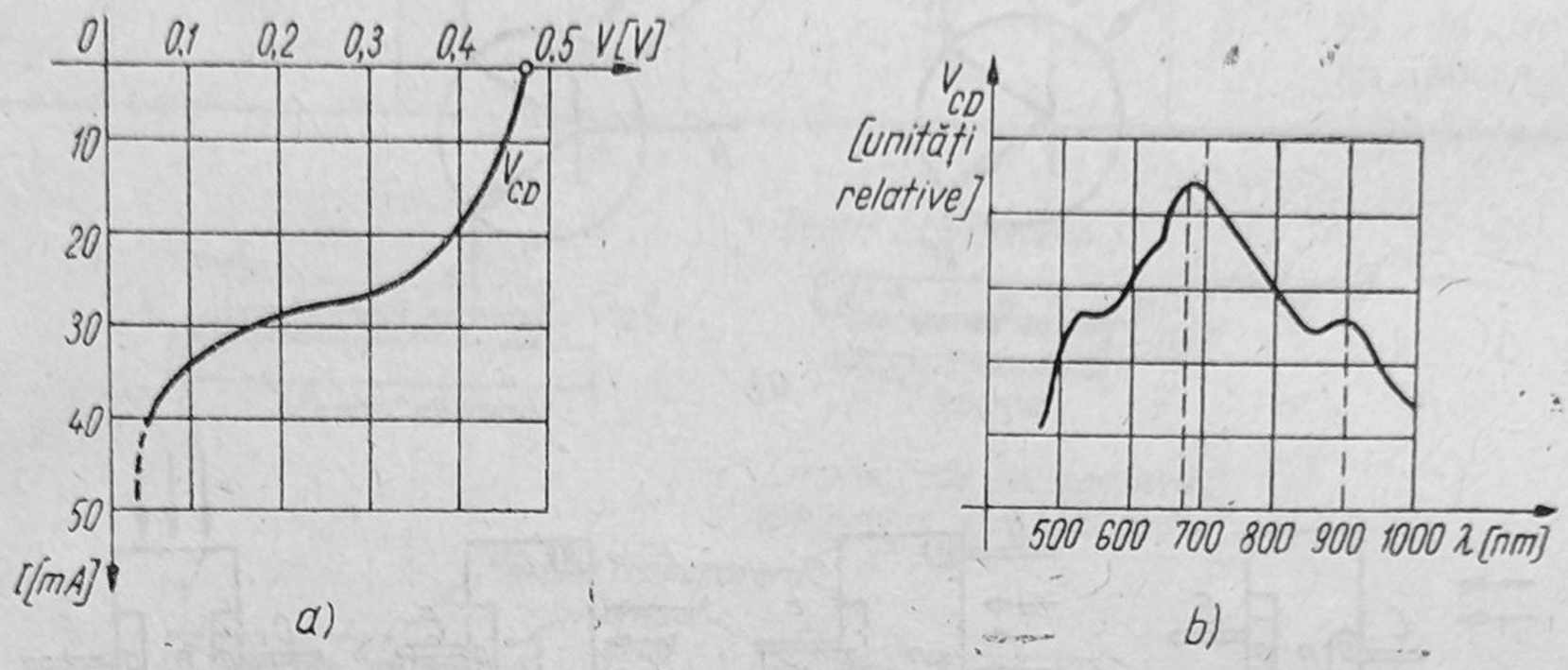


Fig. 20.17

tuneric prea mare, acesta datorîndu-se amplificării mari ce i se aplică. De asemenea funcționarea fototranzistorului este mult mai afectată de temperatură decît funcționarea unei fotodiode. În tabelul 20.3, sînt prezentate caracteristicile unor fototranzistoare realizate în țara noastră.

Tabelul 20.3

Tip	Sensibilitate [mA/klx]	$V_{CE\ max}$ [V]	Timp de răspuns [s]	Acces bază	Înălțimea/ diametru [mm]
ROL 31	10	30	8	—	6/5,7
ROL 031	12	30	8	—	7,5/5,7
ROL 32	0,5	30	8	—	5,2/5,7
ROL 33A	16	30	4	da	6/5,7
ROL 33B	10	30	4	da	6/5,7
ROL 33C	5	30	4	da	6/5,7
ROL 033A	18	30	4	da	7,5/5,7
ROL 033B	10	30	4	da	7,5/5,7
ROL 34A	2	30	4	da	5,2/5,7
ROL 34B	0,5	30	4	da	5,2/5,7

20.8. Fototiristorul

Cunoscut și sub numele de tiristor cu comandă optică a aprinderii, fototiristorul este un fotoreceptor a cărui funcționare se aseamănă celei a unui tiristor, cu deosebirea că tensiunea de comandă este realizată de un semnal luminos (fig. 20.18, a).

La fel ca și tiristorul, un fototiristor este alcătuit din trei joncțiuni de semiconductoare $p-n$. Amorsarea se face aplicînd o tensiune pozitivă pe poartă (fig. 20.18, b).

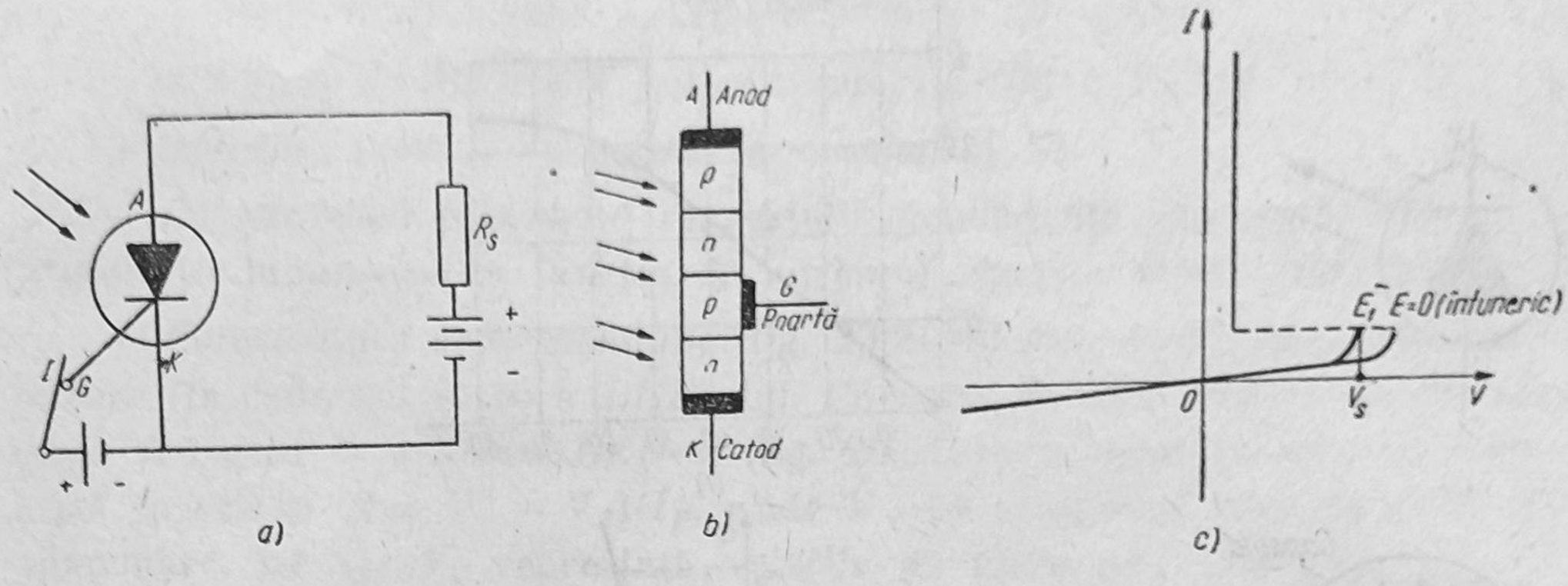


Fig. 20.18

Caracteristica curent-tensiune a fototiristorului (fig. 20.18, c). Linia întreruptă reprezintă trecerea bruscă din starea de blocare la cea de conducție. Se observă că tensiunea anodică trebuie să fie mai mică decît V_s (tensiunea de străpungere), peste care fototiristorul se deschide și în absența iluminării. O dată amorsată conducția, semnalul luminos de comandă poate să dispară, prin dispozitiv continuînd să circule curentul; pentru readucerea fototiristorului în starea de blocare se reduce sau se întrerupe tensiunea de alimentare (curentul scade sub pragul de automenținere).

Fototiristoarele sînt utilizate ca relee sau pentru comanda unor tiristoare sau triacuri de puteri și tensiuni mari, întrucît se realizează, prin intermediul luminii, o foarte bună izolare între circuitul de comandă și tensiunile înalte controlate.

20.9. Componente opto-electronice emițătoare de lumină

20.9.1. Dioda electroluminiscentă (LED)

Are proprietatea de a emite lumină atunci cînd este direct polarizată. Emisia de lumină se datorează recombinării radiative a purtătorilor de sarcină liberi din semiconductoare, frecvența radiației emise depinzînd de variația energiei în procesul de recombinare (fig. 20.19). Cînd recombinarea are loc direct între electronii din banda de conducție și golurile din banda de valențe (în cazul semiconductoarelor pure sau foarte slab impurificate) energia fotonilor emiși este egală cu lățimea benzii interzise

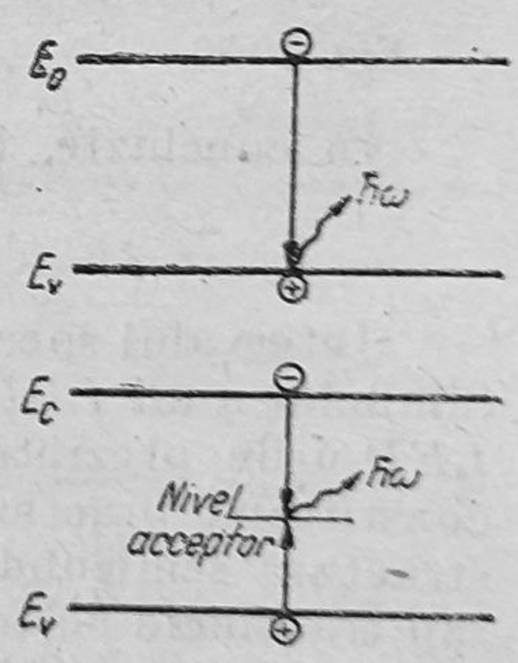
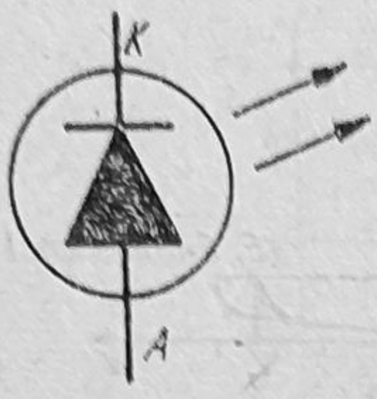


Fig. 20.19

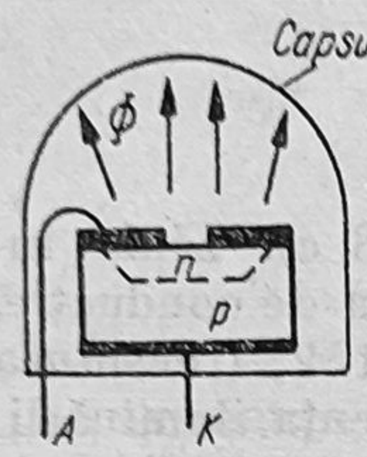
$$\hbar\omega = E_c - E_v \rightarrow \omega = (E_c - E_v)/\hbar.$$

În cazul semiconductoarelor impurificate este mai probabilă recombinarea prin intermediul nivelelor acceptoare, astfel întîi :

$$\hbar\omega < E_r - E_i.$$

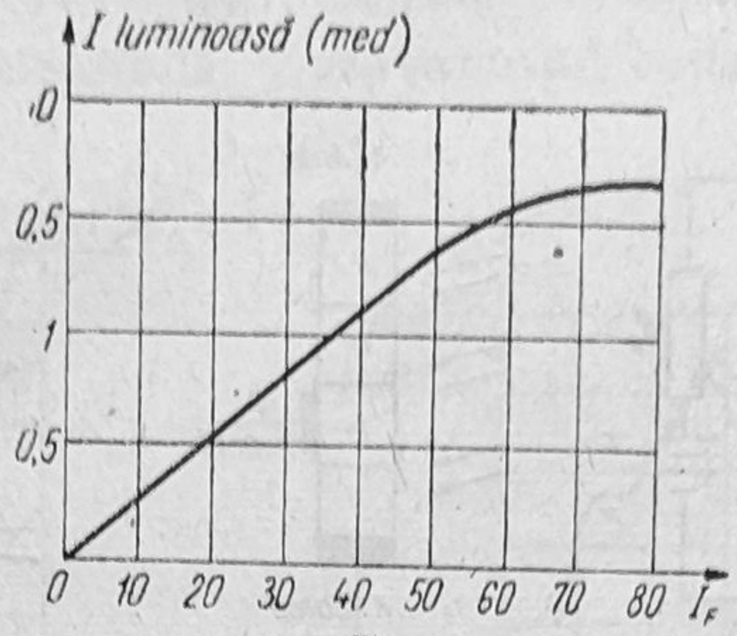


a)

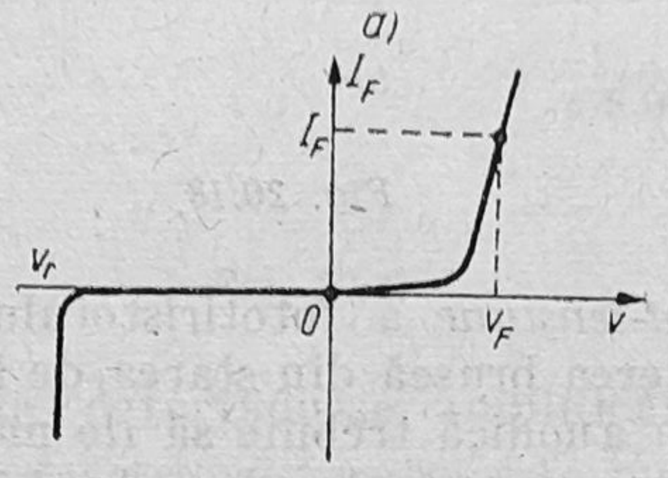


b)

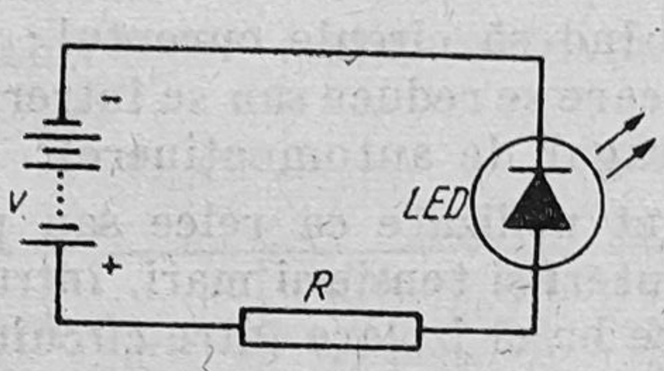
Fig. 20.20



a)



b)



c)

Fig. 20.21

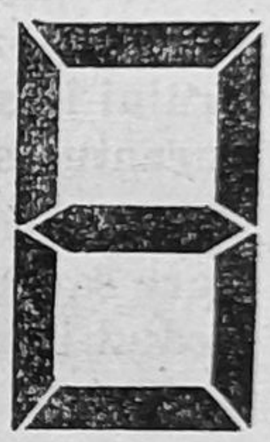


Fig. 20.22

În concluzie, lungimea de undă a radiației emise este în general

$$\lambda \geqslant \frac{2\pi\hbar c}{E_c - E_v}.$$

Intervalul spectral este foarte îngust, dar lumina emisă nu este coerentă. Simbolul unui *LED* și schema constructivă sînt reprezertate în figura 20.20. *LED*-urile prezintă o structură semiconductoare de suprafață < 1 mm², constituind practic o sursă punctiformă. Pentru mărirea acestei suprafețe structura semiconductoare se introduce într-o capsulă de plastic transparent sau translucid colorat. Se alege un astfel de material și o soluție constructivă care să evite strălucirea capsulei datorită luminii exterioare cînd *LED*-ul nu emite, îmbunătățindu-se contrastul între stările stins și aprins. De forma capsulei depinde și unghiul solid sub care este emisă lumina.

Parametrii și caracteristicile *LED*-urilor :

— Parametrul cel mai important este *randamentul vizual* (a nu se confunda cu eficacitatea luminoasă definită la § 12.1)

$$\eta_v = \frac{\Phi_{luminos\ emis}}{P\ electrică\ consumată}; \quad <\eta_v> = \text{lm/W}.$$

— Parametrii electrici ai diodelor electroluminiscente sînt identici cu cei ai diodelor obișnuite:

— *curentul direct maxim* $I_{F\,max}$ (de ordinul 10 mA);

— *tensiunea de deschidere* a joncțiunii V_F (între 1,2—3 V);

— *tensiunea inversă* V_R (valoarea maximă 4 V).

— *Caracteristica luminoasă* reprezintă dependența (aproape liniară) a intensității luminoase în funcție de curentul electric direct (fig. 20.21, a).

— *Caracteristica curent-tensiune* (fig. 20.21, b) reprezintă modul de funcționare (în cadranul întîi) a *LED*-ului. Curentul I_F este limitat de o rezistență R legată în serie cu *LED*-ul (fig. 20.21, c), a cărei valoare se calculează cu relația $R = (V - V_F)/I_F$, unde V este tensiunea dată de sursa de alimentare, iar I_F, V_F reprezintă valorile de lucru ale *LED*-ului.

Diodele electroluminiscente sînt din ce în ce mai utilizate ca indicatoare la aparatele de măsurat în locul becurilor clasice. Utilizarea cea mai interesantă o constituie realizarea *afișării optice* folosind structuri semiconductoare electroluminiscente astfel așezate încît să poată indica cifre sau litere atunci cînd sînt comandate electric. De exemplu, cu o configurație obținută din șapte segmente se poate afișa oricare cifră între zero și nouă (fig. 20.22). Un segment conține una sau mai multe structuri electroluminiscente care lucrează simultan. Configurația poate fi mărită cu ajutorul unei lupe. Alăturarea mai multor asemenea configurații permite afișarea numerelor cu mai multe cifre. Însă, în ultimul timp, pentru afișarea numerică sînt utilizate tot mai frecvent dispozitivele cu cristale lichide. În tabelul 20.4, sînt prezentate unele *LED*-uri și sisteme de afișare cu LED-uri fabricate în R.S.R.

Tabelul 20.4

Diode electroluminiscente (LED-uri)

Tip	Culoare	Intensitate luminoasă [mcd]	Curent nominal [mA]	Timp de răspuns [ns]	Dimensiuni [mm]
ROL 02	roșu	0,6	20	15	∅ 7 × 9
ROL 05	portocaliu	2	20		
ROL 07	galben	2	20		
ROL 09	verde	0,6	20		

Sisteme de afișare cu LED-uri

Tip	Număr de cifre	Înălțimea cifrei [mm]	Curent pe segment [mA]	Dimensiuni de gabarit [mm]
ROL 77	1	7,6	20	10 × 19 × 5
ROL 81	9	2,8	1	50 × 18 × 7

20.9.2. Dioda laser

Reprezintă o diodă electroluminiscentă a cărei radiaţie emisă are caracteristicile luminii laser : monocromaticitate, coerenţă, directivitate şi intensitate mare.

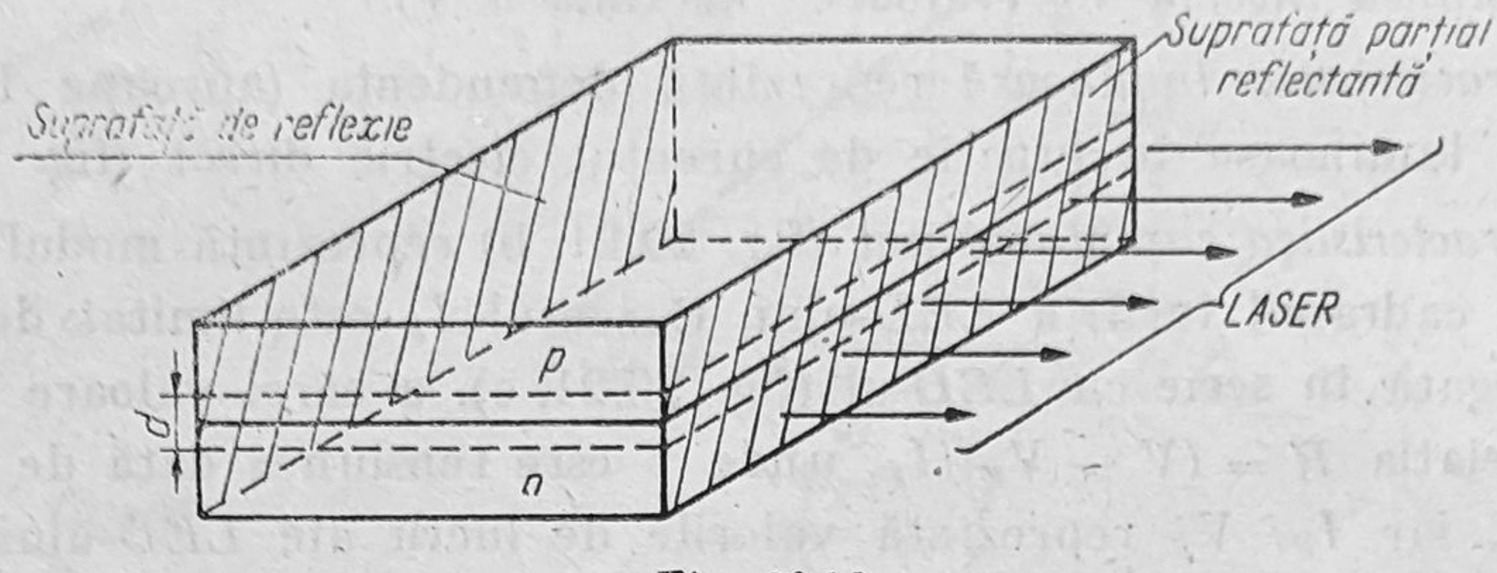


Fig. 20.23

O diodă laser este constituită dintr-o joncţiune $p-n$ realizată pe un material care prezintă proprietatea de electroluminiscenţă (de exemplu GaAs). Inversia de populaţie se realizează prin polarizarea directă a joncţiunii, regiunea activă avînd o lăţime $d = 1 \div 3$ μm (fig. 20.23).

Caracteristica flux luminos-curent direct a diodei laser pune în evidenţă existenţa unui prag peste care apare emisia laser (fig. 20.24). Lungimea de undă a radiaţiei laser depinde de natura materialului semiconductor folosit ; în prezent există diode laser care emit în domeniul vizibil şi diode care emit în domeniul infraroşu îndepărtat.

Utilizarea cea mai avantajoasă a diodelor laser este în domeniul telecomunicaţiilor, fiind legată de transmiterea informaţiilor prin fibre optice.

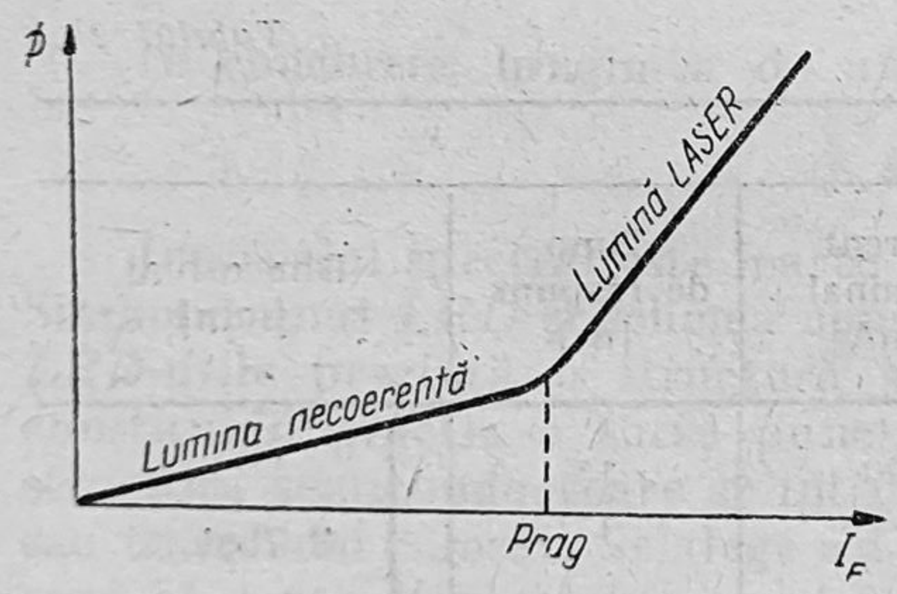


Fig. 20.24

20.10. Cuplori optici

Cuplorul optic (sau optoizolator) este un ansamblu format dintr-un element emiţător şi unul receptor. Există o diversitate mare de cuploare optice, reprezentate schematic în figura 20.25. Teoretic se poate utiliza orice fel de element fotoemisiv (bec cu incandescenţă, lampă cu descărcare, diode electroluminiscente) alături de orice tip de fotodetector cu condiţia ca spectrul de emisie să se suprapună cel puţin parţial peste distribuţia sensibilităţii spectrale a detectorului. Cele mai utilizate cuploare sînt cele realizate prin asamblarea unui LED cu un fototranzistor (fig. 20.25, f).

Proprietatea principală a cuplorului optic o constituie izolarea electrică foarte bună a circuitului de intrare faţă de cel de ieşire. În plus, cuploarele

optice mai prezintă : viteză mare de comutaţie, lipsă de zgomot, insensibilitate la şocuri şi vibraţii, la umezeală, fiabilitate mare, greutate şi dimensiuni foarte reduse.

Parametrii care caracterizează un cuplor optic sînt :

— *tensiunea de lucru* (care nu străpunge izolarea), de ordinul 10^3 V ;

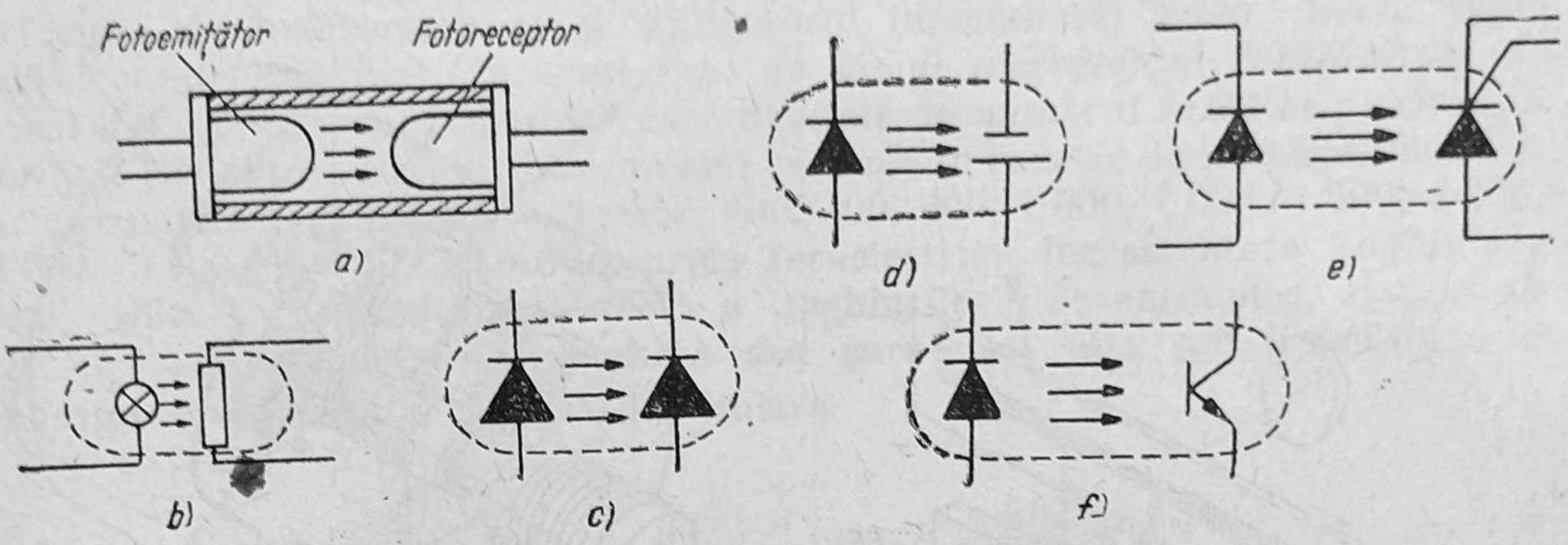


Fig. 20.25

— *rezistenţa de izolaţie*, de ordinul 10^6 Ω ;

— *capacitatea de cuplaj* (între circuitul emiţătorului şi circuitul detectorului), de ordinul 10^{-12} F ;

— *factorul de transfer* — reprezintă raportul dintre variaţia curentului la ieşire şi variaţia corespunzătoare a curentului la intrare, exprimînd eficacitatea transferului semnalului electric prin cuplor. Este subunitar în cazul tuturor fotodetectorilor, cu excepţia fototranzistorului (pentru care are valori de ordinul zecilor).

Cuploarele optice se utilizează cu precădere în construcţia calculatoarelor şi în instalaţii de automatizare pentru transmiterea informaţiei. În tabelul 20.5 sînt prezentate cîteva cuploare optice fabricate în ţara noastră.

Tabelul 20.5

Tip	Componente	Curent de intrare maxim [mA]	$V_{CE\ max}$ [V]	$R_{izolante}$ [Ω]	Factor de transfer	Dimensiuni [mm]
ROL 61	LED + fototranzistor	20	30	1 011	15	9,4 × 6,2 × 4

Dispozitive asemănătoare cuploarelor optice, dar avînd o fantă între emiţător şi receptorul de lumină, se utilizează pentru detectarea obiectelor opace sau a orificiilor într-o bandă perforată.

20.11. **Traductoare fotoelectrice de măsurare numerică**

Traductoarele fotoelectrice de măsurare numerică, bazate pe baleierea directă și fără contact a unor măsuri codificate (rigle sau discuri), asigură separarea fluxului de forță, față de cel informațional, cerință fundamentală

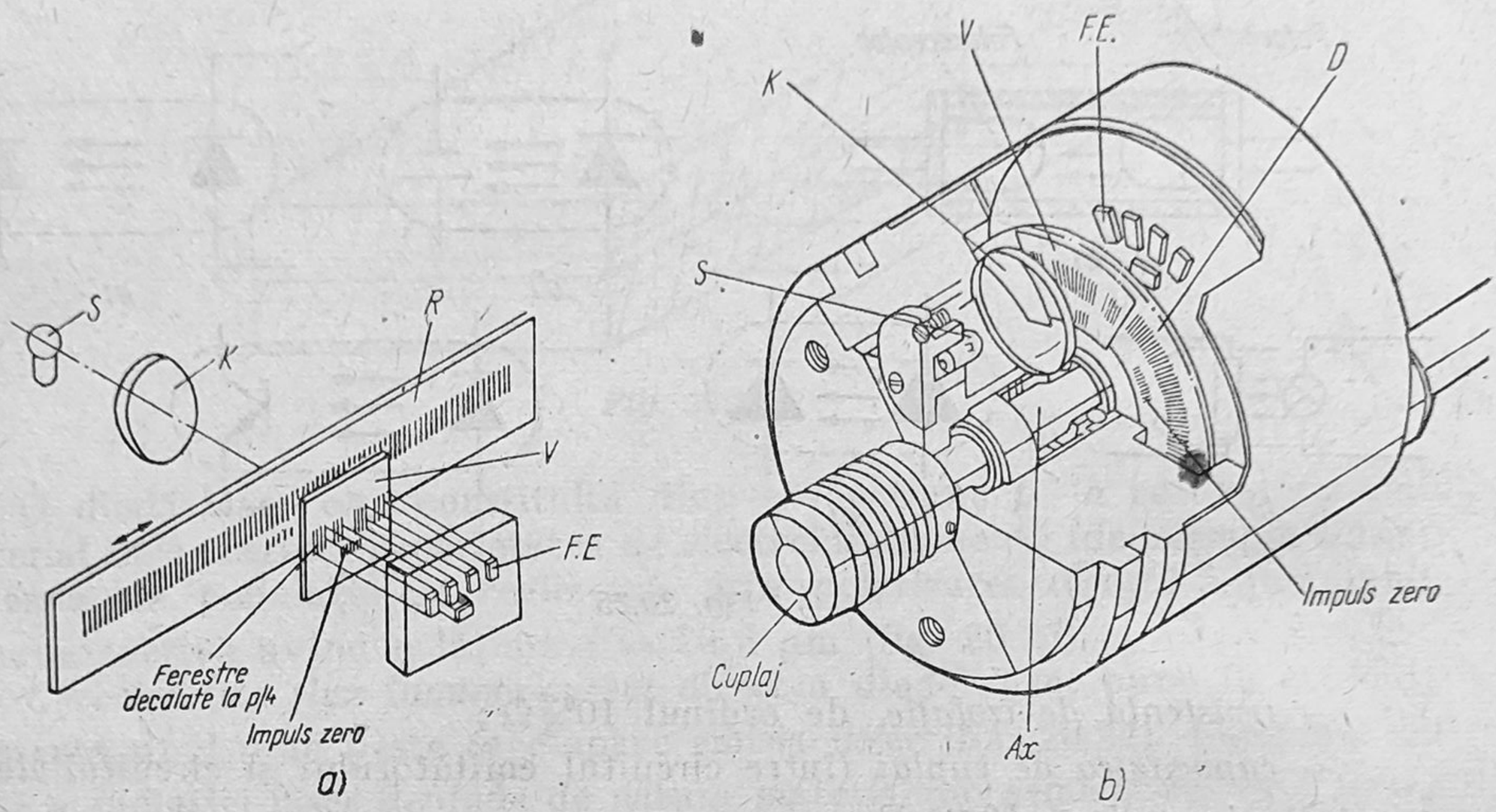


Fig. 20.26

în metrologia de precizie. Baleierea constă în deplasarea măsurii codificate incremental sau binar, materializate de un disc sau o riglă după cum se urmărește măsurarea deplasărilor unghiulare sau liniare, prin fața unor fante sau a unor sisteme de fante de analiză, în dreptul cărora se află plasate fotoelemente care transformă în semnale electrice fluxul luminos transmis sau reflectat de măsura codificată.

Principiul de funcționare al unui traductor fotoelectric incremental liniar este reprezentat în figura 20.26, a : măsura este constituită din rigla incrementală R pe care este trasată o rețea de fante paralele și echidistante cu pasul sau incrementul p ; deplasările riglei R sînt citite de sistemul de fante de analiză, trasate pe rigla-vernier și grupate în patru ferestre, fiecare conținînd același număr de fante egale și echidistante la același pas ca și pe rigla R ; ferestrele sînt decalate una față de alta cu un sfert din pasul sau incrementul rețelei ; rigla incrementală R este iluminată cu fascicule telecentrice provenind de la sura S montată în focarul condensatorului K ; în spatele ferestrelor riglei-vernier V sînt plasate patru fotoelemeute care furnizează patru semnale electrice defazate între ele cu 90°, prelucrarea acestora permițînd numărarea incrementelor (pașilor), ținînd seama de sensul deplasării riglei R și, în consecință, afișarea sau comanda numerică, funcție de numărul de impulsuri proporțional cu deplasarea liniară, sau funcție de frecvența impulsurilor proporțională cu viteza deplasării. Valorile uzuale ale incrementului rețelei sînt 10 μm, 20 μm, 40 μm ; rezoluția traductoarelor

incrementale liniare este de ordinul 1 μm, după prelucrarea electronică a semnalelor furnizate de fotoelemente. Traductoarele incrementale liniare pot lucra și prin reflexie, în acest caz rigla R fiind metalică, iar rețeaua formată din benzi reflectante. Lungimea uzuală a riglei incrementale este de 200... 500 mm, putîndu-se obține și lungimi mai mari prin compunerea a mai multor elemente.

Traductorul fotoelectric incremental unghiular (fig. 20.26, b) are același principiu de funcționare ca și traductorul incremental liniar. Locul riglei incrementale este luat, în acest caz, de discul incremental caracterizat de pasul sau incrementul unghiular, care depinde de numărul fantelor pe circumferință. Diametrul discului incremental se alege în funcție de numărul fantelor pe circumferință, care poate fi : 250, 400, 500, 600, 1 000, 1 024, 1 500, 2 000, 3 600, 5 400...32 400. Traductoarele fotoelectrice incrementale unghiulare sînt utilizate la măsurarea directă a unghiurilor ; de asemenea, împreună cu un mecanism pinion-cremalieră sau șurub cu bile, pot fi utilizate la măsurarea indirectă a deplasărilor liniare.

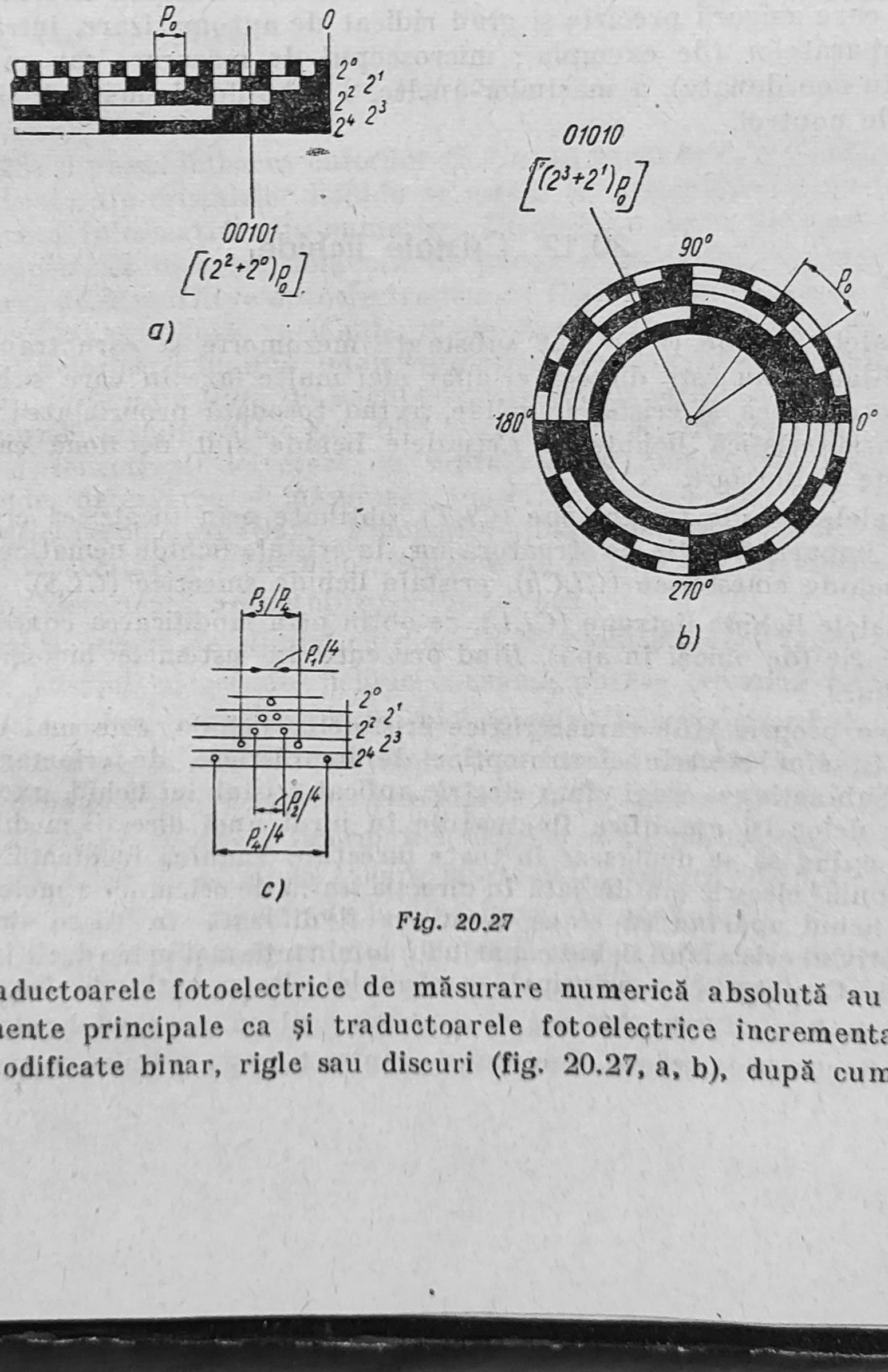


Fig. 20.27

Traductoarele fotoelectrice de măsurare numerică absolută au aceleași componente principale ca și traductoarele fotoelectrice incrementale. Măsurile codificate binar, rigle sau discuri (fig. 20.27, a, b), după cum servesc

măsurării deplasărilor liniare sau unghiulare, cuprind mai multe piste, numărul lor dînd numărul de biţi al sistemului de măsurare. Pasul diviziunilor alternativ luminoase şi opace depinde de rangul pistei şi este în progresie geometrică cu raţia 2. Fiecare pistă este citită separat cu fotoelemente plasate în spatele unor ferestre fixe aşezate în linie, perpendicular pe direcţia de deplasare a riglei, sau radial în cazul discului. Dar, acest mod de aşezare în linie a fotoelementelor favorizează apariţia erorilor de citire, mai ales pentru deplasări ale riglei sau discului egale cu puteri ale lui 2, cînd toate fotoelementele schimbă simultan starea de iluminare. Aşezarea în *V* a fotoelementelor (fig. 20.27, c) elimină aceste erori de citire: pe fiecare pistă sînt aşezate cîte două fotoelemente plasate simetric faţă de fotoelementul destinat citirii pistei 2°, şi distanţate cu $p_k/4$, unde p_k este pasul pistei de rangul k. În cazul aşezării fotoelementelor în *V* sînt necesare componente electronice suplimentare pentru realizarea unei scheme logice de comutare a fotoelementelor active de pe fiecare pistă funcţie de semnalul furnizat de fotoelementul pistei 2°, astfel încît la un moment dat pe fiecare pistă să existe un singur fotoelement activ de citire.

Traductoarele fotoelectrice numerice constituie componente funcţionale moderne, care asigură precizie şi grad ridicat de automatizare, intră în construcţia aparatelor (de exemplu: microscopul de măsurare sau maşina de măsurat în coordonate), a maşinilor-unelte, a roboţilor industriali şi a automatelor de control.

20.12. Cristale lichide

Cristalele lichide (*CL*) sînt substanţe mezomorfe la care tranziţia de fază solid-lichid nu este directă, ci apar mai multe faze în care substanţele sînt anizotrope, ca şi cristalele solide, avînd totodată proprietatea de fluiditate, caracteristică lichidelor. Cristalele lichide sînt de două categorii: termotrope şi liotrope.

Cristalele lichide termotrope (*CLT*), obţinute prin încălzirea cristalelor solide, se împart, funcţie de structura lor, în cristale lichide nematice (*CLN*), cristale lichide colesterice (*CLCh*), cristale lichide smectice (*CLS*).

Cristalele lichide liotrope (*CLL*), se obţin prin modificarea concentraţiei lor în soluţie (de obicei în apă), fiind prezente în sistemele biologice şi în ţesutul viu.

Dintre proprietăţile caracteristice cristalelor lichide, cele mai utilizate în aplicaţii sînt efectele electro-optice de împrăştiere, de orientare şi de culoare. Sub acţiunea unui cîmp electric aplicat cristalului lichid, axele lungi ale moleculelor îşi amplifică fluctuaţiile în jurul unei direcţii medii, moleculele începînd să se deplaseze în toate direcţiile. Lumina incidentă, care în lipsa cîmpului electric era dirijată în direcţia unică de orientare a moleculelor, cristalul lichid apărînd ca transparent, va fi difuzată în toate direcţiile, stratul activ al cristalului lichid căpătînd o luminanţă mai mare decît în starea de repaus. Caracteristica principală a efectului electro-optic de împrăştiere dinamică a luminii este *factorul de contrast*, egal cu raportul luminanţelor straturilor activ şi în repaus. Factorul de contrast creşte neliniar cu tensiunea

aplicată $U > U_p = 6 - 9$ V (U_p — tensiunea de prag pentru efectul electro-optic).

Pînă în prezent au căpătat o arie largă de răspîndire doar aplicaţiile bazate pe împrăştierea dinamică a luminii ambiante în stratul subţire de *CLN*

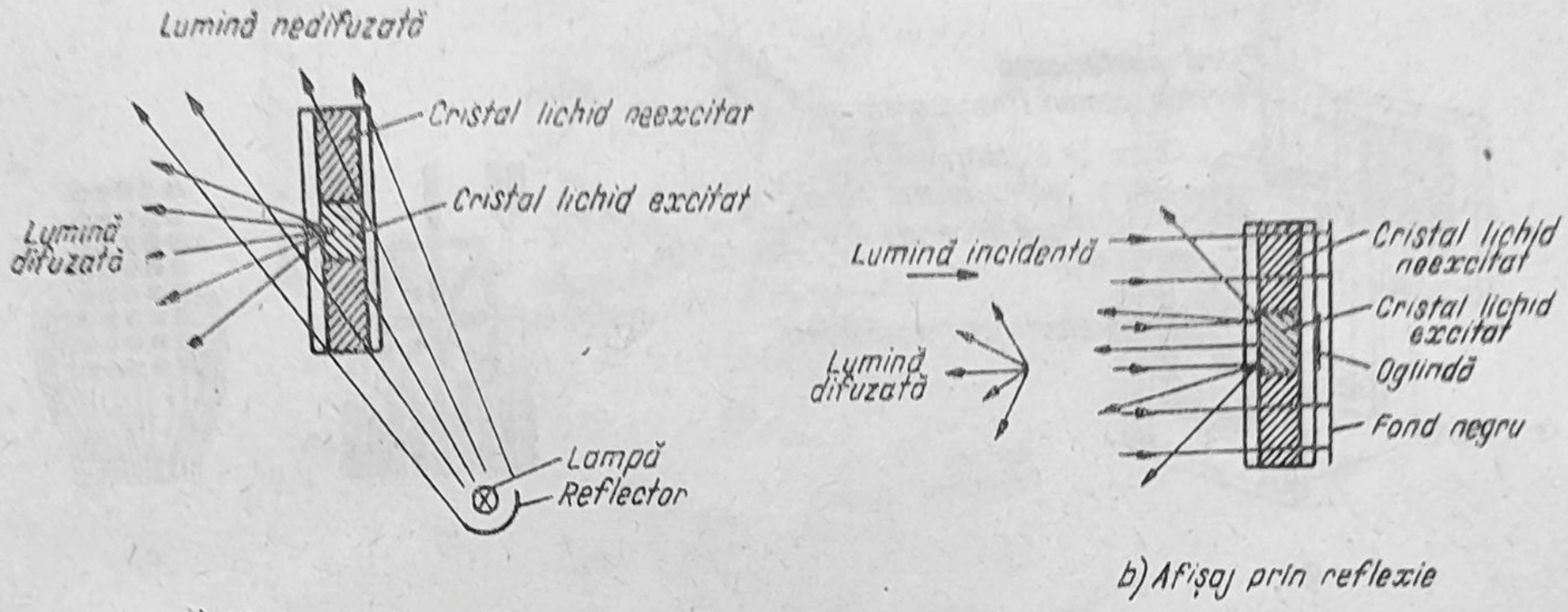


Fig. 20.28

(fig. 20.28) şi pe schimbarea culorilor *CLCh*. În acest sens majoritatea aplicaţiilor actuale ale cristalelor lichide se referă la dispozitivele optoelectronice de afişare a informaţiei alfa-numerice. Ritmul accelerat în care sînt continuate cercetările în acest domeniu va permite aplicarea în practică a unei game largi de dispozitive optoelectronice cu *CLT* : amplificatoare de imagini, lentile cu transparenţă variabilă, modulatoare de lumină, celule pentru controlul polarizării luminii, monocromatoare cu lungime de undă continuu variabilă, vedere pe timp de noapte, conversia în vizibil a radiaţiei *X*, ghiduri de undă, celule optice sensibile la presiune, monitoare pentru indici de refracţie, senzori şi detectori de suprafaţă în holografia acustică şi de microunde, detectarea şi măsurarea tensiunilor piezo-electrice, termografie, cartografie termică spaţială, topografia cîmpurilor magnetice, sisteme de ghidare la aterizarea avioanelor, sisteme de control al altitudinii, explorări geologice, detectarea adeziunii unor materiale.

Spre deosebire de afişajul cu diode electroluminiscente (*LED*-uri) sau cu plasmă, afişajul cu cristale lichide consumă putere electrică mică, funcţionează la tensiuni electrice foarte mici (compatibile cu circuitele integrate), nu emit lumină, ci doar interacţionează cu lumina incidentă. Alte avantaje : putere incidentă mică pe unitatea de suprafaţă (10 W/cm², pînă la 100 W/cm²), posibilitatea de stocare a informaţiei, obţinerea simplă de mai multe culori, suprafaţă mare de afişaj la volum foarte mic, asigură vizibilitatea într-un domeniu larg al condiţiilor de luminozitate ale mediului.

Dispozitivele optoelectronice de afişare sînt realizate din două plăci de sticlă pe care se depun electrozi peliculari transparenţi, un cadru de distanţare şi un strat de *CLN* de grosime 6 μm—25 μm. Placa suport frontală are electrozi sub formă de 7 segmente, 14 segmente sau 8×5 segmente

pentru redarea cifrelor sau literelor (fig. 20.29). În modul de funcţionare prin reflexie stratul conductor de pe sticla din spate trebuie să fie reflectant.

Astăzi se folosesc straturi conductoare transparente cu bioxid de staniu (SnO_2) şi trioxid de indiu (In_2O_3) pur sau în aliaje. În cazul cînd se lucrează prin reflexie, stratul reflectant se obţine prin vaporizarea aluminiului şi depunerea în vid.

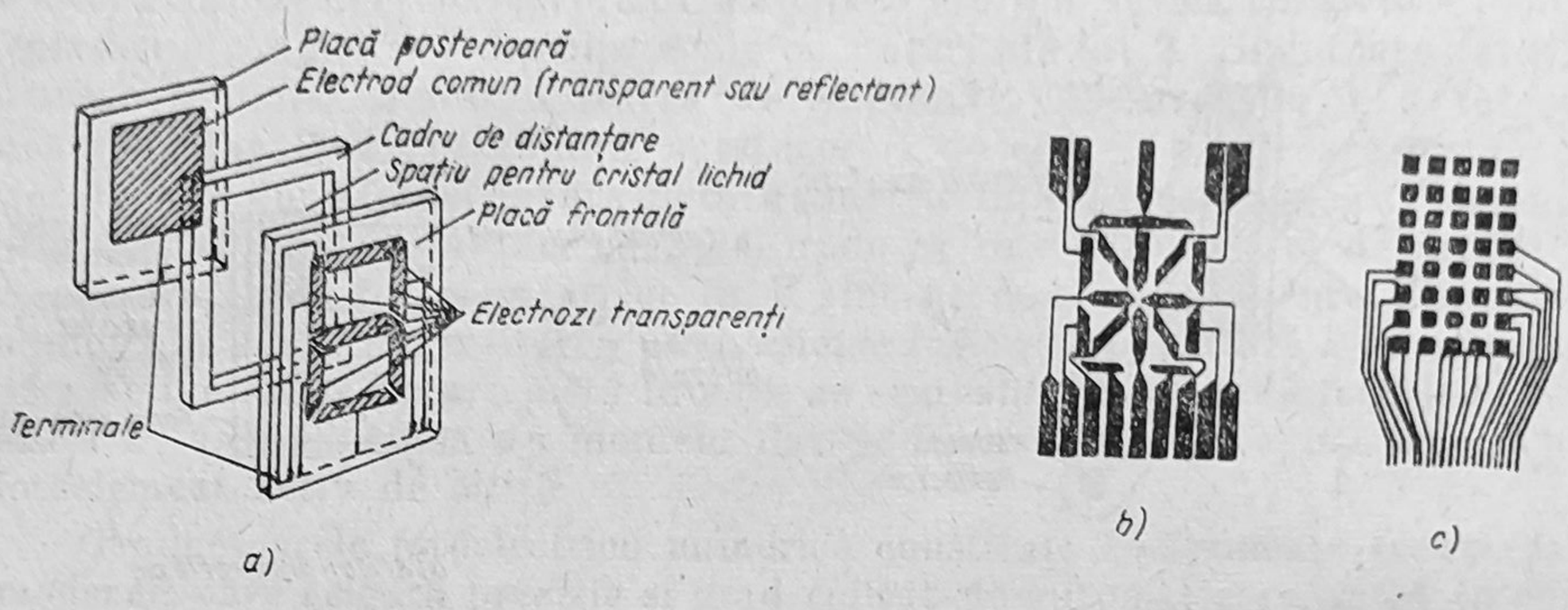


Fig. 20.29

Unghiul de incidenţă a luminii ambiante influenţează asupra contrastului dispozitivelor de afişare cu *CL* care lucrează prin transmisie (fig. 20.30). Un factor de contrast de 40 : 1 este considerat foarte bun.

În figura 20.31 sînt prezentate schematic cîteva modalităţi de amplasare a surselor de lumină în dispozitivele de afişare cu *CLN*: a) prin transmisie; b) prin reflexie (la calculatoare de buzunar); c) prin reflexie, în combinaţie cu filtru de tip jaluzea, care reflectă lumina într-o direcţie convenabilă, datorită indicelui de refracţie diferit a două straturi alăturate; un asftel de sistem reflectă doar jumătate din lumina incidentă, deranjînd mai puţin pe observator, mai ales dacă în spate se află un fond negru; d) o metodă nouă de îmbunătăţire a afişării informaţiei alfa-numerice constă în

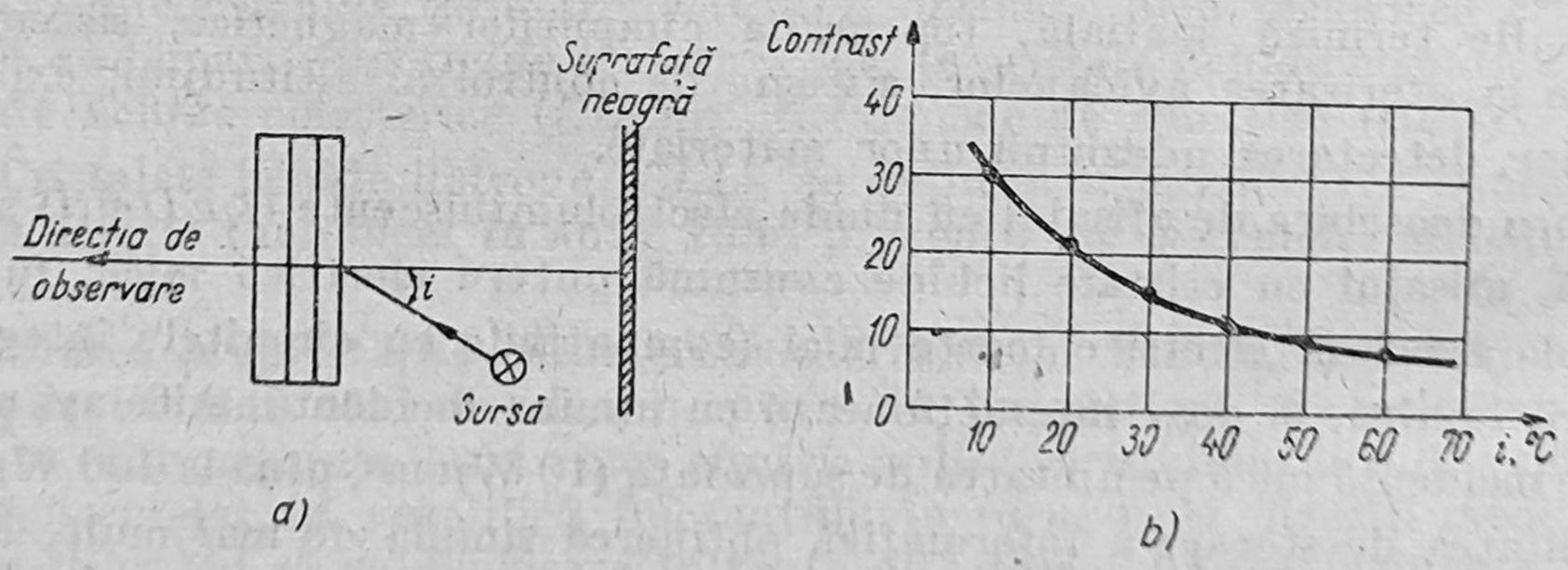


Fig. 20.30

plasarea în spatele dispozitivelor optoelectronice care lucrează prin reflexie a unor folii reflectătoare sau retro-reflectătoare în locul oglinzilor obişnuite. Aceste folii sînt realizate dintr-un strat de microsfere din sticlă, care au proprietatea de a reflecta orice rază de lumină (r_3) în aceeaşi direcţie din care a venit (ochi de pisică).

O aplicaţie recentă a *CLT* constă din proiectarea pe ecrane de dimensiuni relativ mari a imaginilor statice sau în mişcare, folosind metoda baleierii cu un fascicul de electroni sau cu un fascicul luminos, care se poate completa

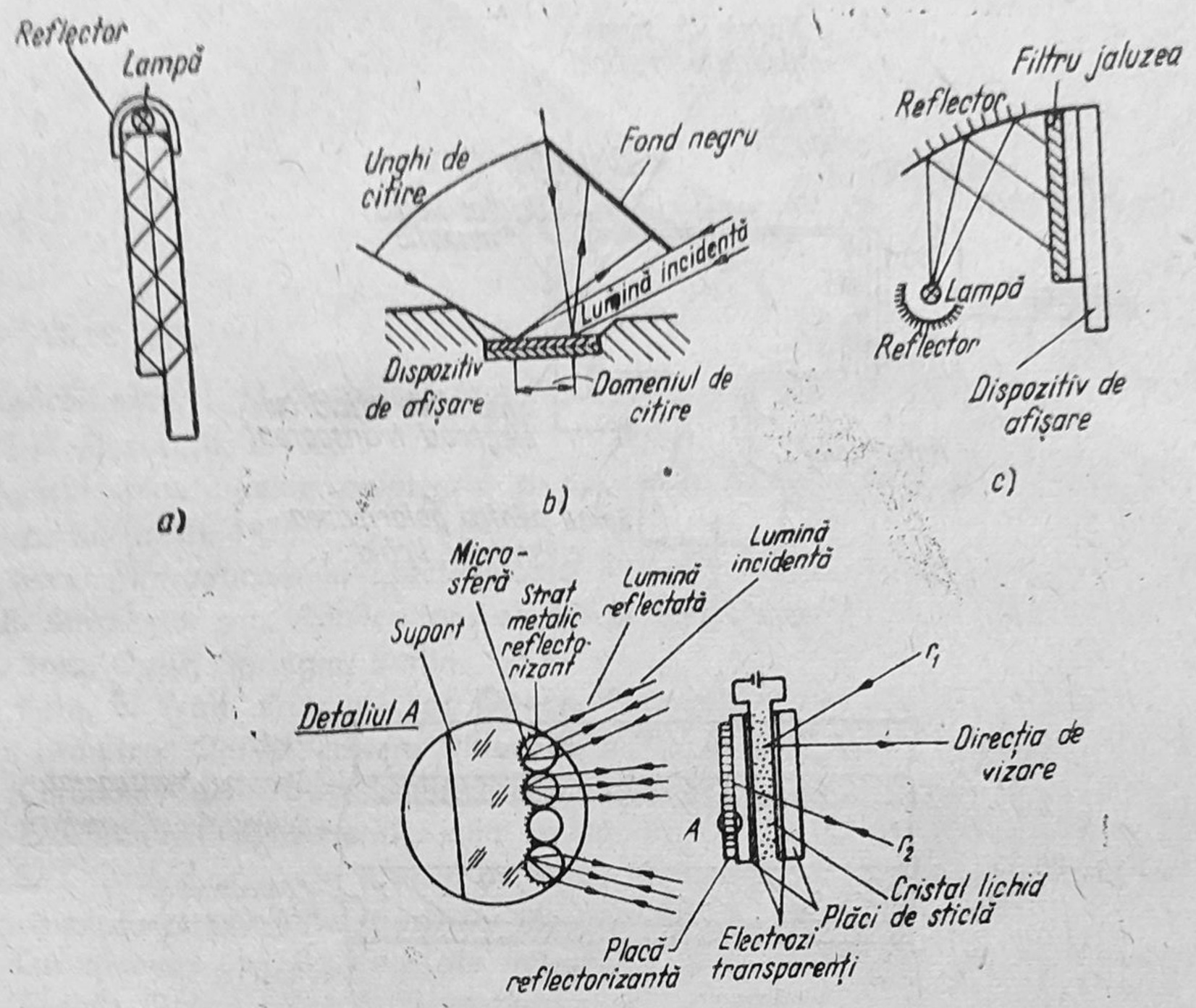


Fig. 20.31

cu amplificarea luminii şi cu memorarea imaginilor obţinute. În cazul de faţă amplificarea luminii are sensul utilizat în electronică la amplificarea semnalelor electrice, adică o imagine cu luminozitate mai slabă este transformată într-o imagine mai luminoasă, folosindu-se o sursă puternică de lumină. Pentru mărirea contrastului tuburilor catodice, s-a folosit un dispozitiv optoelectronic cu strat subţire de *CLN*, cu grosimea de 10 μm, plasat între o placă de sticlă acoperită cu SnO_2 şi o placă de sticlă în care s-a implantat un mozaic de fire metalice (fig. 20.32). Baleierea cu fasciculul de electroni are două mari dezavantaje: — stratul de *CL* este supus unei tensiuni electrice continue, ceea ce scurtează durata de viaţă a dispozitivului; pentru a înlătura acest dezavantaj se pot utiliza două fascicule de electroni, unul pentru înscrierea informaţiei şi altul pentru împrăştierea dinamică a luminii în stratul de *CLN* prin modularea acesteia cu o tensiune alternativă de 50 Hz; — dificultatea realizării unui mozaic cu fire metalice care să ofere o rezoluţie satisfăcătoare a imaginii. Baleierea cu fascicul luminos înlătură aceste dezavantaje. Dispozitivele optoelectronice utilizate în acest caz au un strat subţire de *CLN* şi un fotoconductor, ambele amplasate între două plăci de sticlă cu electrozi transparenţi (fig. 20.33). În absenţa luminii stratul fotoconductor are o rezistenţă electrică mult mai mare decît cea a stratului

de *CLN*. Dacă pe stratul fotoconductor se proiectează o imagine, porțiunile iluminate prezintă o conductivitate suficient de mare, astfel încît tensiunea electrică aplicată între electrozii transparenți se regăsește pe stratul de *CL*,

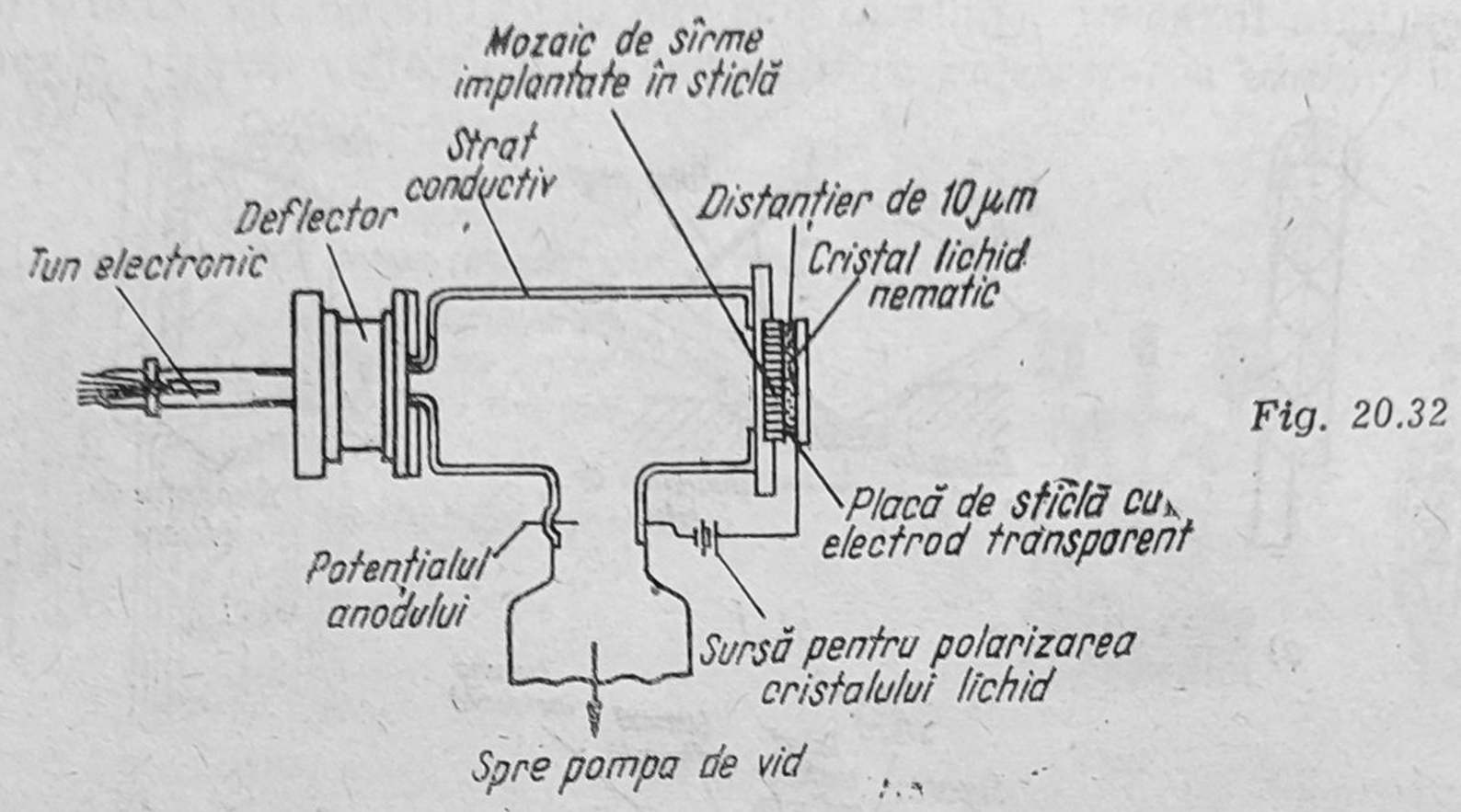


Fig. 20.32

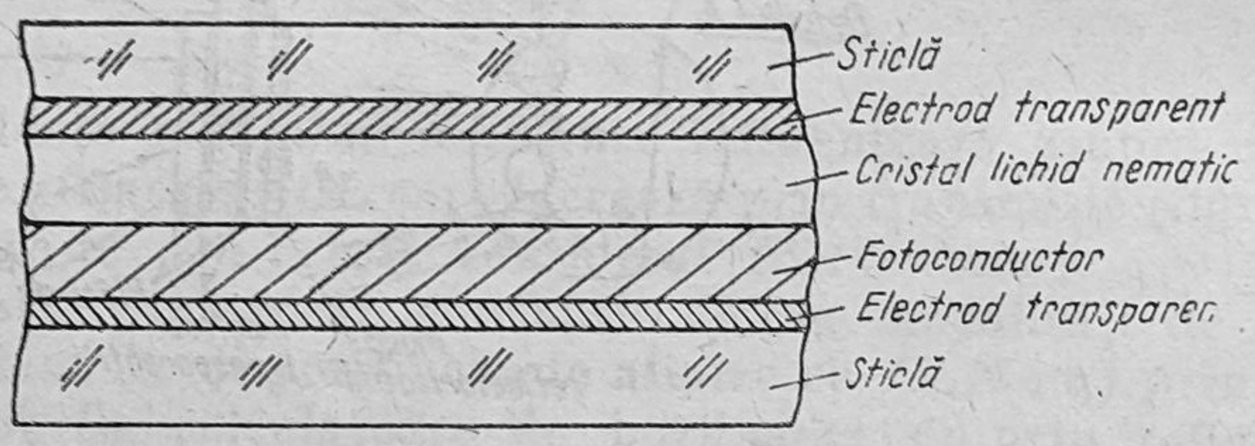


Fig. 20.33

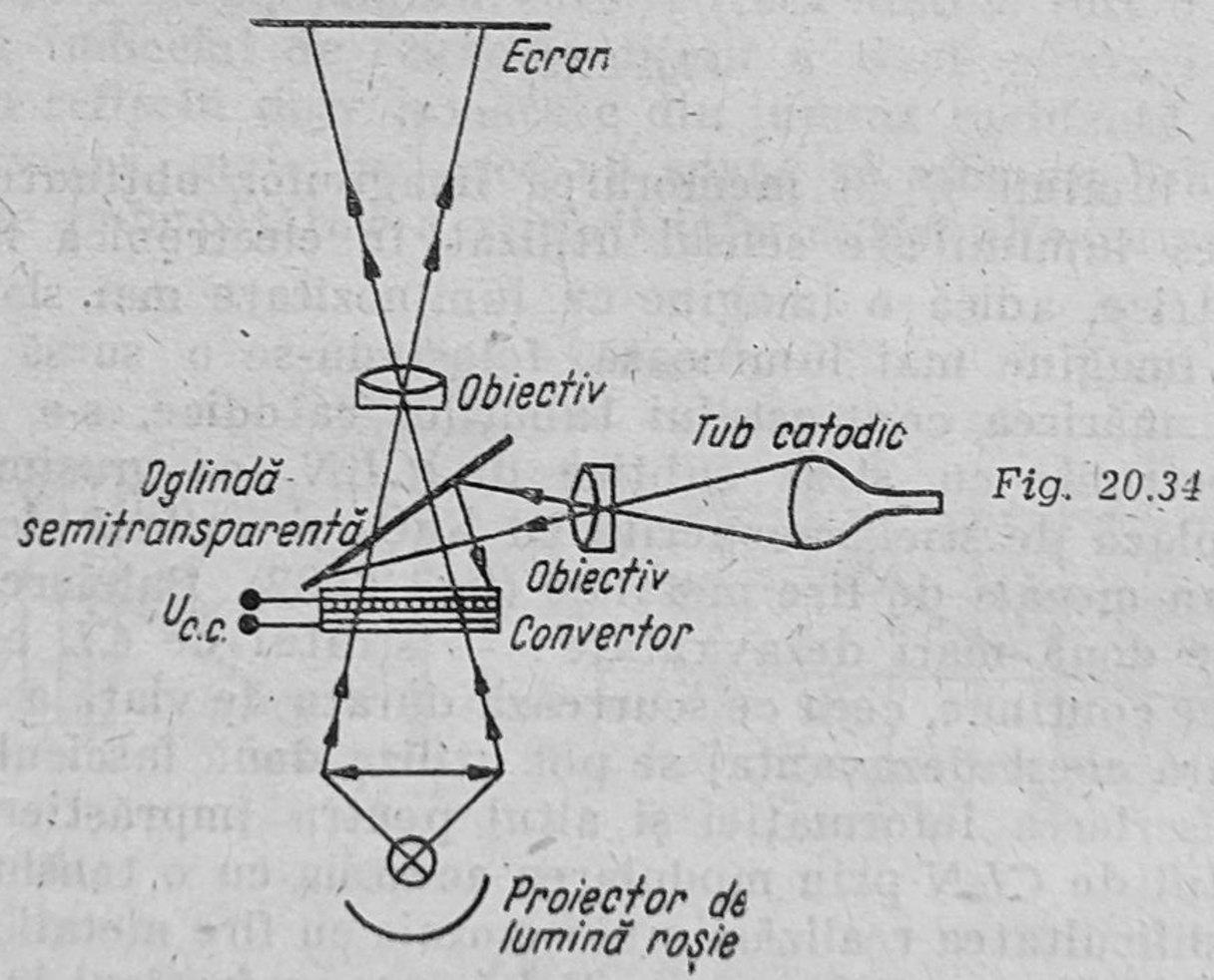


Fig. 20.34

ceea ce face ca lumina provenită de la o altă sursă să fie dispersată sau împrăștiată dinamic (fig. 20.34). Ca straturi fotoconductoare se folosesc ZnS care are sensibilitate pronunțată în ultraviolet, CdS sensibilă în spectrul vizibil.

BIBLIOGRAFIE

1. **I. Agârbiceanu, I. M. Popescu,** *Metode optice ale spectroscopiei hertziene,* Ed. Acad. R.S.R., București, 1970.
2. **I. Agârbiceanu,** *Lumina polarizată și aplicațiile ei în știință și tehnică,* Editura Tehnică, București, 1956.
3. **N. Avram,** *Introducere în spectroscopia Raman,* Editura Facla, Timișoara, 1982.
4. **S. E. Barrekette** ș.a., *Applications of holography,* Plenum Press, New York, 1971.
5. **M. Born,** *Optik,* Springer, Berlin, 1933.
6. **M. Born, E. Wolf,** *Principles of Optics,* Pergamon Press, Oxford, 1981.
7. **Gh. Brătescu,** *Optica,* Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
8. **H. Chrétien,** *Calcul des combinaisons optiques,* Masson, Paris, 1959.
9. **A. E. Conrady,** *Applied optics and optical design,* Dover Publication, New York, 1975.
10. **F. S. Crawford,** jr. *Unde* (*Cursul de fizică Berkeley,* vol III), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983 (trad. din lb. engleză).
11. **I. Cucurezeanu** ș.a., *Aplicații ale holografiei optice,* Editura Tehnică, București, 1984.
12. **E. Curatu,** *Optică tehnică,* (curs litografiat), Universitatea din Brașov, 1983.
13. **I. Dima, I. Licea,** *Fenomene fotoelectrice și aplicații,* Ed. Acad. R.S.R., București, 1980.
14. **W. Driscoll,** editor, *Handbook of Optics,* Mc. Graw-Hill, New York, 1978.
15. **P. M. Duffieux,** *L'integrale de Fourier et ses applications a l'optique,* Masson, Paris, 1970.
16. **M. A. Eliașevici,** *Spectroscopia atomică și moleculară* (trad. din lb. rusă), Ed. Acad. R.S.R., București, 1966.
17. **P. Fleury, J. P. Mathieu,** *Images optiques,* Eyrolles, Paris, 1970.
18. **M. Françon,** *Interférence, diffraction et pólarisation,* Encyclopedia of physics, editor S. Flügge, vol. XXIX, Springer, Berlin, 1967.
19. **N. Françon,** *La granularité laser et ses applications en optique,* Masson, Paris, 1978.
20. **J. W. Goodman,** *Introduction to Fourier optics,* Mc Graw-Hill, New York, 1968.
21. **M. Hertzberger,** *Modern geometrical optics,* Interscience Publishers, New York, 1968.
22. **H. H. Hopkins,** *Wave theory of aberration,* University Press, Qxford, 1950.
23. **D. F. Home,** *Dividing, ruling and mask-making,* Adam-Hilger, London, 1974.
24. **I. Iova,** Elemente de optică aplicată, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1977.
25. **R. Kingslake,** editor, *Applied optics and optical engineering,* Academic Press, New York, 1965–1980.
26. **M. V. Klein,** *Optics,* John-Willey, New York, 1970.
27. **L. D. Landau, E. N. Lifschitz,** *Physique théorique,* Ed. Mir, Moscou, vol. II, 1970; Vol. IV, 1972.
28. **A. Maréchal,** *Imagerie géometrique,* Revue d'optique, Paris, 1951.
29. **E. Marom** ș.a., *Applications of holography and optical data processing,* Pergamon Press, New York, 1977.

30. **D. Moisil, G. Moisil,** *Teoria și practica elipsometriei,* Editura Tehnică, București, 1973.
31. **I. M. Popescu** ș.a., *Aplicații ale laserilor,* Editura Tehnică, București, 1979.
32. **I. M. Popescu,** *Fizica,* Editura Didactică și Pedagogică, București, vol. I, 1982 ; vol. II, 1983.
33. **G. N. Ramachandran, S. Ramaseshan,** *Encyclopedia of Phisics,* editor S. Flügge, vol. XXV/I, Springer, Berlin, 1966.
34. **W. A. Shurcliff,** *Polarised light,* Harvard University Press, Oxford, 1962.
35. **E. Sofron, S. Târâca,** *Dispozitive optoelectrice și cristale lichide,* Editura Tehnică, București, 1976.
36. **A. Sommerfeld,** *Optics,* Academic Press, New York, 1964.
37. **J. A. Stratton,** *Electromagnetic Theory,* McGraw-Hill, New York, 1941.
38. **V. I. Vlad** ș.a., *Prelucrarea optică a informației,* Ed. Acad. R.S.R., București, 1976.
39. **W. T. Welford,** *Aberations of the symetrical optical systems,* Academic Press, London, 1974.
40. **E. Wolf,** editor, *Progress in optics,* North-Holand, Amsterdam, 1961–1981.

Lei 49

EDITURA TEHNICĂ